5

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a V – a

V1

SUBIECTE:

1. Se dau numerele

$$x = 624 \cdot 57 - 45 \cdot 624 + 12 + 625 \cdot 13$$

$$y = \left(8^{17} \cdot 4^{5} : 2^{60} + 3^{100} : 27^{33} \cdot 9\right)^{2024} : 29^{2023} + 1^{2024} + 2024^{0} - 28$$

a) Arătați că x este pătrat perfect și cub perfect; **(3p)**

b) Comparați x^{11} cu 2^{51y+1}. **(4p)**

2. Determinați n astfel încât suma cifrelor numărului $A = \underbrace{555\ldots5}_{n\ cifre} \cdot 2020$ să fie 2024.

(G.M.) **(7p)**

3. Fie numerele $\overline{x_1x_2\ldots x_m} = 2^{1000} \cdot 5^{1023}$ și $\overline{y_1y_2\ldots y_n} = 2^{1023} \cdot 5^{1000}$. Calculați $m + n$.

(7p)

4. La un turneu de tenis participă n jucători.

a) Dacă turneul se organizează în sistem campionat, în care fiecare joacă un meci cu ceilalți $n - 1$ jucători, aflați câte meciuri se joacă în total, dacă $n = 16$; **(4p)**

b) Dacă turneul se organizează în sistem eliminatoriu (se trag la sorți meciurile înaintea fiecărui tur și se califică în următorul tur învingătorul din fiecare meci; în situația în care înaintea unui tur este un număr impar de jucători, unul dintre ei se califică fără să joace), aflați n știind că în total se joacă 23 de meciuri. **(3p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

6

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VI – a

VI

SUBIECTE:

1. a) Știind că $\frac{x}{x+2}=\frac{y}{y+4}$, determinați $\frac{x}{y}$. **(3p)**

b) Determinați numerele naturale x, y, z, t, știind că sunt adevărate relațiile:
$x^2+y^2+z^2+t^2=3000$ și $\frac{x}{x+2}=\frac{y}{y+4}=\frac{z}{z+6}=\frac{t}{t+8}$. **(4p)**

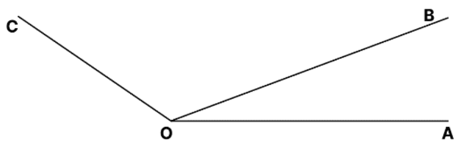
2. a) Fie a și b numere naturale nenule, astfel încât $a|a\cdot b+b$ și $b|a\cdot b+a$. Arătați că $a=b$. **(3p)**

b) Numerele naturale nenule x și y au proprietatea că numărul $x^{2023}+x+y^2$ este divizibil cu xy. Demonstrați că x este pătrat perfect. **(4p)**

3. În figura de mai jos, unghiurile AOB și AOC sunt neadiacente suplementare. Știind că suplementul unghiului AOC reprezintă jumătate din complementul unghiului AOB, calculați:

a) Măsura unghiului AOB **(4p)**

b) Dacă $[OD$ este bisectoarea unghiului AOB, iar semidreapta OR este semidreaptă opusă semidreptei OC, calculați măsura unghiului ROD. **(3p)**



4. Pe cercul $C(O,r)$ se consideră punctele A, B, M, P, Q, S, astfel încât AB este diametru, M, P, Q situate pe aceeași parte a dreptei AB, P între M și Q, iar S de cealaltă parte a dreptei AB, astfel încât $\widehat{AM}\equiv\widehat{PQ}\equiv\widehat{BS}=60^0$. Punctul N este situat pe arcul mic AS, astfel încât unghiurile AON și POQ sunt complementare.

a) Arătați că dreptele ON și MS sunt perpendiculare. **(3p)**

b) Dacă în plus, $\sphericalangle POM=5\cdot\sphericalangle BOQ$, iar T un punct situat pe arcul mic SN, astfel încât $\sphericalangle BOQ\equiv\sphericalangle SOT$, arătați că dreapta PO împarte arcul mic TN în două arce congruente. **(4p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

7

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VII – a

V1

SUBIECTE:

1. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}, \dots, \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2023}}\right\}$.

a) Calculați suma elementelor mulțimii A. **(3p)**

b) Arătați că există cel puțin 946 de submulțimi ale mulțimii A, pentru care suma elementelor fiecărei submulțimi să fie un număr rațional. **(4p)**

2. Aflați numerele $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, știind că $x + \frac{1}{y} = 2, y + \frac{1}{z} = 3$ și $xyz = 1$. **(7p)**

3. În patrulaterul convex ABCD, O este punctul de intersecţie al diagonalelor, OA = 3OC, OB = OD şi unghiul A are măsura mai mică de 60^0.

a) Dacă E este mijlocul diagonalei AC, demonstraţi că patrulaterul BEDC este paralelogram. **(2p)**

b) Demonstraţi că patrulaterul ABCD poate avea cel mult un unghi drept. **(4p)**

4. Laturile opuse AB și CD ale patrulaterului ABCD se întâlnesc în E, iar AD și BC în F. Se iau pe prelungirile laturilor AB, DC, BC și AD, segmentele $EH = AB$, $EK = CD$, $FL = BC$ și $FM = DA$, astfel încât $E \in (AH)$ și $E \in (DK)$, iar $F \in (AM)$ și $F \in (BL)$. Să se demonstreze că patrulaterul HKLM este paralelogram. **(7p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

8

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VIII – a

V1

SUBIECTE:

1. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle BAC = 90^0$, $AC = 2\sqrt{6}\ cm$. Pe planul (ABC) se ridică de aceeași parte perpendicularele AD și CE, astfel încât $AD = 6\ cm$ și $CE = 4\ cm$. Arătați că dreapta CD este perpendiculară pe planul (BAE).

(7p)

2. a) Arătați că, pentru orice numere $x, y > 0$, are loc inegalitatea: $\frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy}$.

(3p)

b) Arătați că, pentru orice numere $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea :

$$3 + 2\left(\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ca}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}\right) \le (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

(4p)

3. Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{(x, y) \in Z \times Z \middle|\ x^2 + y^2 \le 20x - 22y\right\}$$

$$B = \left\{(x, y) \in Z \times Z \middle|\ x^2 + y^2 \le 10y - 28x\right\}$$

Determinați mulțimea $A \cap B$. **(7p)**

4. Pe planul paralelogramului $ABCD$ se construiește perpendiculara VO, $\{O\} = AC \cap BD$. Pe segmentele AB, BC, respectiv, VO, există punctele M, N, respectiv, P astfel încât $MP \perp (VCD)$ și $NP \perp (VAD)$. Demonstrați că $ABCD$ este romb.

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

9

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a IX – a

V1

SUBIECTE:

1. Fie D mijlocul laturii [BC] a $\Delta\boldsymbol{ABC}, \boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{AB}), \boldsymbol{N} \in (\boldsymbol{AC})$. Să se determine condiția de coliniaritate a vectorilor $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$ *și* $(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND})$.

(7p)

2. Mulțimile finite A și B satisfac egalitatea:

$\frac{1}{card(A \cap B)} + \frac{1}{card(A \cup B)} + \frac{1}{card\, P(A \cup B)} = \frac{19}{24}$, unde $card\ M$ reprezinta numarul de elemente ale multimii M, iar $P(M)$ este mulțimea tuturor submulțimilor lui M. Să se justifice egalitatea $card(A) = card(B)$.

(7p)

3. Rezolvați in $\mathbb{R}$ ecuația $\left\{\frac{4x+3}{3x-2}\right\} = \frac{2x-2}{3x-2}$.

S.G.M 9/2023

(7p)

4. Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea ca $a + b + c = 1$. Să se arate ca $\frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} + \frac{ab}{a+b} \geq \frac{27abc}{2}$.

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

10

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a X – a

V1

SUBIECTE:

1. a) Arătaţi că: $\operatorname{Re} z = \frac{a}{4}\left(\left|z+\frac{1}{a}\right|^2 - \left|\bar{z}-\frac{1}{a}\right|^2\right), \forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall\, a \in \mathbb{R}^*$ **(3p)**

b) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că:
$2(6+9i)^n - 3(1+8i)^n = 3(7+4i)^n \Leftrightarrow (2+i)^n + (2-i)^n = 2 \cdot 3^{n-1}$ **(4p)**

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, o progresie aritmetică cu termeni pozitivi.

a) Demonstraţi că: $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **(2p)**

b) Fie $(b_n)_{n\geq 1}$, o progresie geometrică cu termeni mai mari decât 1. Demonstraţi că:
$\lg \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **(5p)**

3. Se consideră funcţia $f:(-\infty,0] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

a) Arătaţi că funcţia f este strict monotonă. **(2p)**

b) Arătaţi că f este inversabilă şi determinaţi inversa ei. **(2p)**

c) Arătaţi că $f(x-1) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) > f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in (-\infty,-1)$. **(3p)**

4. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe diferite două câte două, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$. Să se demonstreze că:
$\min_{a\in\mathbb{R}} |a z_2 + (1-a) z_3 - z_1| = \frac{1}{2r} |z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|$ **(7p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

11

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XI – a

V1

SUBIECTE:

1. a) Se consideră matricea $X \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^{2023} = X^{2022}$. Demonstrați că $X^3 = X^2$.

(4p)

b)) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} cos^2\alpha & sin^2\alpha & 0 & 0 \\ sin^2\alpha & cos^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\beta & sin\beta \\ 0 & 0 & -sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}$, unde α și β sunt constante reale.

Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

(3p)

2. Se consideră $A, B \in M_2(\mathbb{C})$astfel încât $AB = BA \neq O_2$. Dacă $det\,A = det\,B = 0$, demonstrați că $det(aA + bB) = 0$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{C}$.

(7p)

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq1}$ definit prin $x_1 = 0$ și $x_{n+1} = \sqrt{1+nx_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right)^n$.

(7p)

4. a) Fie funcția $f:(1,+\infty) \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că $2^{f(x)} \leq x < 2^{f(x)+1}$, $\forall x > 1$. Determinați mulțimea punctelor în care f nu are limită.

(3p)

b) Fie șirul $(x_n)_{n\geq1}$ de numere reale cu $x_2 > x_1 > 0$, care are proprietatea:

$$x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k \text{ , } \forall n \geq 2 \text{ .}$$

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(4p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

12

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XII – a

V1

SUBIECTE:

1. Pe R se definește legea de compoziție $x * y = axy - x - y + 6,\ \forall x, y \in R$, unde a este o constantă reală.

i) Să se arate că legea „*“ admite element neutru dacă și numai dacă $a = \frac{1}{3}$.

ii) Să se arate că dacă intervalul $[0, 6]$ este parte stabilă a lui R în raport cu legea „*“, atunci $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$.

2. Fie $a, b \in R$ și $F: R \to R,\ F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

i) Să se determine numerele reale a și b astfel încât F să fie primitivă a unei funcții f.

ii) Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx$.

3. Fie $f: [0, 1] \to R$ o funcție continuă care admite o primitivă F, astfel încât $F(1) - F(0) = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $\frac{1}{\sqrt{2}} < f(c) < \frac{\sqrt{2}}{1+c}$.

4. Spunem că un grup finit cu cel puțin trei elemente este *prietenos* dacă pentru orice p prim, $p \mid \operatorname{ord} G$ și pentru orice automorfism al lui G, există $a \in G,\ \operatorname{ord} a = p$, astfel încât $f(a) = a$.

i) Să se determine grupurile *prietenoase* cu trei și patru elemente.

ii) Să se arate că ordinul unui grup *prietenos* nu e liber de pătrate.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.