5

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a V – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $x = 624 \cdot (57 - 45) + 12 + 653 \cdot 13 = 624 \cdot 12 + 12 + 625 \cdot 13 = 12 \cdot 625 + 625 \cdot 13 = 625 \cdot (12 + 13) = 625 \cdot 25$ **....1p**

$x = 25^3$ - este cub perfect **....1p**

$x = (5^2)^3 = (5^3)^2$ – este pătrat perfect **....1p**

b) $y = (2^{51} \cdot 2^{10} : 2^{60} + 3^{100} : 3^{99} \cdot 9)^{2024} : 29^{2023} + 1 + 1 - 28 = 29^{2024} : 29^{2023} + 2 - 28 = 29 + 2 - 28 = 3$ **....1p**

$x^{11} = [(5^3)^2]^{11} = 125^{22}$ **....1p**

$2^{51y+1} = 2^{154} = (2^7)^{22} = 128^{22}$ **....1p**

Deci $x < y$ **....1p**

Problema 2: soluție orientativă

$A = 5 \cdot \underbrace{111 \ldots 1}_{n\ cifre} \cdot 2020$ **....1p**

$= 10100 \cdot \underbrace{111 \ldots 1}_{n\ cifre}$ **....1p**

$= (10000 + 100) \cdot \underbrace{111 \ldots 1}_{n\ cifre}$ **....1p**

$= \underbrace{111 \ldots 1}_{n\ cifre}0000 + \underbrace{111 \ldots 1}_{n\ cifre}00$ **....1p**

$= 11\underbrace{222 \ldots 2}_{n-2\ cifre}1100$ **....1p**

$S(A) = 4 + 2(n - 2) = 2n$ **....1p**

$S(A) = 2024 \Leftrightarrow n = 1012$ **....1p**

Problema 3: soluție orientativă

Fie $x = \overline{x_1 x_2 \ldots x_m}$ și $y = \overline{y_1 y_2 \ldots y_n}$

x are m cifre, deci $10^{m-1} \leq x < 10^m$. Egalitatea nu are loc, deoarece x nu se poate scrie ca o putere a lui 10. Deci $10^{m-1} < x < 10^m$ **....2p**

Analog, $10^{m-1} < y < 10^m$ **....1p**

Înmulțind cele două relații, obținem $10^{m+n-2} < x \cdot y < 10^{m+n}$ **....1p**

Deci $10^{m+n-2} < 10^{2023} < 10^{m+n}$ **....1p**

De unde $m + n - 2 < 2023 < m + n$ **....1p**

Sau $m + n > 2023$ și $m + n < 2025$, deci $m + n = 2024$ **....1p**

Problema 4: soluție orientativă

a) Fiecare jucător joacă 15 meciuri **1p**
Cum într-un meci sunt doi jucători, avem **1p**
Numărul total de meciuri $16 \cdot 15 : 2 = 120$ **2p**
b) Cum în fiecare meci există un jucător eliminat rezultă că numărul de meciuri este egal cu numărul jucătorilor eliminați **2p**
Deci au fost 23 de jucători eliminați, plus câștigătorul turneului, rezultă $n = 24$ **1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

6

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VI – a

VI

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a)

$\frac{x}{x+2-x}=\frac{y}{y+4-y}$ 1p

$\frac{x}{2}=\frac{y}{4}$ 1p

$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ 1p

b)

$\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}=\frac{t}{8}$ 1p

$\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{36}=\frac{t^2}{64}=\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4+16+36+64}$ 1p

$\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{36}=\frac{t^2}{64}=25$ 1p

$x=10, y=20, z=30, t=40$ 1p

Problema 2: soluție orientativă

a)

$\left.\begin{array}{r} a|a\cdot b+b \\ a|a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow a|b$ 1p

$\left.\begin{array}{r} b|a\cdot b+a \\ b|a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow b|a$ 1p

$a|b$ și $b|a \Rightarrow a=b$ 1p

b)

$d=(x,y) \Rightarrow x=da, y=db, (a,b)=1$ 1p

$dab|d^{2022}\cdot a^{2023}+a+db^2$ 1p

$\left.\begin{array}{r} a|d^{2022}a^{2023} \\ a|a \end{array}\right\} \Rightarrow a|db^2, (a,b)=1 \Rightarrow a|d$ 1p

$\left.\begin{array}{r} d|d^{2022}a^{2023} \\ d|db^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d|a \quad \Rightarrow a=d \ \Rightarrow x=d^2$ 1p

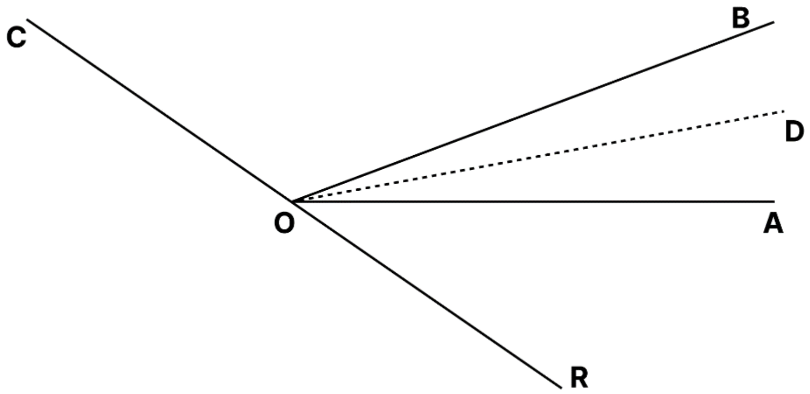
Problema 3: soluție orientativă

a)

$\sphericalangle AOB+\sphericalangle AOC=180^0$

$180^0 - \sphericalangle AOC = \frac{1}{2}(90^0 - \sphericalangle AOB)$ 1p
$360^0 - 2 \cdot \sphericalangle AOC = 90^0 - \sphericalangle AOB$
$270^0 = 2 \cdot \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOB$ 1p
Deoarece $\sphericalangle AOB = 180^0 - \sphericalangle AOC \Rightarrow\ 270^0 = 2 \cdot \sphericalangle AOC - 180^0 + \sphericalangle AOC$ 1p
$3 \cdot \sphericalangle AOC = 450^0$, deci $\sphericalangle AOC = 150^0$, iar $\sphericalangle AOB = 30^0$ 1p

b)



$[OD$ este bisectoarea unghiului AOB, rezultă $\sphericalangle DOB \equiv \sphericalangle AOD$,
$\sphericalangle DOB = \sphericalangle AOD = \frac{30^0}{2} = 15^0$ 1p
$\sphericalangle ROA = 180^0 - 150^0 = 30^0$ 1p
$\sphericalangle ROD = \sphericalangle ROA + \sphericalangle AOD = 30^0 + 15^0 = 45^0$ 1p

__**Problema 4: soluție orientativă**__

a)

Cum $\widehat{AM} \equiv \widehat{PQ} \equiv \widehat{BS} = 60^0 \Rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle POQ = \sphericalangle BOS = 60^0$
Cum unghiurile AON și POQ sunt complementare, obținem că $\sphericalangle AON + \sphericalangle POQ = 90^0$ și cum $\sphericalangle POQ \equiv \sphericalangle AOM \Rightarrow \sphericalangle AON + \sphericalangle AOM = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle MON = 90^0$ 1p
Cum $\sphericalangle AON + \sphericalangle POQ = 90^0$ și $\sphericalangle POQ \equiv \sphericalangle BOS \Rightarrow \sphericalangle AON + \sphericalangle BOS = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle NOS = 90^0$
....1p
Astfel obținem că $\sphericalangle MOS = 180^0$, deci punctele M, O, S sunt coliniare și cum $\sphericalangle MON = 90^0$, obținem că dreptele ON și MS sunt perpendiculare. 1p

b)

Avem $\sphericalangle MOP + \sphericalangle POQ + \sphericalangle BOQ + \sphericalangle BOS = 180^0 \Leftrightarrow 6\sphericalangle BOQ + 120^0 = 180^0$, de unde $\sphericalangle BOQ = 10^0$ și cum $\sphericalangle BOQ \equiv \sphericalangle SOT \Rightarrow \sphericalangle SOT = 10^0 \Rightarrow \sphericalangle POM = 50^0$ 1p
Avem $\sphericalangle POT = \sphericalangle POQ + \sphericalangle BOQ + \sphericalangle BOS + \sphericalangle SOT = 140^0$ 1p
și, de asemenea, $\sphericalangle PON = \sphericalangle POM + \sphericalangle MON = 140^0$, astfel obținem că
$\sphericalangle POT \equiv \sphericalangle PON \Rightarrow \widehat{PT} = \widehat{PN}$ 1p
Fie L situat pe arcul mic TN, astfel încât punctele P, O, L sunt coliniare, obținem că PL diametru, de unde $\widehat{PL} = 180^0$
Cum $180^0 = \widehat{PN} + \widehat{NL}, 180^0 = \widehat{PT} + \widehat{TL}$ și cum $\widehat{PT} \equiv \widehat{PN} \Rightarrow \widehat{NL} \equiv \widehat{TL} \Rightarrow L$ este mijlocul arcului mic TN. 1p

__**Notă:**__ Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

7

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală, 10 februarie 2024

Clasa a VII – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $S=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2023}}$

$S=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2023}}-\frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2023}}$......**1p**

$S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}++\cdots+\frac{1}{\sqrt{2023}}-\frac{1}{\sqrt{2024}}$......**1p**

$S=1-\frac{1}{\sqrt{2024}}$......**1p**

b) $T=\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a^2+1}}+\frac{\sqrt{a^2+2}-\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{a^2+2}}+\frac{\sqrt{a^2+3}-\sqrt{a^2+2}}{\sqrt{a^2+2}\cdot\sqrt{a^2+3}}+\cdots+\frac{\sqrt{b^2}-\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{b^2-1}\cdot\sqrt{b^2}}$......**1p**

$T=\frac{1}{\sqrt{a^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{b^2}}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\in Q$......**1p**

Astfel avem:

$$\left.\begin{array}{l}(1^2,2^2),(1^2,3^2),\ldots,(1^2,44^2)\\(2^2,3^2),(2^2,4^2),\ldots,(2^2,44^2)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(42^2,43^2),(42^2,44^2)\\(43^2,44^2)\end{array}\right\}\Rightarrow 1+2+3+\ldots+43=\frac{43\cdot 44}{2}=946 \text{ perechi de forma}$$

(a^2,b^2), unde $1\le a<b\le 44$, pentru care numărul T este rațional......**2p**

În concluzie există cel puțin 946 submulțimi ale mulțimii A, pentru care suma elementelor acestora să fie un număr rațional.

Soluție alternativă b)

Din $\left.\begin{array}{l} S_1^1=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\in Q \\ S_1^2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\in Q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_1^{43}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{1936}-\sqrt{1935}}{\sqrt{1935}\cdot\sqrt{1936}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{44}\in Q \end{array}\right\}\Rightarrow 43$ submulțimi......................**1p**

Din $\left.\begin{array}{l} S_2^1=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\in Q \\ S_2^2=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}+\ldots+\frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{16}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\in Q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_2^{42}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1936}-\sqrt{1935}}{\sqrt{1935}\cdot\sqrt{1936}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{44}\in Q \end{array}\right\}\Rightarrow 42$ submulțimi **1p**

Din $S_{43}^1=\frac{\sqrt{1850}-\sqrt{1849}}{\sqrt{1849}\cdot\sqrt{1850}}+\frac{\sqrt{1851}-\sqrt{1850}}{\sqrt{1850}\cdot\sqrt{1851}}+\ldots+\frac{\sqrt{1936}-\sqrt{1935}}{\sqrt{1935}\cdot\sqrt{1936}}=\frac{1}{43}-\frac{1}{44}\in Q\Rightarrow 1$ submulțime. **1p**

În total avem cel puțin $1+2+3+\ldots+43=\frac{43\cdot 44}{2}=946$ submulțimi ale mulțimii A, pentru care suma elementelor acestora să fie un număr rațional..
1p

<u>**Problema 2: soluție orientativă**</u>

$xyz=1\Rightarrow\frac{1}{z}=xy$...**2p**

$\begin{cases} x+\frac{1}{y}=2 \\ y+xy=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy-2y=-1 \\ xy+y=3 \end{cases}\Rightarrow 3y=4\Rightarrow y=\frac{4}{3}, x=\frac{5}{4}, z=\frac{3}{5}$..**5p**

<u>**Problema 3: soluție orientativă**</u>

a) $\left.\begin{array}{l} O\ mijlocul\ BD \\ O\ mijlocul\ CE \\ BD, CE\ diagonalele\ BCDE \end{array}\right\}\Rightarrow BCDE\ paralelogram$ **2p**

b) Presupunem că patrulaterul ABCD are cel puţin două unghiuri drepte (trei nu pot fi).

Avem următoarele situaţii:

I. Unghiul B = C = 90^0 ⇒ AB ‖ DC, dar EB ‖ DC (din punctul anterior), deci imposibil..................**1p**

II. Unghiul D = C = 90^0 ⇒ AD ‖ BC, dar ED ‖ BC, deci imposibil. **1p**

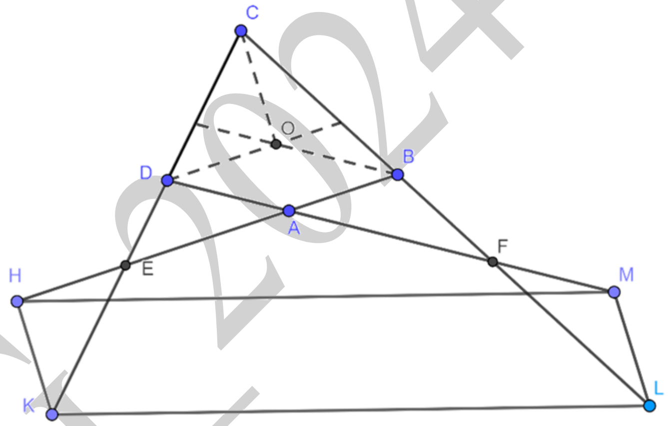
III. Unghiul B = D = 90^0...**1p**

În triunghiul BAC dreptunghic, $BE = \frac{AC}{2}\ (CE = AE)$, iar în triunghiul DAC, $DE = \frac{AC}{2}\ (CE = AE)$ **1p**

Obţinem astfel că BEDC este romb, şi că ΔDCE şi ΔBCE sunt echilaterale ⇒ unghiul BCD are 120^0 deci BAD are 60^0 . Obţinem şi în acest caz contradicţie, deci patrulaterul nu poate avea decât maxim un unghi drept. **1p**

<u>Problema 4: soluție orientativă</u>

Realizare desen. **1p**



$Fie\ DO \parallel AB\ și\ BO \parallel AD \Rightarrow ABOD\ paralelogram \Rightarrow AB = DO \Rightarrow DO = EH$ **1p**

$DO \parallel AB, CD\ secantă. \sphericalangle CDO = \sphericalangle CEB\ (unghiuri\ corespondente).$ **1p**

$$\sphericalangle CEB = \sphericalangle HEK\ (unghiuri\ opuse\ la\ vârf). \left.\begin{matrix} EH \equiv DO \\ \sphericalangle HEK \equiv \sphericalangle CDO \\ KE \equiv CD \end{matrix}\right\} \overset{LUL}{\Longrightarrow} \Delta EHK \equiv \Delta DOC$$

$$\Rightarrow \begin{cases} HK \equiv CO \\ \sphericalangle HKE \equiv \sphericalangle DCO \end{cases}$$ **1p**

$Fie\ dreptele\ HK\ ŞI\ CO, CK\ secantă, \sphericalangle HKE \equiv \sphericalangle DCO (unghiuri\ alterne\ interne) \Rightarrow HK \parallel CO.$

.... **1p**

Se demonstrează analog şi pentru $\Delta FLM \equiv \Delta BOC$. **1p**

$$\left.\begin{matrix} CO = HK \\ CO \parallel HK \\ CO = LM \\ CO \parallel LM \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} HK = LM \\ HK \parallel LM \end{cases} \Longrightarrow KHLM\ paralelogram$$ **1p**

<u>Notă:</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

8

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VIII – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

Din $\left.\begin{array}{l} AD \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp AB$ **1p**

Din $\left.\begin{array}{l} AB \perp AD \\ AB \perp AC \\ AD, AC \subset (DAC) \\ AD \cap AC = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (DAC)$ și cum $CD \subset (DAC) \Rightarrow AB \perp CD$ **1p**

Din $\left.\begin{array}{l} AD \perp (ABC) \\ CE \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AD \parallel CE \\ AD > CE \\ \sphericalangle DAC = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow ADEC$ trapez dreptunghic **1p**

Cu teorema lui Pitagora obținem că $AE = 2\sqrt{10}\ cm, CD = 2\sqrt{15}\ cm$ **1p**

Fie $\{O\} = AE \cap DC$, atunci $\triangle OCE \sim \triangle ODA \Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OC = \frac{4\sqrt{15}}{5}\ cm,$

$OE = \frac{4\sqrt{10}}{5}\ cm$ **1p**

Aplicând reciproca teoremei lui Pitagora, se obține că $\sphericalangle EOC = 90^0 \Rightarrow AE \perp CD$ **1p**

Din $\left.\begin{array}{l} CD \perp AE \\ CD \perp AB \\ AE, AB \subset (BAE) \\ AB \cap AE = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (BAE).$ **1p**

Problema 2: soluție orientativă

a) Avem $\frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \Leftrightarrow 2xy \le \sqrt{xy}(x+y) \Leftrightarrow$ **1p**

$4xy \le (x+y)^2 \Leftrightarrow$ **1p**

$0 \le (x-y)^2$. **1p**

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ **1p**

Avem $\frac{2a}{\sqrt{bc}}+\frac{2b}{\sqrt{ac}}+\frac{2c}{\sqrt{ab}} \le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (de arătat) **1p**

Cu inegalitatea $m_h \le m_g$ avem: $\frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{bc} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{bc}} \le \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{bc}} \le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

și analoagele **1p**

Adunând aceste ultime relații se obține concluzia. **1p**

Soluție alternativă b)

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ **1p**

Avem $\frac{2a}{\sqrt{bc}}+\frac{2b}{\sqrt{ac}}+\frac{2c}{\sqrt{ab}}\le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$(de arătat) **1p**

Cu inegalitatea $m_g \le m_a$ avem: $\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\le\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{bc}}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow\frac{2a}{\sqrt{bc}}\le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

și analoagele **1p**

Adunând aceste ultime relații se obține concluzia. **1p**

<u>Problema 3: soluție orientativă</u>

Presupunem că există o pereche $(m,n)\in A\cap B\Rightarrow(m-10)^2+(n+11)^2\le 221$

$(m+14)^2+(n-5)^2\le 221$ cu $(m,n)\in Z\times Z$ **2p**

Obținem că $(m-10)^2<225$ și $(m+14)^2<225\Rightarrow m\in\{-4,-3,-2,-1,0\}$. **1p**

Pentru $m=-4\Rightarrow(n+11)^2\le 25$ și

$(n-5)^2\le 121\Rightarrow n\in[-16,-6]\cap[-6,16]=\{-6\}\Rightarrow(m,n)=(-4,-6)$. **1p**

Pentru $m=-3\Rightarrow(n+11)^2\le 52$ și $(n-5)^2\le 100\Rightarrow n\in\left[-5,\sqrt{52}-11\right]\Rightarrow n\in\{-5,-4\}\Rightarrow$

$(m,n)=(-3,-5),(-3,-4)$ **1p**

Pentru $m=-2\Rightarrow(n+11)^2\le 77$ și $(n-5)^2\le 77\Rightarrow n\in\left[-\sqrt{77}+5,\sqrt{77}-11\right]\Rightarrow n\in\{-3\}$

$\Rightarrow(m,n)=(-2,-3)$. **1p**

Pentru $m=-1\Rightarrow(n+11)^2\le 100$ și $(n-5)^2\le 52\Rightarrow n\in\left[-\sqrt{52}+5,-1\right]\Rightarrow n\in\{-2,-1\}\Rightarrow$

$(m,n)=(-1,-2),(-1,-1)$.

Pentru $m=0\Rightarrow(n+11)^2\le 121$ și $(n-5)^2\le 25\Rightarrow n\in\{0\}\Rightarrow(m,n)=(0,0)$.

Prin calcul direct, se arată că toate perechile găsite verifică ipoteza, de unde se obține :

$A\cap B=\{(-4,-6),(-3,-5),(-3,-4),(-2,-3),(-1,-2),(-1,-1),(0,0)\}$ **1p**

<u>Problema 4: soluție orientativă</u>

Fie $\{E\}=MO\cap CD$ și $\{F\}=NO\cap AD$.

Din $\left.\begin{matrix}MP\perp(VCD)\\ CD\subset(VCD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow MP\perp CD,\left.\begin{matrix}VO\perp(ABC)\\ CD\subset(ABC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow VO\perp CD\Rightarrow CD\perp(VMO)$ și cum

$ME\subset(VMO)\Rightarrow ME\perp CD$, dar $AB\parallel CD\Rightarrow ME\perp AB\Rightarrow\sphericalangle OMB=90^0$. Analog se arată că $\sphericalangle ONB=90^0$ **2p**

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Avem $\triangle OAM \equiv \triangle OCE (U.L.U) \Rightarrow OM \equiv OE$, analog $ON \equiv OF$ **1p**
În triunghiul VME, VO înălțime și mediană, deci $\triangle VME$ isoscel de bază ME, de unde VO bisectoare, astfel $\sphericalangle OVM \equiv \sphericalangle OVE$, analog $\sphericalangle OVN \equiv \sphericalangle OVF$
Fie $\{X\} = MP \cap VE \Rightarrow MP \perp VE$. Atunci $\sphericalangle VPX \equiv \sphericalangle OPM (op.vf)$, $\sphericalangle VXP \equiv \sphericalangle MOP \Rightarrow \sphericalangle PVX \equiv \sphericalangle PMO$ și cum $\sphericalangle PVX \equiv \sphericalangle OVM \Rightarrow \sphericalangle PMO \equiv \sphericalangle OVM$, analog $\sphericalangle PNO \equiv \sphericalangle OVN$ **1p**
Avem $\triangle MOP \sim \triangle VOM \Rightarrow \frac{MO}{VO} = \frac{MP}{VM} = \frac{OP}{OM} \Rightarrow OM^2 = VO \cdot OP$, analog $ON^2 = VO \cdot OP \Rightarrow OM \equiv ON$ **1p**
Avem $\triangle OMB \equiv \triangle ONB (C.C) \Rightarrow \sphericalangle OBM \equiv \sphericalangle OBN \Rightarrow BD$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$ **1p**
Din $ABCD$ paralelogram, BD diagonală și bisectoare $\Rightarrow ABCD$ romb. **1p**

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

9

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a IX – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

$M \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AB}$ coliniari $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = x * \overrightarrow{AB}, x \in \mathbb{R}$

$N \in (AC) \Rightarrow \overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{AC}$ coliniari $\Rightarrow \overrightarrow{AN} = y * \overrightarrow{AC}, y \in \mathbb{R}$ **1p**

$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} = -y * \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = (1-y) * \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = -x * \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = (1-x) * \overrightarrow{AB}$ **1p**

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} = (1-x)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = (1-x)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (1-x)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = (1 - x - \frac{1}{2}) * \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MD} = \frac{1-2x}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **1p**

$\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} = (1-y)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = (1-y)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = (1 - y - \frac{1}{2}) * \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{MD} = \frac{1-2y}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **1p**

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = (1-x)\overrightarrow{AB} + \frac{1-2x}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (\frac{3}{2} - 2x)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **1p**

$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = (1-y)\overrightarrow{AC} + \frac{1-2y}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (\frac{3}{2} - 2y)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **1p**

$\boldsymbol{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}}$ ***și*** $\boldsymbol{\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}}$ ***sunt coliniari*** $\Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2}-2x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-2y} \Rightarrow (\frac{3}{2} - 2x)(\frac{3}{2} - 2y) = \frac{1}{4}$ **1p**

$\Rightarrow (3 - 4x)(3 - 4y) = 1$

Problema 2: soluție orientativă

$x = card(A \cap B)$
$\Rightarrow x \leq y < 2^y$ **1p**
$y = card(A \cup B)$

Dacă $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} = \frac{19}{24}$ nu are soluție

Dacă $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} = \frac{19}{24} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} = \frac{7}{24}$

$y = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{24} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < \frac{7}{24}$

$y = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24} > \frac{7}{24}$

Pentru $y > 3 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} < \frac{1}{3} + \frac{1}{8} < \frac{11}{24}$

$2^y > 2^3 \Rightarrow \frac{1}{2^y} < \frac{1}{8}$ **2p**

Dacă $x = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} = \frac{19}{24} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} = \frac{19}{24} - \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$

Pentru $y = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24} \Rightarrow y < 3\ convine\ pentru\ x = 3$

Pentry $y > 3 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} < \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$

$2^y > 2^3 \Rightarrow \frac{1}{2^y} < \frac{1}{8}$

Pentru $y > 3$ ecuația nu are soluții. Analog pt $y < 3$ ecuația nu are soluții.

1p

Dacă $x = 4 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} = \frac{19}{24} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} = \frac{19}{24} - \frac{1}{4} = \frac{13}{24}$

$y = 4 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} < \frac{13}{24}$; Înlocuind $y < 4$ nu se verifică.

$y \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{32} = \frac{37}{160} < \frac{13}{24}$

$2^y > 2^5 \Rightarrow \frac{1}{2^y} \leq \frac{1}{2^5}$ **1p**

Dacă $x \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$

$4 \leq x \leq y \Rightarrow 4 \leq y \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$

$2^4 \leq 2^y$

$$\frac{1}{2^4} \geq \frac{1}{2^y} \Leftrightarrow \frac{1}{2^y} \leq \frac{1}{2^4}$$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$ $\quad \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2^y} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^4} = \frac{9}{16} < \frac{19}{24}$

$\frac{1}{2^y} \leq \frac{1}{2^4}$ **1p**

Soluția convenabila $x = 3$ și $y = 3 \Rightarrow card\ (A \cup B) = card\ (A \cap B) \Rightarrow card(A) = card(B)$. **1p**

Problema 3: soluție orientativă

$$\left\{\frac{4x+3}{3x-2}\right\}=\frac{4x+3}{3x-2}-\left[\frac{4x+3}{3x-2}\right]=\frac{2x-2}{3x-2}$$

1p

$\left[\frac{4x+3}{3x-2}\right]=\frac{4x+3}{3x-2}-\frac{2x-2}{3x-2}=\frac{2x+5}{3x-2}$

1p

$$\frac{2x+5}{3x-2}=k, k\in\mathbb{Z};$$

$$2x+5=k\cdot(3x-2)\Rightarrow 2x+5-3kx+2k=0\Rightarrow x(2-3k)\;+5+2k=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow x=\frac{2k+5}{3k-2}$

1p

$$\left[\frac{4\frac{2k+5}{3k-2}+3}{3\frac{2k+5}{3k-2}-2}\right]=k\Rightarrow\left[\frac{\frac{8k+20+9k-6}{3k-2}}{\frac{6k+15-6k+4}{3k-2}}\right]=k\Rightarrow\left[\frac{\frac{17k+14}{3k-2}}{\frac{19}{3k-2}}\right]=k\Rightarrow\left[\frac{17k+14}{19}\right]=k\Rightarrow$$

1p

$$\Rightarrow k\le\frac{17k+14}{19}<k+1$$

1p

$$19k\le 17k+14\Rightarrow 2k\le 14\Rightarrow k\le 7$$

$$\Rightarrow k\in(\tfrac{-5}{2},7]$$

$$17k+14<19k+19\Rightarrow -2k+5\Rightarrow k>\frac{-5}{2}$$

1p

$$k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$x\in\left\{\frac{-1}{8},\frac{-3}{5},\frac{-5}{2},7,\frac{9}{4},\frac{11}{7}\frac{13}{10},\frac{15}{13},\frac{17}{16},1\right\}$$

1p

Problema 4: soluție orientativă

$\frac{bc}{b+c}=\frac{2abc}{2a(b+c)}, \frac{ab}{a+b}=\frac{2abc}{2c(a+b)}, \frac{ac}{a+c}=\frac{2abc}{2b(a+c)}$

1p

Aplicăm inegalitatea mediilor pentru $2a$ șii $b+c$ și obținem:

$\frac{bc}{b+c}=\frac{2abc}{2a(b+c)}\geq\frac{2abc}{\left(\frac{2a+b+c}{2}\right)^2}=\frac{8abc}{(2a+b+c)^2}$ **1p**

Scriem omoloagele:

$\frac{ab}{a+b}=\frac{2abc}{2c(a+b)}\geq\frac{2abc}{\left(\frac{2c+b+a}{2}\right)^2}=\frac{8abc}{(a+b+2c)^2}$

$\frac{ac}{a+c}=\frac{2abc}{2b(a+c)}\geq\frac{2abc}{\left(\frac{2b+a+c}{2}\right)^2}=\frac{8abc}{(a+2b+c)^2}$

Insumăm inegalitățile și obținem:

$\frac{bc}{b+c}+\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}\geq 8abc\left(\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\right)$ **1p**

Aplicăm inegalitatea:

$3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$

pentru $x=\frac{1}{2a+b+c}, y=\frac{1}{a+b+2c}, z=\frac{1}{a+2b+c}$ **1p**

$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}+\frac{ab}{a+b}\geq 8abc\left(\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\right)$$

$\geq 8abc\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right)^2$ **1p**

Aplicăm inegalitatea *Titu Andreescu* pentru:

$$a_1=1, a_2=1, a_3=1$$
$$x_1=2a+b+c$$
$$x_2=a+2b+c$$
$$x_3=a+b+2c$$

1p

Și obținem:

$$8abc\,\frac{1}{3}\left(\frac{1^2}{2a+b+c}+\frac{1^2}{a+2b+c}+\frac{1^2}{a+b+2c}\right)^2\geq 8abc\,\frac{1}{3}\left[\frac{(1+1+1)^2}{4(a+b+c)}\right]^2=$$

$$=8abc\,\frac{1}{3}\left(\frac{3^2}{4(a+b+c)}\right)^2=8abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{81}{16}=\frac{27abc}{2}$$

1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător

10

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a X – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ **....1p**

$\left|z + \frac{1}{a}\right|^2 - \left|\bar{z} - \frac{1}{a}\right|^2 = \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + y^2 - \left(x - \frac{1}{a}\right)^2 - y^2 = \frac{4x}{a}$ **....1p**

$\frac{a}{4}\left(\left|z + \frac{1}{a}\right|^2 - \left|\bar{z} - \frac{1}{a}\right|^2\right) = x = Re\, z$ **....1p**

b) $2(6 + 9i)^n - 3(1 + 8i)^n = 3(7 + 4i)^n$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1}(2 + 3i)^n = (1 + 8i)^n + (7 + 4i)^n$ **....1p**

$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} = \left(\frac{1+8i}{2+3i}\right)^n + \left(\frac{7+4i}{2+3i}\right)^n$ **....2p**

$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} = \left(\frac{26+13i}{13}\right)^n + \left(\frac{26-13i}{13}\right)^n$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} = (2 + i)^n + (2 - i)^n$ **....1p**

Problema 2: soluție orientativă

a) $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}{n} = \frac{a_1+a_n}{2}$ **....1p**

$\frac{a_1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_1 a_n}$ **din inegalitatea mediilor**

$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **....1p**

b) Funcția $\lg x\,, x \in (0, \infty)$ **este concavă.** **....1p**

Din inegalitatea lui Jensen $\Rightarrow \lg \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \geq \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \cdots + \lg b_n}{n}$ (1) **....2p**

$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, \forall k \geq 2 \Rightarrow \lg b_k = \lg b_1 + (k-1)\lg q\,, \forall k \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lg b_n)_{n\geq 1}$ **este progresie aritmetică cu rația** $\lg q$. **....1p**

În (1) **putem aplica punctul (a)**

$$\lg \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \geq \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \cdots + \lg b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \lg b_n}\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$$ **....1p**

Problema 3: soluție orientativă

a) **Se arată că funcția** $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ **este strict descrescătoare pe** $(-\infty, 0]$ **....1p**

Funcţia f este strict descrescătoare întrucât este compunerea a două funcţii de monotonii diferite. **....1p**

b) **f strict descrescătoare, deci injectivă** **....1p**

Se arată că f este surjectivă şi se determină $f^{-1}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, 0],\ f^{-1}(x) = \frac{1+\sin x}{\sin x - 1}$ **....1p**

c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\arcsin\frac{1+x}{x-1} \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \forall x \in (-\infty, -1)$ **....1p**

$x - 1 < x \Rightarrow f(x-1) > f(x)$

$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x+1}\right) > f\left(\frac{1}{x}\right)$

Adunând termen cu termen rezultă $f(x-1) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) > 0$ **....1p**

Cum $f^{-1}: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, -1) \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

$\Rightarrow f(x-1) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) > f^{-1}(x), \forall x \in (-\infty, -1)$ **....1p**

Problema 4: soluție orientativă

Fie punctele $A_1(z_1),\ A_2(z_2), A_3(z_3)$. **Triunghiul** $A_1A_2A_3$ **este înscris într-un cerc de rază r.** **....1p**

Fie $A(z),\ z = az_2 + (1-a)z_3 \Rightarrow A \in A_2A_3$. **....1p**

Fie B **piciorul perpendicularei dusă din** A_1 **pe** A_2A_3.

$A_1A \geq A_1B \Rightarrow \min_{a\in\mathbb{R}}|z - z_1| = \min_{a\in\mathbb{R}}|az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = A_1B = h$, **unde h este înălțimea dusă din** A_1 **în** $\Delta A_1A_2A_3$. **....1p**

$S = \frac{1}{2}|z_2 - z_3| \cdot h = \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \cdot \sin \measuredangle A_2A_1A_3$, **unde S este suprafaţa** $\Delta A_1A_2A_3$. **....1p**

$\Rightarrow h = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \cdot \sin \measuredangle A_2A_1A_3}{|z_2 - z_3|}$ **....1p**

Aplicând teorema sinusurilor rezultă:

$\frac{|z_2 - z_3|}{\sin \measuredangle A_2A_1A_3} = 2r \Rightarrow \sin \measuredangle A_2A_1A_3 = \frac{|z_2 - z_3|}{2r}$ **....1p**

$\Rightarrow h = \frac{1}{2r}|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|$

$\Rightarrow \min_{a\in\mathbb{R}}|az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \frac{1}{2r}|z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3|$ **....1p**

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

11

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XI – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
a) $X^{2023}=X^{2022}\Rightarrow \det\left(X^{2023}\right)=\det\left(X^{2022}\right)\Rightarrow\left(\det X\right)^{2023}=\left(\det X\right)^{2022}\Rightarrow\left(\det X\right)^{2022}\left(\det X-1\right)=0$ Deci $\det X\in\{0,1\}$.	1p
Caz 1: Dacă $\det X=1\neq 0$, atunci X e matrice inversabilă și egalitatea $X^{2023}=X^{2022}$ duce la $X^{2023}\cdot X^{-2020}=X^{2022}\cdot X^{-2020}$, adică $X^3=X^2$.	1p
Caz 2 : Dacă $\det X=0$, din identitatea Hamilton - Cayley obținem $X^2-(trX)\cdot X=O_2$, deci $X^2=(trX)\cdot X\ (*)$. Atunci $X^3=(trX)^2\cdot X$ și, inductiv, $X^{2022}=(trX)^{2021}\cdot X$, respectiv $X^{2023}=(trX)^{2022}\cdot X$. Din $X^{2023}=X^{2022}$ deducem $(trX)^{2022}\cdot X=(trX)^{2021}\cdot X\Leftrightarrow(trX)^{2021}(trX-1)\cdot X=O_2$, de unde $X=O_2$, sau $trX=0$, sau $trX=1$. i) Dacă $X=O_2$, evident $X^3=X^2$. ii1) Dacă $X\neq O_2$ și $trX=0$, din $(*)$ obținem $X^2=O_2$ și apoi $X^3=X^2\cdot X=O_2\cdot X=O_2$, deci $X^3=X^2$. ii2) Dacă $X\neq O_2$ și $trX=1$, din $(*)$ obținem $X^2=X$ și apoi, $X^3=X^2$.	2p
b) Formularea predicatului unar $P(n)$: „$A^n=\begin{pmatrix}\frac{1+\cos^n 2\alpha}{2} & \frac{1-\cos^n 2\alpha}{2} & 0 & 0\\ \frac{1-\cos^n 2\alpha}{2} & \frac{1+\cos^n 2\alpha}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(n\beta) & \sin(n\beta)\\ 0 & 0 & -\sin(n\beta) & \cos(n\beta)\end{pmatrix}$”, $n\in\mathbb{N}^*$.	1p
Etapa de verificare	1p
Etapa de demonstrație propriu-zisă și finalizare	1p

Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
Din teorema Hamilton- Cayley $\Rightarrow A^2=(trA)\cdot A$ și $B^2=(trB)\cdot B$ $(*)$, de unde $A^2B^2=(trA)(trB)\cdot AB$ și cum $A^2B^2=(AA)(BB)=A(AB)B=A(BA)B=(AB)(AB)=(AB)^2$, deducem $(AB)^2=(trA)(trB)\cdot(AB)$ (1).	2p
$det(AB)=(det\,A)(detB)=0$, deci conform teoremei Hamilton- Cayley, $(AB)^2=(tr(AB))\cdot(AB)$. (2)	1p
Din (1) și (2) $(trA)(trB)\cdot(AB)=(tr(AB))\cdot(AB)$ și, cum $AB\neq O_2$, obținem $(trA)(trB)=tr(AB)$. $(**)$	1p
$(aA+bB)^2=(aA+bB)(aA+bB)\overset{AB=BA}{=}a^2A^2+2abAB+b^2B^2\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}(aA+bB)^2=a^2(trA)A+2abAB+b^2(trB)B$.(3)	1p
Din teorema Hamilton- Cayley, $(aA+bB)^2=tr(aA+bB)\cdot(aA+bB)-det(aA+bB)I_2=$ $=[a(trA)+b(trB)](aA+bB)-\det(aA+bB)\,I_2$ $=a^2(trA)\cdot A+ab(trA)\cdot B+ab(trB)\cdot A+b^2(trB)\cdot B-$ $-det(aA+bB)\cdot I_2$. (4)	1p
$(3)\Rightarrow tr\left((aA+bB)^2\right)=a^2(trA)^2+2ab\cdot tr(AB)+b^2\cdot(trB)^2$ $(4)\Rightarrow tr\left((aA+bB)^2\right)=a^2(trA)^2+2ab\cdot tr(A)tr(B)+b^2\cdot(trB)^2-2det(aA+bB)$, de unde $\overset{(**)}{\Rightarrow}det(aA+bB)=0$.	1p

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\sqrt{3}$ și putem considera predicatul unar $P(n)$: „$n-2<x_n<n$”, $n\in\mathbb{N}^*$. I. Etapa de verificare $P(1)$: „$-1<x_1=0<1$”, adevărată. $P(2)$: „$0<x_2=1<2$”, adevărată. II. Etapa de demonstrație propriu-zisă: Presupunem P(k) adevărată, unde P(k): „$k-2<x_k<k$” și arătăm că P(k+1) adevărată, unde P(k+1): „$k-1<x_{k+1}<k+1$”. Din P(k): $k-2<x_k<k\,\|\cdot k>0\Rightarrow k(k-2)<kx_k<k^2\,\|+1\Rightarrow(k-1)^2<1+kx_k<k^2+1<(k+1)^2$, de unde $k-1<\sqrt{1+kx_k}<k+1\Leftrightarrow k-1<x_{k+1}<k+1$, deci P(k+1) adevărată. Conform primului principiu al inducției matematice rezultă $P(n)$ adevărată, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.	2p

<table>
<tr><td>Astfel, cu ajutorul lemei cleștelui și din $n-2<x_n<n$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, iar din
$\frac{n-2}{n}<\frac{x_n}{n}<1$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right)^n \overset{„1^\infty”}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_n-n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n-n}}\right]^{\frac{x_n-n}{n}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, unde $y_n=x_n-n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.$(*)$
Din $n-2<x_n<n\,|-n \Rightarrow -2<x_n-n<0 \Rightarrow y_n\in(-2,0)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. (1)
$y_{n+1}-y_n = x_{n+1}-n-1-x_n+n = x_{n+1}-x_n-1=(x_{n+1}-1)-x_n = \frac{x_{n+1}^2-1}{x_{n+1}+1}-x_n \overset{x_{n+1}^2=1+nx_n}{=} \frac{nx_n}{x_{n+1}+1}-x_n =$
$= x_n\left(\frac{n}{x_{n+1}+1}-1\right)=\frac{x_n(n-x_{n+1}-1)}{x_{n+1}+1}<0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (deoarece $n-1<x_{n+1}$), deci $(y_n)_{n\ge1}$ strict descrescător (2).
Din (1) și (2) $\overset{\text{Weierstrass}}{\Longrightarrow}$ $(y_n)_{n\ge1}$ convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \overset{\text{not}}{=} y\in[-2,0]$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$y=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-(n+1))=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+nx_n}-(n+1)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+nx_n-(n+1)^2}{\sqrt{1+nx_n}+n+1}\overset{x_n=y_n+n}{=}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ny_n+n^2-n^2-2n}{\sqrt{1+ny_n+n^2}+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ny_n-2n}{\sqrt{1+ny_n+n^2}+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(y_n-2)}{n\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}y_n+1}+1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{y-2}{2}$.
Deci $y=\frac{y-2}{2}\Rightarrow y=-2.$ $(**)$
Din $(*)$ și $(**)$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right)^n \overset{„1^\infty”}{=} e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.</td><td>2p</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th><u>Problema 4: soluție orientativă</u></th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>a) Cum funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_2 x$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, aplicând g peste inegalitatea din ipoteză obținem $f(x)\le \log_2 x< f(x)+1$, $\forall x>1$ și cum $f(x)\in\mathbb{N}$, deducem că $f(x)=[\log_2 x]$, $\forall x>1$.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Astfel, $f(x)=n$, dacă $n\le\log_2 x<n+1$, pentru $\forall n\in\mathbb{N}$ și , încă, $f(x)=n$, $\forall x\in\left[2^n,2^{n+1}\right)$,$\forall n\in\mathbb{N}$.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Pentru $\alpha\in\left(2^n,2^{n+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=n, \forall n\in\mathbb{N}$.$(*)$
Pentru $\alpha=2^n$, $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} f(x)=n$, $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} f(x)=n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $(**)$
Pentru $\alpha=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}} f(x)=0$ (n=0) . $(***)$</td><td rowspan="2">1p</td></tr>
<tr><td>Din $(*)$, $(**)$ și $(***)$ rezultă că $\{\alpha\in(1,+\infty)\,|\,f \text{ nu are limită în } \alpha\}=\{2^n\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$.</td></tr>
</table>

b) Demonstrăm prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, *P(n)*: „$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k$” $(*)$. I. *Verificare* Pentru $n=1$, $P(1)$ este, evident, adevărată. Pentru $n=2$, avem : $x_3 \geq 4x_2 - x_1 = 3x_2 + x_2 - x_1 \overset{x_2 > x_1}{>} 3x_2 = 2x_2 + x_2 \overset{x_2 > x_1}{>} 2x_2 + x_1 = \sum_{k=1}^{2} kx_k$, deci $P(2)$ adevărată. II. *Demonstrația propriu-zisă* Presupunem $P(p)$ adevărată, unde $P(p)$: $x_{p+1} > \sum_{k=1}^{p} kx_k$ și arătăm că $P(p+1)$ adevărată, unde $P(p+1)$: $x_{p+2} > \sum_{k=1}^{p+1} kx_k$. $x_{p+2} \geq (p+3)x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} kx_k = (p+1)x_{p+1} + 2x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} kx_k > (p+1)x_{p+1} + 2\sum_{k=1}^{p} kx_k - \sum_{k=1}^{p} kx_k =$ $= (p+1)x_{p+1} + \sum_{k=1}^{p} kx_k = \sum_{k=1}^{p+1} kx_k$. Cum $P(p)$ adevărată, atunci $P(p+1)$ adevărată și, conform primului principiu al inducției matematice, *P(n)* adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	2p
Demonstrăm prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, *Q(n)*: „$x_n \geq (n-1)!x_1$” $(**)$. I. *Verificare* Pentru $n=1$, $Q(1)$ este, evident, adevărată. Pentru $n=2$, avem $Q(2)$: $x_2 \geq (2-1)!x_1 \Leftrightarrow x_2 \geq x_1$, care este adevărată din ipoteză. II. *Demonstrația propriu-zisă* Presupunem $Q(p)$ adevărată, unde $Q(p)$: $x_p \geq (p-1)!x_1$ și arătăm că $Q(p+1)$ adevărată, unde $Q(p+1)$: $x_{p+1} \geq p!x_1$. $(*) \Rightarrow x_{p+1} > \sum_{k=1}^{p} kx_k \geq px_p \geq p(p-1)!x_1 = p!x_1$. Cum $Q(p)$ adevărată, atunci $Q(p+1)$ adevărată și, conform primului principiu al inducției matematice, *Q(n)* adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	1p
Cum șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică $(**)$, iar $\lim_{n\to\infty}(n-1)!x_1 = +\infty$, obținem $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.	1p

__**Notă:**__ Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

12

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XII – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

i) Legea „*“ admite element neutru dacă și numai dacă $\exists\, e \in R$ astfel încât $x * e = e * x = x$, $\forall x \in R$ **1p**

Se obține $x(ae-2) = e-6,\ \forall x \in R$ **1p**

Pentru $x = 0$, se obține $e = 6$ **1p**

și apoi $a = \frac{1}{3}$ **1p**

ii) Este necesar $axy - x - y + 6 \in [0, 6],\ \forall x, y \in R$. **1p**

Pentru $x = y = 6$ se obține $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$ **1p**

și orice $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$ satisface cerința. **1p**

Problema 2: soluție orientativă

i) Este necesar și suficient ca F să fie derivabilă. **1p**

Din continuitate rezultă $a + b = 1$. **1p**

Din derivabilitate rezultă $a = 0$ **1p**

și apoi $b = 1$. **1p**

ii) $\int_1^e \frac{1}{xF(x)}dx = \int_1^e \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)}dx = \int_1^e \frac{(\ln x)'}{\ln^2 x + 1}dx =$ **2p**

$= \operatorname{arctg}(\ln e) - \operatorname{arctg}(\ln 1) = \frac{\pi}{4}$. **1p**

Problema 3: soluție orientativă

Fie $g: [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Egalitatea din ipoteză se mai poate scrie $F(1) - F(0) = g(1) - g(0)$ sau $F(1) - g(1) = F(0) - g(0)$. **2p**

Fie $h: [0,1] \to \mathbb{R}, h(x) = F(x) - g(x)$. h satisface condițiile teoremei lui Rolle **2p**

Există $c \in (0, 1)$ astfel încât $h'(c) = 0$, echivalent cu $f(c) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ **2p**

Se verifică imediat că $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} < \frac{\sqrt{2}}{1+c}$, pentru $c \in (0, 1)$. **1p**

Problema 4: soluție orientativă

i) Se arată ușor că nu există grupuri prietenoase cu trei elemente ($f(x)=x^2$ este automorfism și nu există $a\in G,\ \mathrm{ord}(a)=3$ cu $f(a)=a$). **2p**

Orice grup cu patru elemente este sau ciclic (izomorf cu Z_4) sau izomorf cu grupul lui Klein. Dacă G cu patru elemente este ciclic, atunci există două automorfisme ($f(x)=x$, $f(x)=x^3$) și grupul este prietenos. **1p**

Dacă $G_1=\{e, a, b, c\}$, cu $a^2=b^2=c^2=e,\ f:G\to G,\ f(e)=e,\ f(a)=b,\ f(b)=c,\ f(c)=a$ este automorfism și nu există $x\in G,\ \mathrm{ord}(x)=2$, astfel încât $f(x)=x$. Deci, un grup izomorf cu grupul lui Klein nu este prietenos. **1p**

ii) Presupunem, prin metoda reducerii la absurd, că $\mathrm{ord}(G)$ e liber de pătrate. Atunci, există n număr natural nenul și $p_1, p_2, ..., p_n$ numere prime distincte, astfel încât $\mathrm{ord}(G)=p_1p_2...p_n$.

Fie $f\in \mathrm{Aut}(G),\ H=\{x\in G / f(x)=x\}$. Se arată ușor că H este subgrup al lui G. **1p**

Există $a_1, a_2, ..., a_n$ ce aparțin lui G cu $\mathrm{ord}(a_1)=p_1,\ \mathrm{ord}(a_2)=p_2,\ ...,\ \mathrm{ord}(a_n)=p_n$, astfel încât $f(a_1)=a_1,\ f(a_2)=a_2, ..., f(a_n)=a_n$. Rezultă că $p_1 / \mathrm{ord}(H),\ p_2 / \mathrm{ord}(H), ... p_n / \mathrm{ord}(H)$.

Cum $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt numere prime distincte, rezultă $p_1p_2...p_n=\mathrm{ord}(G)/\mathrm{ord}(H)$, deci $H=G$ și, în particular, $f=1_G$. **1p**

Cum singurul automorfism interior al lui G este 1_G, rezultă că G este comutativ. Cum automorfismul $x\to x^{-1}$ este 1_G, obținem $x^2=e,\ \forall x\in G$, deci $p_1=p_2=...=p_n=2$, fals. **1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.