Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Județul ALBA - 17 februarie, 2024

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a X-a

Problema 1.
a) Să se arate că $x^3-3x^2+4\geq 0, (\forall)x\geq -1$.
b) Fie numerele reale $a,b,c>1$. Să se arate că:
$$\log_a\left(b\sqrt{b}-2b+4\right)+\log_b\left(c\sqrt{c}-2c+4\right)+\log_c\left(a\sqrt{a}-2a+4\right)\geq 3.$$
Când avem egalitate?

Soluţie şi barem:
a) • $(x+1)(x^2-4x+4)\geq 0$ **2p**
• $(x+1)(x-2)^2\geq 0, (\forall)\ x\geq -1$ **1p**
b) Notăm $E=\log_a\left(b\sqrt{b}-2b+4\right)+\log_b\left(c\sqrt{c}-2c+4\right)+\log_c\left(a\sqrt{a}-2a+4\right)$.
- Din punctul a) avem $b\sqrt{b}-2b+4\geq b, c\sqrt{c}-2c+4\geq c, a\sqrt{a}-2a+4\geq a$ **1p**
- Cum $a,b,c>1$ obţinem $E\geq \log_a b+\log_b c+\log_c a$ **1p**
- Din inegalitatea mediilor rezultă $\log_a b+\log_b c+\log_c a\geq 3$, deci $E\geq 3$ **1p**
- Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c=4$ (conform punctului a)) **1p**

Problema 2.
Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$ diferite două câte două, cu $|a|=|b|=|c|=1$. Notăm
$$E=|b+c|^2+|c+a|^2+|a+b|^2.$$
a) Dacă $E=3$ să se arate că triunghiul cu vârfurile de afixe a,b și c este echilateral.
b) Dacă $E=4$ să se arate că triunghiul cu vârfurile de afixe a,b și c este dreptunghic.

Soluţie şi barem:
a) • Fie triunghiul ABC cu vârfurile de afixe a,b, respectiv c; $|a|=|b|=|c|=1\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O,1)$ **1p**
• Notăm $z=a+b+c$ și avem $E=|z-a|^2+|z-b|^2+|z-c|^2$................................**1p**
• $E=3|z|^2-z\bar{z}-\bar{z}z+3=|z|^2+3$ **1p**
• $E=3\Longrightarrow z=0\Longrightarrow H=O$, unde H este ortocentrul $\Longrightarrow \Delta\, ABC$ este echilateral **1p**
b) • $E=4\Longrightarrow |a+b+c|^2=1\Longrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1\Longrightarrow$
$\Longrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)=abc\Longrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$..........................**2p**
• $a+b=0$ sau $b+c=0$ sau $c+a=0\Longrightarrow O$ este mijlocul uneia dintre laturile AB, BC sau $AC\Longrightarrow \Delta\, ABC$ este dreptunghic **1p**

Problema 3.
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care are proprietatea $f\left(f(x)\right)=2^x-1$, pentru orice număr real x.
a) Să se arate că funcţia f este injectivă.

b) Să se calculeze $f(0) + f(1)$.

Soluție şi barem:

a) • $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ **1p**

• $2^{x_1} - 1 = 2^{x_2} - 1 \Longrightarrow x_1 = x_2 \Longrightarrow f$ este injectivă **1p**

b) • $f(2^x - 1) = 2^{f(x)} - 1, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$ **1p**

• $\begin{cases} f(0) = 2^{f(0)} - 1 \\ f(1) = 2^{f(1)} - 1 \end{cases} \Longrightarrow f(0)$ și $f(1)$ sunt soluții ale ecuației $x = 2^x - 1$.......................... **1p**

• $\begin{cases} g(x) = 2^x \text{ este strict convexă} \\ h(x) = x + 1 \text{ este funcție de gradul I} \end{cases} \Longrightarrow$ ecuația $g(x) = h(x)$ are cel mult 2 soluții..... **1p**

• $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ sunt singurele soluții ale ecuației $x = 2^x - 1 \Longrightarrow f(0), f(1) \in \{0,1\}$.................... **1p**

• f este injectivă $\Longrightarrow f(0) \neq f(1) \Longrightarrow f(0) + f(1) = 0 + 1 = 1$ **1p**

Problema 4.

Determinați funcţiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(xf(y) + f(x + y)) = y(f(x) + 1) + f(x), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Gazeta Matematică nr. 11/2023

Soluție şi barem:

• Pentru $x = 0 \Longrightarrow f(f(y)) = y(f(0) + 1) + f(0), (\forall)\ y \in \mathbb{R} \quad (1)$ **1p**

• Dacă $f(0) = -1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} f(f(y)) = -1, (\forall)\ y \in \mathbb{R}$ și presupunând că există $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x_0) \neq -1$, obținem că f este surjectivă, ceea ce conduce la o contradicție **2p**

• Obținem $f(x) = -1, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$, care verifică condiția din enunț **1p**

• Dacă $f(0) \neq -1$, din relația (1) obținem că f este injectivă **1p**

• Pentru $y = 0 \Longrightarrow f(xf(0) + f(x)) = f(x), (\forall)\ x \in \mathbb{R}$ și din injectivitate rezultă $f(x) = (1 - f(0))x, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$ **1p**

• Pentru $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow f(x) = x, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$, care verifică condiția din enunț **1p**