Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Alba
17.02.2024

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

1.a) Arătați că dacă $x \in [-1,1], y \in [-2,2]$ și z $\in [-3,3]$, atunci:
$$x^2+y^2+z^2+xy-xz-yz \in [0,25] .$$
b) Fie $x \in \mathbb{R}, x > 1$. Demonstrați că $x^2 = ([x]^2+1)(\{x\}^2+1) \Leftrightarrow x = [x] + \frac{1}{[x]}$.

Soluție:

a) $x^2+y^2+z^2+xy-xz-yz = \frac{1}{2}[(x+y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2]$..................................1p
$-3 \le x+y \le 3,\ -5 \le y-z \le 5,\ -4 \le x-z \le 4$, de unde rezultă:
$0 \le (x+y)^2 \le 9,\ 0 \le (y-z)^2 \le 25,\ 0 \le (x-z)^2 \le 16$...2p
$0 \le \frac{1}{2}[(x+y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2] \le 25$..1p

b) Scriind $x = [x] + \{x\}$ obținem:
$x^2 = ([x]^2+1)(\{x\}^2+1) \Leftrightarrow ([x]+\{x\})^2 = [x]^2 \cdot \{x\}^2 + [x]^2 + \{x\}^2 + 1 \Leftrightarrow$......................1p
$\Leftrightarrow 2[x]\cdot\{x\} = [x]^2 \cdot \{x\}^2 + 1 \Leftrightarrow ([x]\cdot\{x\}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow [x]\cdot\{x\} = 1 \Leftrightarrow$.............................1p
$\Leftrightarrow \{x\} = \frac{1}{[x]} \Leftrightarrow x - [x] = \frac{1}{[x]} \Leftrightarrow x = [x] + \frac{1}{[x]}$..1p

2. a) Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile: $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

b) Arătați că : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < 2$

Soluție:

a) $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow$...1p

$\Leftrightarrow (n+1)^3 < (n+2)^2 \cdot n \Leftrightarrow n^3+3n^2+3n+1 < n^3+4n^2+4n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n^2+n > 1$, adevărat $\forall n \in \mathbb{N}^*$...1p
$\frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}} < \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow$..1p
$\Leftrightarrow n(n+2)^2 < (n+1)^2(n+2) \Leftrightarrow n^3+4n^2+4n < n^3+4n^2+5n+2$,
adevărat $\forall n \in \mathbb{N}^*$..1p

$\frac{1}{3\sqrt{1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{4\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$, $\frac{1}{5\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$, ..., $\frac{1}{2024\sqrt{2022}} < \frac{1}{\sqrt{2022}} - \frac{1}{\sqrt{2024}}$.......................1p

Adunând relațiile obținem:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{2022}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}}\right) \Rightarrow$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2024}}$..1p

$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} < 1$, deci $\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < 2$..1p

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Pe muchiile BB' *și* CC' considerăm punctele M și N astfel încât suma $AM + MN + ND'$ să fie minimă. Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele MN și AD'. (G.M. Nr.10/2022, enunț modificat)

Soluție:

Suma $AM + MN + ND'$ este minimă atunci când punctele A, M, N, D' sunt coliniare pe desfășurarea în plan a suprafeței laterale a cubului...1p

$BM = NC' = \frac{BB'}{3}$...1p

Fie $BP \parallel MN, P \in CC'$. Atunci $CP = \frac{CC'}{3}$...1p

Din $BC' \parallel AD'$ și $BP \parallel MN$ rezultă $\sphericalangle(AD', MN) = \sphericalangle(BC', BP) = \sphericalangle(PBC')$.............................1p

$A_{PBC'} = \frac{BC \cdot PC'}{2}$, $A_{PBC'} = \frac{PB \cdot BC' \cdot sin\sphericalangle(PBC')}{2} \Rightarrow sin \sphericalangle(PBC') = \frac{PC' \cdot BC}{PB \cdot BC'}$.......................................1p

Dacă BC = $x \Rightarrow PC' = \frac{2}{3}x$, PB = $\frac{x\sqrt{10}}{3}$, $BC' = x\sqrt{2} \Rightarrow sin \sphericalangle(PBC') = \frac{\sqrt{5}}{5}$............................. 2p

4. Triunghiurile ACD și BCD sunt situate în plane diferite. Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului ACD și G_2 centrul de greutate al triunghiului BCD. Știind că N este mijlocul segmentului $[CD]$, $M \in [AB]$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$, iar $MN \cap AG_2 = \{E\}$, demonstrați că $EG_1 \| (BCD)$.

Soluție:

G_1 - centrul de greutate al triunghiului ACD$\Longrightarrow \frac{AG_1}{G_1N} = 2$,

G_2 - centrul de greutate al triunghiului BCD$\Longrightarrow \frac{BG_2}{G_2N} = 2$,

În ΔANB, $\frac{AG_1}{G_1N} = \frac{BG_2}{G_2N} \Longrightarrow G_1G_2 \parallel AB$...2p

Fie $MN \cap G_1G_2 = \{P\}$;

În ΔBMN, $G_2P \parallel BM \Longrightarrow \Delta NPG_2 \sim \Delta NMB \Longrightarrow \frac{PG_2}{BM} = \frac{NG_2}{NB} = \frac{1}{3} \Longrightarrow PG_2 = \frac{BM}{3} = \frac{1}{3}(AB - AM) = \frac{1}{3}\left(AB - \frac{2}{5}AB\right) = \frac{1}{5}AB$...2p

$PG_2 \parallel AM \Longrightarrow \Delta EPG_2 \sim \Delta EMA \Longrightarrow \frac{EG_2}{EA} = \frac{PG_2}{AM} \Longrightarrow \frac{EG_2}{EA} = \frac{\frac{1}{5}AB}{\frac{2}{5}AB} = \frac{1}{2}$...1p

G_1 –centru de greutate în triunghiul ADC $\Longrightarrow \frac{G_1N}{AG_1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{EG_2}{EA} = \frac{G_1N}{G_1A} \Longrightarrow EG_1 \parallel NG_2$..............1p

$NG_2 \subset (BCD)$, $G_1 \notin (BCD) \Longrightarrow EG_1 \parallel (BCD)$...1p