Olimpiada Naţională de Matematică

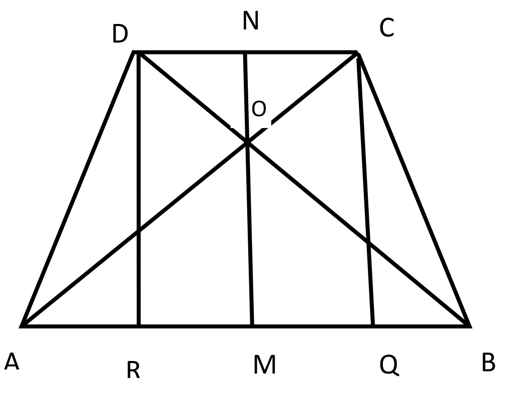
Etapa Locală, județul Alba

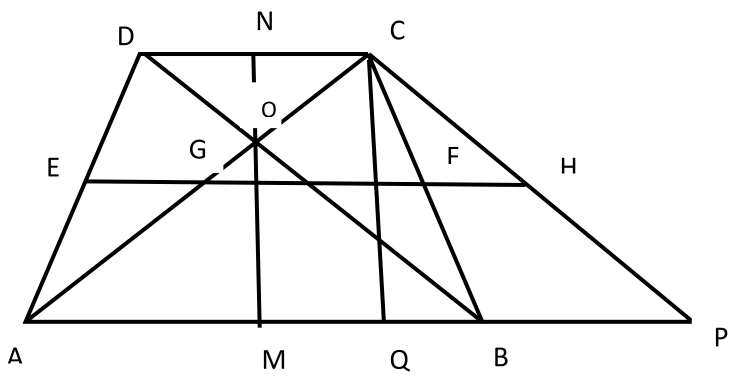
17.02.2024

Clasa a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREM

1.	***a)*** *Fie* $A = 2023^{2023} + 2024^{2024} + 2025^{2025}$*. Arătați că* $\sqrt{A}$ *este număr irațional.* ***b)*** *Demonstrați că* $\sqrt{a+b+c}$ *este număr irațional, dacă* $\left(\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}\right) = 3$*, unde prin* (x, y, z) *înțelegem c.m.m.d.c al numerelor* x, y, z*.*	
	a) $u(2023^{2023}) = u(3^{2023}) = u(3^3) = 7; u(2024^{2024}) = u(4^{2024}) = 6;$ $u(2025^{2025}) = u(5^{2025}) = 5$	**1p**
	$u(A) = u(7+6+5) = u(18) = 8$	**1p**
	A nu este pătrat perfect$\Rightarrow\sqrt{A}$ este număr irațional.	**1p**
	b) Dacă $\left(\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}\right) = 3 \Rightarrow \overline{ab2} \vdots 3 \Rightarrow a+b+2 = M_3$ (1); $\overline{bc7} \vdots 3 \Rightarrow b+c+7 = M_3$ (2) $\overline{ca8} \vdots 3 \Rightarrow c+a+8 = M_3$ (3)	**1p**
	Prin adunarea relațiilor (1),(2) și (3), obținem că $2a+2b+2c+17 = M_3$	**1p**
	$2a+2b+2c+2 = M_3 \Rightarrow 2(a+b+c+1) = M_3 \Rightarrow a+b+c+1 = M_3$	**1p**
	$a+b+c = M_3 + 2$ care nu este pătrat perfect$\Rightarrow\sqrt{a+b+c}$ este irațional.	**1p**
2.	***a)*** *Arătați că nu există numerele raționale a și b astfel încât:* $$\sqrt{3(a-1)^2} + \sqrt{75} = \sqrt{(b+2)^2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}.$$ ***b)*** *Determinați numerele naturale a și b astfel încât:* $\sqrt{20a^2 + 24b^2 + 1} = 20 + 24 + 1$.	
	a) $\sqrt{3}\lvert a-1\rvert + 5\sqrt{3} = \lvert b+2\rvert - \lvert 1-\sqrt{3}\rvert \Rightarrow \sqrt{3}\lvert a-1\rvert + 5\sqrt{3} = \lvert b+2\rvert - \sqrt{3} + 1$	**1p**
	$\sqrt{3}(\lvert a-1\rvert + 6) = \lvert b+2\rvert + 1$	**1p**
	Cum $a, b \in Q$, rezultă că singura posibilitate ar fi ca $\lvert a-1\rvert + 6 = 0$ și $\lvert b+2\rvert + 1 = 0$, imposibil.	**1p**
	b) $\sqrt{20a^2+24b^2+1} = 45 \Rightarrow 20a^2+24b^2+1 = 45^2 = 2025 \Rightarrow 20a^2+24b^2 = 2024$	**1p**
	$5a^2 + 6b^2 = 506 \Rightarrow 5a^2$ e par$\Rightarrow a^2$ e par$\Rightarrow a$ e par, dar $5a^2 < 506 \Rightarrow a^2 \le 100$, ca urmare $a \in \{0,2,4,6,8,10\}$	**1p**
	Dacă $a = 0 \Rightarrow 6b^2 = 506 \Rightarrow b^2 = \frac{506}{6}$, nu e soluție; Dacă $a = 2 \Rightarrow 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 486 \Rightarrow b^2 = 81 \Rightarrow b = 9$, e soluție; Dacă $a = 4 \Rightarrow 5 \cdot 4^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 426 \Rightarrow b^2 = 71$, nu e soluție; Dacă $a = 6 \Rightarrow 5 \cdot 6^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 326 \Rightarrow b^2 = \frac{326}{6}$, nu e soluție; Dacă $a = 8 \Rightarrow 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 186 \Rightarrow b^2 = 31$, nu e soluție; Dacă $a = 10 \Rightarrow 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$ e soluție. Deci soluțiile sunt: $a = 2, b = 9$ și $a = 10, b = 1$.	**2p**

3.	*Fie E un punct pe latura DC a pătratului $ABCD$, AN bisectoarea unghiului $\measuredangle EAB$, $N \in BC$ și P punctul de intersecție a dreptelor AE și BC. Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M. Demonstrați că:* ***a)*** *NA este bisectoarea unghiului $\measuredangle MNB$;* ***b)*** *$MN = DM + BN$;* ***c)*** *$\measuredangle MAN = 45^0$.* **G.M**	
	a) Notăm $NE \cap MP = \{F\}$, $MN \cap AP = \{G\}$. În triunghiul PMN avem $MC \perp PN$, $NF \perp MP$, $MC \cap NF = \{E\}$, deci E este ortocentrul triunghiului PMN, prin urmare $PG \perp MN$.	**1p**
	Atunci $\measuredangle ANM = 90^0 - \measuredangle GAN$(1), $\measuredangle ANB = 90^0 - \measuredangle BAN$ (2)	**1p**
	Din (1), (2) și $\measuredangle GAN = \measuredangle BAN$, rezultă că NA este bisectoarea unghiului $\measuredangle MNB$	**1p**
	b) $\Delta ANG \equiv \Delta ANB$(I.U)$\Rightarrow BN = GN$ (3) și $AG = AB \Rightarrow AG = AD$ și $\Delta ADM \equiv \Delta AGM$(I.C)$\Rightarrow DM = GM$(4)	**1p**
	Adunând relațiile (3) și (4) obținem că $MN = DM + BN$	**1p**
	c) Din $\Delta ADM \equiv \Delta AGM \Rightarrow \measuredangle DAM = \measuredangle GAM$	**1p**
	$\measuredangle GAN = \measuredangle BAN \Rightarrow \measuredangle MAN = \measuredangle DAM + \measuredangle BAN = 90^0 - \measuredangle MAN$. Deci $\measuredangle MAN = 45^0$	**1p**
4.	***a)*** *Să se arate că nu există un triunghi cu lungimile înălțimilor* $1, \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$ *.* ***b)*** *Se consideră trapezul isoscel ABCD (AB//CD, AB>CD). Știind că înălțimea MN a trapezului este egală cu linia mijlocie EF, arătați că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.*	
	a) $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \Rightarrow a = \frac{2A}{h_a}, b = \frac{2A}{h_b}, c = \frac{2A}{h_c}$, unde A este aria triunghiului, a, b, c sunt lungimile laturilor și h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor corespunzătoare acestora.	**1p**
	Dacă ar exista triunghiul, atunci din $a < b + c \Rightarrow \frac{2A}{1} < \frac{2A}{\sqrt{3}} + \frac{2A}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}}$ (1)	**1p**
	Din (1), obținem că $1 < \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) < 1 + 2\sqrt{3} \Rightarrow 3 + \sqrt{3} < 2\sqrt{3} + 1 \Rightarrow$ $2 < \sqrt{3}$, fals.	**1p**
	b) Soluția 1  	
	Fie $CQ \perp AB$, $DR \perp AB$, $R, Q \in AB \Rightarrow AQ = AR + RQ = AR + CD = \frac{AB-CD}{2} + CD = \frac{AB+CD}{2}$ Analog, obținem că $BR = \frac{AB+CD}{2}$	**1p**
	Dar $\frac{AB+CD}{2} = EF = MN = CQ = DR \Rightarrow AQ = CQ$ și $BR = DR$	**1p**
	Triunghiurile ΔACQ și ΔBDR sunt dreptunghice isoscele$\Rightarrow \measuredangle CAB = \measuredangle DBA = 45^0$ (1)	**1p**
	Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Din (1), rezultă că ΔAOB este dreptunghic isoscel, ca urmare $AC \perp BD$.	**1p**

	Soluția 2 	
	Fie $CP//BD$, $P \in AB$ și din $ABCD$ trapez cu $AB//CD \Rightarrow BP//CD \Rightarrow BPCD$ paralelogram $\Rightarrow BP = CD$ și $BD = CP$ (1)	**1p**
	Fie $\mathrm{EF} \cap \mathrm{AC} = \{\mathrm{G}\}$; GH e linie mijlocie în $\Delta\mathrm{APC} \Rightarrow \mathrm{GH} = \frac{\mathrm{AP}}{2} = \frac{\mathrm{AB+BP}}{2} = \frac{\mathrm{AB+DC}}{2} = \mathrm{EF}$, dar $EF = MN \Rightarrow GH = MN$ (2)	**1p**
	Fie $\mathrm{CQ} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{Q} \in \mathrm{AB} \Rightarrow CQ = MN$ și din (2), obținem că $GH = CQ$ (3). Trapezul $ABCD$ e isoscel$\Rightarrow AC = BD$ și din (1)$\Rightarrow CP = AC \Rightarrow \Delta\mathrm{ACP}$ e isoscel și CQ e înălțime, ca urmare si mediană (4). Din (2) și (3), obținem că $CQ = \frac{AP}{2}$ (5)	**1p**
	Din (4) și (5), rezultă că $\Delta\mathrm{ACP}$ e dreptunghic în C, deci $AC \perp PC$ dar $PC//BD \Rightarrow AC \perp BD$.	**1p**