Concurs Național de Matematică Aplicată

“Adolf Haimovici”

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii
Etapa locala – 17.02.2024

Clasa a X-a

1. Se consideră numerele a=$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ și b=$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

   a) Să se calculeze a^2-b^2 și a·b.

   b) Să se raționalizeze fracția $\frac{1}{a+b}$.

   c) Să se determine $(a+bi)^{36}$, $i^2=-1$.

2. a) Să se arate că $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lg 7}+\frac{1}{\log_6 7}+\frac{1}{\log_{15} 7}\right)=\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_3 7}+\frac{1}{\log_5 7}$;

   b) Să se determine x $\in R$ pentru care este definita expresia $E(x)=\log_{x-2}\sqrt{x^2-5x+4}$

   c) Să se arate că următoarea expresie nu depinde de x $\in (0.+\infty)$

   E=$\frac{4\left(\log_2 x^3\right)^2+2\log_2 8x^{-6}-(1-6\log_2 x)^2}{2-8\sqrt{x}+(\sqrt{x}+2)^2-(\sqrt{x}-2)^2}$

3. a) Dacă a=$\log_{125} 5-\sqrt[3]{\frac{1}{27}}+\left(2-\sqrt{5}\right)^2+\left(2+\sqrt{5}\right)^2$și b=$\frac{1}{\log_4 3}$, arătați că a+$\sqrt{9^b}\in N$

   b) Să se determine $[\sqrt{50}]$, $[\sqrt[3]{65}+2]$ și $[2\cdot\log_7 9-1]$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

4. a) Să se determine z $\in C$ știind că $z^2=3-4i$.

   b) Știind că $z^2+z+1=0$ să se determine $\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)^{2019}$

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.
- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa locala – 17.02.2024

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

Clasa a XI –a

1. Să se rezolve ecuația matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}; X \in M_2(\mathbb{R})$

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ și punctele $P_k(a_k, b_k)$, $k \in \{1,2,3\}$. Dacă $B = A \cdot A^T$ și $C = \frac{1}{14}B$, se cere:
   a) Să se determine B și C^{2019} dacă $P_1(1,2), P_2(2,4), P_3(-3,-6)$
   b) Să se arate că $\det(B) \geq 0$
   c) Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă și numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 aparțin unei drepte ce trece prin origine.

3. Să se calculeze următoarele limite:
   a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-x+x^2)+\ln(1+x+x^2)}{x^2}$
   b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$
   c) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

4. a) Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$, știind că $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3x+a}-b}{x^2+x-2} = \frac{5}{18}$

   b) Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$, știind că graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^3+bx^2+x+1}{x^2+1}$ are asimptotă dreapta de ecuație $y = x+1$.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa locala – 17.02.2024

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

BAREM Clasa a X-a

Barem de evaluare și notare

SUBIECTUL I

a)	$a^2-b^2=2 \quad +\sqrt{2+\sqrt{3}}-2+\sqrt{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $a\cdot b=\sqrt{4-2-\sqrt{3}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$	**1p** **1p**
b)	$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	**2p**
c)	$\alpha=a+bi,\ \alpha^2=a^2-b^2+2abi=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\ +2\sqrt{2-\sqrt{3}}i$ finalizare $(a+bi)^{36}=-2^{36}i$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II -lea

a)	$\frac{1}{2}(\log_7 10+\log_7 6+\log_7 15)=\log_7 2+\log_7 3+\log_7 5$ $\log_7 900=2\cdot\log_7 30$ Finalizare	**1p** **2p** **1p**
b)	$\begin{cases} x-2>0 \\ x-2\neq 1 \\ x^2-5x+4>0 \end{cases}$ $X\in(4,+\infty)$	**1p** **1p**
c)	$E=\frac{36(\log_2 x)^2+6-12\log_2 x\ -1+12\log_2 x-36(\log_2 x)^2}{2}$ Finalizare $E=\frac{5}{2}$	**2p** **1p**

SUBIECTUL al III –lea

a)	a=18 $9^b = 9^{\log_3 4} = 16$ Finalizare $a+\sqrt{9^b}=22$	**2p** **2p** **1p**
b)	$[\sqrt{50}]=7$, $\left[\sqrt[3]{65}+2\right]=6$ $2\cdot \log_7 9 - 1 = \log_7 \frac{81}{7}$ $\left[\log_7 \frac{81}{7}\right] = 1$	**2p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al IV –lea

a)	a) $z=a+bi$, $a,b\in R$, $a^2-b^2 = 3$, $2ab=-4$ Finalizare $z_1=2-i$, $z_2=-2+i$	**2p** **2p**
b)	Din $z^2+z+1=0$ rezultă $z^3=1$ $\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)^{2019} = \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^{2019} = \left(\frac{z+1}{z^2}\right)^{2019}$ $\left(\frac{z+1}{z^2}\right)^{2019} =-1$	**1p** **2p** **2p**

Notă: - Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa locala – 17.02.2024

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

BAREM Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

	Notează $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = A$. Observă că $\det(A)=0 \Rightarrow \det(X^2)=0 \Rightarrow \det(X)=0$ Din $AX = XA, X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{R}$ rezultă relațiile $\begin{cases} 3c = 4b \\ a+c=d \end{cases}$	**2p** **2p**
	Dacă $ad-bc=0$ se obțin soluțiile $a=\frac{c}{2}$ sau $a=-\frac{3c}{2}$ și deci $X=\begin{pmatrix} \frac{c}{2} & \frac{3c}{4} \\ c & \frac{3c}{2} \end{pmatrix}$, respectiv, $X=\begin{pmatrix} -\frac{3c}{2} & \frac{3c}{4} \\ c & -\frac{c}{2} \end{pmatrix}$ Se calculează X^2 în fiecare caz și se egalează cu A, rezultând soluțiile	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II -lea

a)	$B = 14\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C^2 = 5C$ și prin inducție $C^{2019} = 5^{2018}C$	**3p**
b)	$\det(B) = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \geq 0$	**2p**
c)	$\det(B)=0 \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \Rightarrow m_{P_1O} = m_{P_2O} = m_{P_3O} \Rightarrow$ punctele O, P_1, P_2, P_3 sunt coliniare Reciproc, dacă $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = m \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & m(a_1^2+a_2^2+a_3^2) \\ m(a_1^2+a_2^2+a_3^2) & m^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2) \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B)=0$	**2p** **2p**

SUBIECTUL al III –lea

a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)\left(1+x+x^2\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2+x^4\right)}{x^2+x^4}\cdot\left(1+x^2\right)=1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}+\frac{\cos x\left(1-\cos 2x\cos 3x\right)}{x^2}\right)=\frac{2}{4}+$ $+\lim\limits_{x\to 0}\cos x\frac{1-\cos 2x+\cos 2x-\cos 2x\cos 3x}{x^2}=\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\cos x\frac{2\sin^2 x+\cos 2x\left(1-\cos 3x\right)}{x^2}$ $=\frac{1}{2}+2+2\cdot\frac{9}{4}=7$	**2p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}}-1}{\frac{1}{x(x+1)}}\cdot\frac{1}{x\left(x+1\right)}=1$	**2p**

SUBIECTUL al IV –lea

a)	$\sqrt{4+a}-b=0\Rightarrow b=\sqrt{4+a}$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+a}-\sqrt{4+a}}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{x^2+3x+a}+\sqrt{4+a}\right)}$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)\cdot 3\cdot 2\cdot\sqrt{4+a}}=\frac{5}{6\cdot\sqrt{4+a}}\Rightarrow\sqrt{4+a}=3\Rightarrow 4+a=9\Rightarrow a=5\Rightarrow b=3$	**1p** **2p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\Rightarrow a=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=b\Rightarrow b=1$	**2p** **2p**

Notă: Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu