

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Alba**  
**17.02.2024**  
**Clasa a V-a**

**I. Fie numărul  $a = 16^{506} - 4^{1009} - 2^{2024^0} \cdot 8^{672}$ .**

**a) Arătați că  $a$  este multiplu de 125.**

**b) Determinați ultimele 4 cifre ale numărului  $a$ .**

**c) Scrieți numărul  $a$  ca o sumă de două pătrate perfecte.**

Soluție:

$$a) \quad a = 2^{2024} - 2^{2018} - 2 \cdot 2^{2016} = 2^{2024} - 2^{2018} - 2^{2017} \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 2^{2017} \cdot (2^7 - 2^1 - 2^0) = 2^{2017} \cdot 125 \Rightarrow a : 125 \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \quad a = 2^{2014} \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^{2014} \cdot 1000 \dots\dots\dots 1p$$

Ultima cifră a numărului  $2^{2014}$  este 4, deci ultimele patru cifre ale numărului  $a$  sunt: 4,0,0,0...2p

$$b) \quad a = (2^{1007})^2 \cdot 1000 = (2^{1007})^2 \cdot (10^2 + 30^2) \dots\dots\dots 1p$$

$$a = (2^{1007} \cdot 10)^2 + (2^{1007} \cdot 30)^2 \dots\dots\dots 1p$$

**II. a) Suma cifrelor numărului  $\overline{abc}$  este 26.**

**Calculați suma cifrelor numărului  $n = \overline{abc} + 1$ . Analizați toate situațiile posibile.**

**b) Determinați numerele  $\overline{xyz}$  știind că  $\overline{xyz} = 10 \cdot (x + y + z)^2$ .**

Soluție:

a) Dacă  $a + b + c = 26$  și  $a, b$  și  $c$  sunt cifre atunci două dintre ele sunt 9 iar una 8....1p

Sunt trei posibilități:

Dacă  $\overline{abc} = 998$  atunci  $\overline{abc} + 1 = 999$  are suma cifrelor 27.

Dacă  $\overline{abc} = 989$  atunci  $\overline{abc} + 1 = 990$  are suma cifrelor 18.

Dacă  $\overline{abc} = 899$  atunci  $\overline{abc} + 1 = 900$  are suma cifrelor 9

Deci, suma cifrelor poate fi: 27, 18 sau 9. ....2p

b) Deduce că 10 divide  $\overline{xyz}$ , deci  $z=0$  ..... 1p

Egalitatea devine  $\overline{xy} = (x + y)^2$  ..... 1p

Deduce că  $x=8$  și  $y=1$  ..... 1p

Finalizare, numărul  $\overline{xyz}$  este 810. .... 1p

**III. Determinați suma numerelor naturale cuprinse între 1504 și 2007, care prin împărțire la 28 dau restul 5, iar prin împărțire la 35 dau restul 12.**

*Gazeta Matematică nr.6-7-8/2023*

Soluție: Fie  $n$  număr natural care satisface condițiile problemei.

$$n = 28c_1 + 5 \Rightarrow 5n = 140c_1 + 25 \dots\dots\dots 1p$$

$$n = 35c_2 + 12 \Rightarrow 4n = 140c_2 + 48 \dots\dots\dots 1p$$

$$5n - 4n = 140c_1 - 140c_2 + 25 - 48$$

$$n = 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) + 140 + 25 - 48$$

$$n = 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) + 117 \quad (1) \dots 2p$$

Cum  $1504 < n < 2007$ , deduce că  $1387 < 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) < 1890 \quad (2) \dots\dots\dots 1p$

Multiplii lui 140 cuprinși între 1387 și 1890 sunt: 1400, 1540, 1680 și 1820  $(3) \dots\dots\dots 1p$

Din relațiile (1), (2), (3) deduce valorile posibile ale lui  $n$ , respectiv numerele: 1517, 1657, 1797, și 1937, a căror sumă este 6908.  $\dots\dots\dots 1p$

**IV.**

**a) Numerele 35, 48, 61, 73, 98, 82, 69, 19, 56 și 44 sunt grupate în perechi astfel încât suma numerelor fiecărei perechi este aceeași. Care este numărul pereche cu 48?**

**b) Mihai are într-o cutie 26 bile roșii și 29 bile verzi. El se joacă scoțând de fiecare dată două bile din cutie. Dacă acestea au aceeași culoare, pune înapoi în cutie o bilă roșie, dacă au culori diferite pune înapoi în cutie o bilă verde. Repetă mișcarea până ce în cutie mai rămâne o singură bilă. Ce culoare va avea această bilă? Justificați răspunsul.**

Soluție:

a) Suma numerelor date este 585,  $\dots\dots\dots 1p$

iar suma numerelor dintr-o pereche este  $585:5 = 117 \dots\dots\dots 1p$

Numărul în pereche cu 48 este  $117 - 48 = 69. \dots\dots\dots 1p$

b) Extrăgând două bile roșii, pune înapoi o bilă roșie, deci numărul bilelor roșii ar scădea cu una, al bilelor verzi nu s-ar modifica.  $\dots\dots\dots 1p$

Extrăgând două bile verzi, pune înapoi o bilă roșie, deci numărul bilelor verzi ar scădea cu două, al bilelor roșii ar crește cu una.  $\dots\dots\dots 1p$

Extrăgând două bile de culori diferite, pune înapoi o bilă verde, deci bilelor verzi nu s-ar modifica iar numărul bilelor roșii ar scădea cu una,  $\dots\dots\dots 1p$

Dacă prin repetare numărul bilelor roșii își schimbă paritatea, numărul bilelor verzi va avea mereu aceeași paritate; la final trebuie să rămânem cu o bilă și cum numărul de bile verzi este mereu impar, bila rămasă trebuie să fie verde.  $\dots\dots\dots 1p$