INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA
Str. Gabriel Bethlen, Nr. 7, Alba Iulia, 510009
Telefon: 0258 817255, Fax: 0258 817663
secretariat@mail.albanet.ro, www.isj.albanet.ro

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Alba
17.02.2024

Clasa a VIII-a

1. a) Arătați că dacă $x \in [-1, 1], y \in [-2, 2]$ și $z \in [-3, 3]$, atunci:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz - yz \in [0, 25] .$$

b) Fie $x \in \mathbb{R}, x > 1$. Demonstrați că $x^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1) \Leftrightarrow x = [x] + \frac{1}{[x]}$.

2. a) Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile: $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

b) Arătați că : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < 2$.

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Pe muchiile BB' și CC' considerăm punctele M și N astfel încât suma $AM + MN + ND'$ să fie minimă. Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele MN și AD'. (G.M. Nr.10/2022, enunț modificat)

4. Triunghiurile ACD și BCD sunt situate în plane diferite. Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului ACD și G_2 centrul de greutate al triunghiului BCD. Știind că N este mijlocul segmentului $[CD]$, $M \in [AB]$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$, iar $MN \cap AG_2 = \{E\}$, demonstrați că $EG_1 \| (BCD)$.

NOTĂ:

1.Toate subiectele sunt obligatorii.

2.Timpul de lucru este de 3 ore.

3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.

Succes!