Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Județul ALBA - 17 februarie, 2024

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a XII-a

Problema 1.

Să se calculeze: $I=\int \frac{x+1-x^2\ln x}{x^2(x+1)}\cdot\cos(\ln(x+1))dx,\ x\in(0,\infty)$.

Soluţie şi barem:

- Scriem ca diferență de două integrale

$\int \frac{x+1-x^2\ln x}{x^2(x+1)}\cdot\cos(\ln(x+1))dx=\int\frac{1}{x^2}\cdot\cos(\ln(x+1))dx-\int\frac{\ln x}{(x+1)}\cdot\cos(\ln(x+1))dx$ pe care le abordăm prin părți , și avem..**1p**

- $I=\int\left(-\frac{1}{x}\right)'\cdot\cos(\ln(x+1))dx-\int\ln x\cdot\left(\sin(\ln(x+1))\right)'dx=$

$=-\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln(x+1))+\int\frac{1}{x}\cdot\left(\cos(\ln(x+1))\right)'dx-\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))+\int\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln(x+1))dx=$

$=-\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln(x+1))-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin(\ln(x+1))}{x+1}dx-\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))+\int\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln(x+1))dx$......................**1p**

- Prelucrăm echivalent $I=-\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln(x+1))-\int\frac{x+1-x}{x(x+1)}\cdot\sin(\ln(x+1))\,dx-$

$-\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))+\int\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln(x+1))dx$...**1p**

- De unde obținem

$I=-\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln(x+1))-\int\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln(x+1))\,dx+\int\frac{1}{(x+1)}\cdot\sin(\ln(x+1))dx-\ln x\cdot$ $\sin(\ln(x+1))+\int\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln(x+1))dx==-\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln(x+1))+\int\frac{1}{(x+1)}\cdot\sin(\ln(x+1))\,dx-$ $\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))$... ....**2p**

- Adică, $I=-\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln(x+1))-\int\left(\cos(\ln(x+1))\right)'dx-\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))=$

$=-\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln(x+1))-\cos(\ln(x+1))-\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))+C$................................ ......**1p**

- Finalizare $I=\left(-1-\frac{1}{x}\right)\cos(\ln(x+1))-\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))+C$.................................... ...**1p**

Problema 2.

Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile , pentru care

$$f(x)+\int_0^x e^t f(x-t)dt=ax^2, (\forall)x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}^*$$

Soluţie şi barem:

- Cu schimbarea de variabilă $x-t=u$ obținem

$f(x)+e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du=ax^2, (\forall)x\in\mathbb{R}$.. .... **1p**

- Pe care, dacă o înmulțim cu e^{-x} se obține

$e^{-x}f(x)+\int_0^x e^{-u}f(u)du=ax^2e^{-x}, (\forall)x\in\mathbb{R}(\alpha)$ **1p**

- Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)\cdot e^{-x}$, care este derivabilă, deci continuă, deci admite primitive și

fie $G:\mathbb{R}\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x)=\int_0^x e^{-t}f(t)dt$ - o primitivă a funcției g, care se anulează în 0............ **1p**

- Relația (α) devine $g(x)+G(x)=ax^2e^{-x}, (\forall)x\in\mathbb{R}$,sau altfel

$g(x)e^x+G(x)e^x=ax^2, (\forall)x\in\mathbb{R}$, adică $(G(x)e^x)'=ax^2, (\forall)x\in\mathbb{R}$, de unde avem $G(x)e^x=a\frac{x^3}{3}+k, k\in\mathbb{R}$, adică $G(x)=\left(a\frac{x^3}{3}+k\right)e^{-x}, (\forall)x\in\mathbb{R}$................ .... **2p**

- Derivăm și obținem $g(x) = \left(ax^2 - a\frac{x^3}{3} - k\right)e^{-x}, (\forall)x \in \mathbb{R}$,
  și apoi $f(x) = ax^2 - a\frac{x^3}{3} - k$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.. ......**1p**
- Din $G(0) = 0$ obținem $k = 0$, de unde $f(x) = ax^2 - a\frac{x^3}{3}, (\forall)x \in \mathbb{R}$, funcție care verifică relația dată.. ......**1p**

Problema 3.

Fie mulțimea $\mathbb{Q}_0 = \left\{\frac{m}{n}\middle|\ m, n \in \mathbb{Z}, m, n\ impare\right\}$ și $G = \mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se definește legea de compoziție $(q_1, k_1) \circ (q_2, k_2) = (q_1q_2, k_1 + k_2), (\forall)q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_0, (\forall)k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

a) Să se arate că $(G,\circ)$ este grup abelian.

b) Să se arate că funcția $f: G \to \mathbb{Q}^*$, $f\big((q,k)\big) = q \cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$

Soluţie şi barem:

- Demonstrarea asociativității și a comutativității... **1p**
- Determinarea elementului neutru $e = (1,0)$, $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Q}_0$...**1p**
- Simetricul elementului $\mathrm{x} = (\mathrm{q}, \mathrm{k})$ este $\mathrm{x}' = (\mathrm{q}^{-1}, -\mathrm{k}) \in \mathrm{G}$, pentru că $\mathrm{q} \neq 0$ și$\mathrm{q}^{-1} \in \mathbb{Q}_0$**1p**
- Verificarea condiției de morfism:$f\big((q_1, k_1) \circ (q_2, k_2)\big) = f\big((q_1q_2, k_1 + k_2)\big)$
  $= q_1q_2 \cdot 2^{k_1 + k_2} = q_1 \cdot 2^{k_1} \cdot q_2 \cdot 2^{k_2} = f\big((q_1, k_1)\big) \cdot f\big((q_2, k_2)\big), (\forall)(q_1, k_1), (q_2, k_2) \in G$..... **1p**
- Demonstrarea injectivității: Fie $(q_1, k_1), (q_2, k_2) \in G$ cu $f\big((q_1, k_1)\big) = f\big((q_2, k_2)\big)$, adică $q_1 \cdot 2^{k_1} = q_2 \cdot 2^{k_2} \Leftrightarrow \frac{q_1}{q_2} = 2^{k_2 - k_1}$. Cum q_1, q_2 sunt numere întregi impare,iar $k_2 - k_1 \in \mathbb{Z}$ ultima egalitate este posibilă doar când $k_2 - k_1 = 0$, adică $k_2 = k_1$, de unde $q_1 = q_2$, deci f injectivă.. **1p**
- Pentru surjectivitate, dacă $y = \frac{m}{n}, cu\ m, n \in \mathbb{Z}^*$ prime între ele, avem cazurile:
  1. m număr par și atunci avem $y = \frac{2^p m'}{n}, cu\ m', n \in \mathbb{Z}^*\ impare, p \in \mathbb{N}$,
     de unde $y = f\left(\left(\frac{m'}{n}, p\right)\right)$;
  2. n număr par și atunci avem $y = \frac{m}{2^p n'}, cu\ m', n \in \mathbb{Z}^*\ impare, p \in \mathbb{N}$,
     de unde $y = f\left(\left(\frac{m'}{n}, -p\right)\right)$;
  3. m, n numere impare de unde $y = f\left(\left(\frac{m}{n}, 0\right)\right)$..**2p**

Problema 4.

Fie mulțimea $(G,\cdot)$ un grup cu element neutru e și $a, b \in G$ astfel încât $a^5 = b^4 = e$ și $ab = ba^3$.

Să se arate că : a) $a^2b = ba$

b) $ab^3 = b^3a^2$.

c) $b^{-1}a^{-1}b^{-1} = bab$.

Soluţie şi barem:

- a) avem succesiv $a^2b = a(ab) = (ab)a^3 = ba^3a^3 = ba^6 = (ba)a^5 = bae = ba$............... **2p**
- b) $ab^3 = (ab)b^2 = ba^3b^2 = ba(a^2b)b = b(ab)(ab) = bba^3ba^3 = b^2a^3ba^3 = b^2a(a^2b)a^3 = b^2abaa^3 = b^2(ab)a^4 = b^2ba^3a^4 = b^3a^7 = b^3a^2a^5 = b^3a^2e = b^3a^2$...........**2p**
- c) $b^{-1}a^{-1}b^{-1} = b^3a^4b^3 = (b^3a^2)(a^2b)b^2 = ab^3bab^2 = aeab^2 = (a^2b)\,b = bab$............**3p**