INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA
Str. Gabriel Bethlen, Nr. 7, Alba Iulia, 510009
Telefon: 0258 817255, Fax: 0258 817663
secretariat@mail.albanet.ro, www.isj.albanet.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Județul ALBA
17 Februarie 2024

Clasa a XII-a

Problema 1.

Să se calculeze: $I = \int \frac{x+1-x^2\ln x}{x^2(x+1)} \cdot \cos(\ln(x+1))dx,\ x \in (0,\infty)$.

Problema 2.

Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile , pentru care are loc relația

$$f(x) + \int_0^x e^t f(x-t)dt = ax^2, (\forall)x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$$

Problema 3.

Fie mulțimea $\mathbb{Q}_0 = \left\{\frac{m}{n} \middle|\ m,n \in \mathbb{Z}, m,n\ impare\right\}$ și $G = \mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se definește legea de compoziție $(q_1,k_1) \circ (q_2,k_2) = (q_1q_2, k_1 + k_2), (\forall)q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_0, (\forall)k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

a) Să se arate că $(G,\circ)$ este grup abelian.
b) Să se arate că funcția $f: G \to \mathbb{Q}^*$, $f((q,k)) = q \cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

Problema 4.

Fie mulțimea $(G,\cdot)$ un grup cu element neutru e și $a, b \in G$ astfel încât $a^5 = b^4 = e\ și\ ab = ba^3$.

Să se arate că : a) $a^2b = ba$
b) $ab^3 = b^3a^2$.
c) $b^{-1}a^{-1}b^{-1} = bab$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.