



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Județul ALBA
17 Februarie 2024

Clasa a IX-a

Problema 1.

Se consideră șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ definite prin $x_n = 2^n - n$ și $y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze y_n .
- Să se determine numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care y_n este o putere cu exponent natural a lui 2.

Problema 2.

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația: $\left[x + \frac{1}{3}\right] = 3[x] - 4\{x\} + 2$, unde $[x]$, $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

Problema 3.

Fie triunghiul ABC , cu centrul cercului înscris I și punctele A_1, B_1 și C_1 simetricele punctului I față de mijloacele laturilor BC, AC , respectiv AB . Să se arate că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC au același centru de greutate dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Problema 4.

Fie H ortocentrul și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Se notează cu O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA , respectiv HAB .

Să se arate că $\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{OO_3} = 2\overrightarrow{OH}$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.