Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Judeţul ALBA - 17 februarie, 2024

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Să se determine toate matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $A^{2023} = -I_n$ pentru care există două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care comută şi verifică egalităţile

$$X + Y = I_n\ ,\ A \cdot X = X^2 \text{ şi } A \cdot Y = -Y^2.$$

Soluţie şi barem:

- înmulţind cu A egalitatea $X + Y = I_n$, obţinem $X^2 - Y^2 = A$ **1p**
- cum $XY = YX$, avem $(X - Y)(X + Y) = A$, de unde $X - Y = A$ **1p**
- din $\begin{cases} X + Y = I_n \\ X - Y = A \end{cases}$ deducem $X = \frac{1}{2}(I_n + A)$ şi $Y = \frac{1}{2}(I_n - A)$...................................... **1p**
- avem $A \cdot X = \frac{1}{2}(A + A^2)$ şi $X^2 = \frac{1}{4}(I_n + 2A + A^2)$, de unde obţinem $\frac{1}{2}(A + A^2) = \frac{1}{4}(I_n + 2A + A^2)$, adică $A^2 = I_n$ **2p**
- din $A^{2023} = -I_n$ şi $A^2 = I_n$, obţinem $A = -I_n$ **1p**
- pentru $A = -I_n$ se obţine $X = O_n$ şi $Y = I_n$ care verifică condiţiile din enunţ **1p**

Problema 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit recurent prin $a_1 > 1$ şi $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$.

Gazeta Matematică nr. 11 / 2023

Soluţie şi barem:

- $a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geq 0, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ crescător **1p**
- presupunând $(a_n)_{n\geq 1}$ mărginit superior, din teorema lui Weierstrass obținem $(a_n)_{n\geq 1}$ convergent și din relația de recurență rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ – contradicție **1p**
- $\begin{cases} (a_n)_{n\geq 1} - \text{nemărginit superior} \\ (a_n)_{n\geq 1} - \text{ crescător} \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ **1p**
- $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) \Longrightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - 1}{a_{n+1} - 1}$ **1p**
- $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - 1}{a_{k+1} - 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - 1)^2}{(a_k - 1)(a_{k+1} - 1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_{k+1} - 1) - (a_k - 1)}{(a_k - 1)(a_{k+1} - 1)}$ $= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k - 1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1} - 1} = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$ **2p**
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{a_1 - 1}$ **1p**

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{3}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\,, (\forall) n \geq 1$.

a) Să se determine formula termenului general al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} 4^n(2-x_n)$.

Soluţie şi barem:

a) • $x_1 = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos\frac{\pi}{2\cdot 3}$; $\quad x_2 = 2\cos\frac{\pi}{2^2\cdot 3}$ **2p**

• prin inducție matematică se arată că $x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 3}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ **2p**

b) • $l = \lim_{n\to\infty} 4^n(2-x_n) = 2\cdot\lim_{n\to\infty} 4^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 3}\right) = 4\cdot\lim_{n\to\infty} 4^n\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}\cdot 3}\right)$ **2p**

• $l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}\cdot 3}}{\frac{\pi}{2^{n+1}\cdot 3}}\right)^2\cdot\left(\frac{\pi}{2^{n+1}\cdot 3}\right)^2\cdot 4^{n+1} = 1^2\cdot\frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{9}$ **1p**

Problema 4.

Considerăm matricele $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2+B^2=\sqrt{3}(AB-BA)$ şi matricea $C=(A-iB)(A+iB)$.

a) Să se arate că numărul $det(C)$ este real pozitiv.

b) Dacă matricea $AB-BA$ este inversabilă, să se arate că n este divizibil cu 6.

Soluţie şi barem:

a) • $det(C) = det(A-iB)\cdot det(A+iB) = det(A-iB)\cdot det\left(\overline{A-iB}\right)$..........................**2p**

• $det(C) = det(A-iB)\cdot\overline{det(A-iB)} = |det(A-iB)|^2\in\mathbb{R}_+$ **1p**

b) • $C = A^2+B^2+i(AB-BA) = \left(\sqrt{3}+i\right)(AB-BA)$ **1p**

• $det(C) = \left(\sqrt{3}+i\right)^n\cdot det(AB-BA)$ **1p**

• $\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$ ……………………………………………….....**1p**

• $\left(\sqrt{3}+i\right)^n = \frac{det(C)}{det(AB-BA)}\in\mathbb{R}$ de unde rezultă $\sin\frac{n\pi}{6}=0$, deci n este divizibil cu 6 ....**1p**