INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA
Str. Gabriel Bethlen, Nr. 7, Alba Iulia, 510009
Telefon: 0258 817255, Fax: 0258 817663
secretariat@mail.albanet.ro, www.isj.albanet.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Județul ALBA
17 Februarie 2024

Clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Să se determine toate matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $A^{2023} = -I_n$ pentru care există două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care comută şi verifică egalităţile

$$X + Y = I_n\,,\ A \cdot X = X^2 \text{ şi } A \cdot Y = -Y^2.$$

Problema 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit recurent prin $a_1 > 1$ şi $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

Gazeta Matematică nr. 11 / 2023

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{3}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\,, (\forall) n \geq 1$.

a) Să se determine formula termenului general al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(2 - x_n)$.

Problema 4.

Considerăm matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$ şi matricea $C = (A - iB)(A + iB)$.

a) Să se arate că numărul $det(C)$ este real pozitiv.

b) Dacă matricea $AB - BA$ este inversabilă, să se arate că n este divizibil cu 6.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.