Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Județul ALBA - 17 februarie, 2024

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a IX-a

Problema 1.

Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin $x_n = 2^n - n$ și $y_n = x_1 + x_2 + \ldots x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze y_n.

b) Să se determine numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care y_n este o putere cu exponent natural a lui 2.

Soluţie şi barem:

a) • $y_n = (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^n) - (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ **1p**

• $y_n = 2^{n+1} - 2 - \frac{n(n+1)}{2}, (\forall)\, n \geq 1$ **1p**

b) • $\boldsymbol{y_1 = 2^0}$; $y_2 = 3$; $\boldsymbol{y_3 = 2^3}$; $y_4 = 20$ **2p**

• $y_n < 2^{n+1}$ și prin inducție matematică se arată că $y_n > 2^n \Leftrightarrow 2^{n+1} > n^2 + n + 4$, $(\forall)\, n \geq 4$, deci $2^n < y_n < 2^{n+1}, (\forall)\, n \geq 4$ **2p**

• În concluzie, $n \in \{1,3\}$ **1p**

Problema 2.

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația: $\left[x + \frac{1}{3}\right] = 3[x] - 4\{x\} + 2$, unde $[x], \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x.

Soluţie şi barem:

Distingem 3 cazuri:

• Caz I. $x \in \left[k, k + \frac{1}{3}\right), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + \frac{1}{3} \in \left[k + \frac{1}{3}, k + \frac{2}{3}\right)$ și avem $\left[x + \frac{1}{3}\right] = [x]$, iar ecuația devine $[x] = 2\{x\} - 1$

Deoarece pentru $x \in \left[k, k + \frac{1}{3}\right)$ avem $\{x\} \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ și astfel $2\{x\} - 1 \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right)$ **3p**

obținem $[x] = 2\{x\} - 1 \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right) \cap \mathbb{Z} = \{-1\}$

Din $[x] = -1$ obținem $2\{x\} - 1 = -1$, adică $\{x\} = 0$ și astfel, $x = -1$

• Caz II. $x \in \left[k + \frac{1}{3}, k + \frac{2}{3}\right), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + \frac{1}{3} \in \left[k + \frac{2}{3}, k + 1\right)$ și avem $\left[x + \frac{1}{3}\right] = [x]$, iar ecuația devine $[x] = 2\{x\} - 1$

Deoarece pentru $x \in \left[k + \frac{1}{3}, k + \frac{2}{3}\right)$ avem $\{x\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și astfel $2\{x\} - 1 \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ **2p**

obținem $[x] = 2\{x\} - 1 \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$

Din $[x] = 0$ obținem $2\{x\} - 1 = 0$, adică $\{x\} = \frac{1}{2}$ și astfel, $x = \frac{1}{2}$

• Caz III. $x \in \left[k + \frac{2}{3}, k + 1\right), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + \frac{1}{3} \in \left[k + 1, k + \frac{4}{3}\right)$ și avem $\left[x + \frac{1}{3}\right] = [x] + 1$,

iar ecuația devine $2[x] = 4\{x\} - 1$

Deoarece pentru $x \in \left[k + \frac{2}{3}, k + 1\right)$ avem $\{x\} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ și astfel $4\{x\} - 1 \in \left[\frac{5}{3}, 3\right)$ **2p** obținem $2[x] = 4\{x\} - 1 \in \left[\frac{5}{3}, 3\right) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$

Din $[x] = 1$ obținem $4\{x\} - 1 = 2$, adică $\{x\} = \frac{3}{4}$ și astfel, $x = \frac{7}{4}$

Deci ecuația are soluția $S = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right\}$.

Problema 3.

Fie triunghiul ABC, cu centrul cercului înscris I şi punctele A_1, B_1 și C_1 simetricele punctului I față de mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Să se arate că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC au același centru de greutate dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie şi barem:

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC;

- A_1BIC – paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}$ **2p**
- Analog, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}$ și $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}$ **1p**
- Dacă G este centrul de greutate al $\Delta\, ABC$, avem $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.......................**1p**
- $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA} + \right.$ $\left. + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OI}\right)$ **2p**
- $\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} \Leftrightarrow G = I \Leftrightarrow \Delta\, ABC$ este echilateral **1p**

Problema 4.

Fie H ortocentrul și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Se notează cu O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA, respectiv HAB.

Să se arate că $\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{OO_3} = 2\overrightarrow{OH}$.

Soluţie şi barem:

- Pentru existența triunghiurilor HBC, HCA și HAB este necesar ca triunghiul ABC să nu fie dreptunghic **1p**
- Avem $AH \perp BC, CA \perp BH, AB \perp CH$, adică A este ortocentrul triunghiului HBC și analog B este ortocentrul triunghiului HCA, iar C este ortocentrul triunghiului HAB....................**1p**
- Aplicând relația lui Sylvester pentru $\Delta\, HBC$, rezultă $\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1H}$...............**1p**
- $\left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OH}\right)$..**1p**
- Cum $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, obținem $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (1)..**1p**
- Analog $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ (2) și $\overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (3)...**1p**
- Prin adunarea relațiilor (1), (2) și (3) se obține concluzia **1p**