



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Județul ALBA
17 Februarie 2024

Clasa a X-a

Problema 1.

a) Să se arate că $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$, $(\forall)x \geq -1$.

b) Fie numerele reale $a, b, c > 1$. Să se arate că:

$$\log_a(b\sqrt{b} - 2b + 4) + \log_b(c\sqrt{c} - 2c + 4) + \log_c(a\sqrt{a} - 2a + 4) \geq 3.$$

Când avem egalitate?

Problema 2.

Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ diferite două câte două, cu $|a| = |b| = |c| = 1$. Notăm

$$E = |b + c|^2 + |c + a|^2 + |a + b|^2.$$

a) Dacă $E = 3$ să se arate că triunghiul cu vârfurile de afixe a, b și c este echilateral.

b) Dacă $E = 4$ să se arate că triunghiul cu vârfurile de afixe a, b și c este dreptunghic.

Problema 3.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care are proprietatea $f(f(x)) = 2^x - 1$, pentru orice număr real x .

a) Să se arate că funcția f este injectivă.

b) Să se calculeze $f(0) + f(1)$.

Problema 4.

Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(xf(y) + f(x + y)) = y(f(x) + 1) + f(x), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Gazeta Matematică nr. 11/2023

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.