



MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Al treilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 20 mai 2023**

Problema 1. Determinați numerele naturale $n \geq 2$ cu cel puțin patru divizori naturali, care au proprietatea că pentru orice doi divizori proprii distincți d_1 și d_2 ai lui n , numărul întreg $d_1 - d_2$ îl divide pe n .

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și trei mulțimi de numere reale A, B, C disjuncte două câte două, fiecare dintre ele având câte n elemente. Notăm cu a numărul tripletelor $(x, y, z) \in A \times B \times C$ cu $x < y < z$ și cu b numărul tripletelor $(x, y, z) \in A \times B \times C$ cu $x > y > z$. Arătați că n îl divide pe $a - b$.

Problema 3. Fie triunghiurile echilaterale congruente ABC și DEF cu centrele O_1 , respectiv O_2 , astfel încât segmentul AB intersectează segmentele DE și DF în M , respectiv N , iar segmentul AC intersectează segmentele DF și EF în P , respectiv Q . Notăm cu I intersecția dintre bisectoarele unghiurilor EMN și DPQ și cu J intersecția dintre bisectoarele unghiurilor FNM și EQP .

Demonstrați că IJ este mediatoarea segmentului O_1O_2 .

Problema 4. Fie a un număr real pozitiv. Demonstrați că nu există numerele reale b și c , cu $b < c$, astfel încât pentru orice numere distincte $x, y \in (b, c)$ să avem $\left| \frac{x+y}{x-y} \right| \leq a$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.