Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Al doilea baraj de selecţie pentru OBMJ
București, 29 aprilie 2023

Problema 1. Determinați numerele reale $x, y, z > 0$ pentru care

$$xyz \leqslant \min\left\{4\left(x-\frac{1}{y}\right),\ 4\left(y-\frac{1}{z}\right),\ 4\left(z-\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Problema 2. Se consideră un triunghi ABC ascuțitunghic, cu $BC > AB$, astfel încât punctele A, H, I și C sunt conciclice (unde H este ortocentrul, iar I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC).

Dreapta AC intersectează cercul circumscris triunghiului BHC în punctul T, iar dreapta BC intersectează cercul circumscris triunghiului AHC în punctul P. Dacă dreptele PT și HI sunt paralele, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Problema 3. Fie un hexagon regulat de latură 2. Prin vârfurile și mijloacele laturilor sale construim paralele la laturi, care îl împart în 24 de triunghiuri echila-terale congruente, ale căror vârfuri le numim *noduri*. Numim *foaie* suprafața oricărui triunghi echilateral cu vârfurile în aceste noduri. Pentru fiecare nod X, numim *trio* al său figura formată din trei foi cu vârful comun X, astfel încât intersecția oricăror două foi este tot punctul X, iar foile sale sunt necongruente două câte două.

a) Determinați valoarea maximă a ariei unui trio.

b) Arătați că există un nod cu ale cărui triouri se poate acoperi suprafața hexagonului și există un nod cu ale cărui triouri nu se poate acoperi toată suprafața hexagonului.

c) Determinați numărul tuturor triourilor asociate hexagonului.

Problema 4. Fie $M \geqslant 1$ un număr real. Determinați toate numerele naturale n pentru care există numerele naturale $a, b, c > M$, distincte două câte două, astfel încât

$$n = (a,b)\cdot(b,c) + (b,c)\cdot(c,a) + (c,a)\cdot(a,b)$$

(prin (x, y) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor naturale x și y).

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 29 aprilie 2023

Barem și schemă de corectare

Problema 1. Determinați numerele reale $x, y, z > 0$ pentru care

$$xyz \leqslant \min\left\{4\left(x-\frac{1}{y}\right),\ 4\left(y-\frac{1}{z}\right),\ 4\left(z-\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Soluție și barem. Din ipoteză, avem $xyz \leqslant \dfrac{4(xy-1)}{y}$, $xyz \leqslant \dfrac{4(yz-1)}{z}$ și $xyz \leqslant \dfrac{4(zx-1)}{x}$. Cum $(xy-2)^2 \geqslant 0$, obținem $\dfrac{4(xy-1)}{y} \leqslant x^2y$, de unde rezultă că $\dfrac{4(xy-1)}{y} \leqslant x^2y \leqslant \dfrac{4(zx-1)}{z}$. Atunci $x-\dfrac{1}{y} \leqslant x-\dfrac{1}{z}$, de unde $\dfrac{1}{z} \leqslant \dfrac{1}{y}$, adică $y \leqslant z$. **3p**

Analog deducem $\dfrac{4(yz-1)}{z} \leqslant \dfrac{4(xy-1)}{x}$, deci $z \leqslant x$, și $\dfrac{4(zx-1)}{x} \leqslant \dfrac{4(yz-1)}{y}$, adică $x \leqslant y$. Rezultă ca $x=y=z$. **2p**

Așadar $x^3 \leqslant \dfrac{4\left(x^2-1\right)}{x}$, deci $\left(x^2-2\right)^2 \leqslant 0$, adică $x^2=2$. Deoarece $x>0$, obținem soluția $x=y=z=\sqrt{2}$. **2p**

Soluție alternativă. Din ipoteză, avem $xyz \leqslant \dfrac{4(xy-1)}{y}$, de unde $(xy)(yz) \leqslant 4(xy-1)$ și analog, $(yz)(zx) \leqslant 4(yz-1)$, respectiv $(zx)(xy) \leqslant 4(zx-1)$.

Notând $xy=c$, $yz=a$, $zx=b$, obținem $ab \leqslant 4(a-1)$, $bc \leqslant 4(b-1)$ și $ca \leqslant 4(c-1)$, relații care, împărțite prin a, b, respectiv c, se pot rescrie $b+\dfrac{4}{a} \leqslant 4$, $c+\dfrac{4}{b} \leqslant 4$ și $a+\dfrac{4}{c} \leqslant 4$, de unde rezultă că $a+b+c+\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{4}{c} \leqslant 12$, (1) **3p**

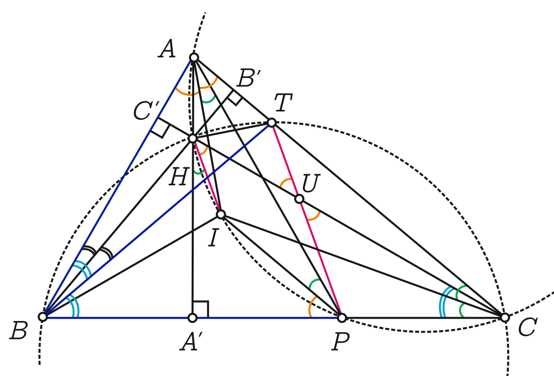
Dar $a+\dfrac{4}{a} \geqslant 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}}=4$ și analoagele, deci $a+b+c+\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{4}{c} \geqslant 12$, (2) **2p**

Din (1) și (2) deducem că toate inegalitățile obținute pe parcurs se verifică pe cazul de egalitate, de unde găsim că $a=b=c=2$. Atunci $xy=yz=zx=2$, deci $(xy\cdot yz\cdot zx)^2=8$. Cum $x,y,z>0$, rezultă $xyz=2\sqrt{2}$, de unde $x=y=z=\sqrt{2}$ **2p**

Al doilea test de selecție pentru OBMJ
București, 29 aprilie 2023

Barem și schemă de corectare

Problema 2. Se consideră un triunghi ABC ascuțitunghic, cu $BC > AB$, astfel încât punctele A, H, I și C sunt conciclice (H este ortocentrul, iar I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC). Dreapta AC intersectează cercul circumscris triunghiului BHC în punctul T, iar dreapta BC intersectează cercul circumscris triunghiului AHC în punctul P. Dacă dreptele PT și HI sunt paralele, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.



Soluție și barem. Fie U intersecția dreptelor CH și PT și A', B', C' picioarele înălțimilor din A, B, respectiv C ale triunghiului ABC.

Patrulaterul $AHIC$ este inscriptibil, așadar $\sphericalangle CHI = \sphericalangle CAI = \dfrac{\sphericalangle A}{2}$. Din $PT \parallel HI$ rezultă că $\sphericalangle HUT = \sphericalangle CHI = \dfrac{\sphericalangle A}{2}$ (a.i.).

Obținem $\sphericalangle CUP = \sphericalangle HUT = \dfrac{\sphericalangle A}{2}$. (1)

Patrulaterul $AHIC$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle A'HI = \sphericalangle ACI = \dfrac{\sphericalangle C}{2}$. Din triunghiul $A'HC$ rezultă că $\sphericalangle A'CH = 90^\circ - \sphericalangle A'HC = 90^\circ - \dfrac{\sphericalangle A + \sphericalangle C}{2} = \dfrac{\sphericalangle B}{2}$. Din triunghiul dreptunghic BCC', deoarece $\sphericalangle CBC' + \sphericalangle BCC' = 90^\circ$, obținem $\sphericalangle B + \dfrac{\sphericalangle B}{2} = 90^\circ$, deci $\sphericalangle B = 60^\circ$ **3p**

Din triunghiurile dreptunghice ABB' și ACC', avem $\sphericalangle ABB' = \sphericalangle ACC' = 90^\circ - \sphericalangle A$.

Patrulaterul $BCTH$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle B'BT = \sphericalangle TCH = 90^\circ - \sphericalangle A = \sphericalangle ABB'$.

Așadar BB' este bisectoare și înălțime în triunghiul ABT, deci $AB = BT$. **1p**

Patrulaterul $AHIC$ este inscriptibil, așadar $\sphericalangle BPI = \sphericalangle CAI = \dfrac{\sphericalangle A}{2}$ și $\sphericalangle API = \sphericalangle ACI = \dfrac{\sphericalangle C}{2}$.

Obținem $\sphericalangle APB = \dfrac{\sphericalangle A + \sphericalangle C}{2} = 60^\circ = \sphericalangle B$, deci triunghiul ABP este echilateral. **1p**

În consecință $BP = AB = BT$ și din triunghiul isoscel BPT rezultă $\sphericalangle BPT = \dfrac{180^\circ - \sphericalangle PBT}{2}$.

Triunghiul ABT este isoscel, deci $\sphericalangle ABT = 180^\circ - 2\sphericalangle A$. Cum $\sphericalangle PBT = \sphericalangle B - \sphericalangle ABT$, obținem $\sphericalangle PBT = 2\sphericalangle A - 120^\circ$ și deducem că $\sphericalangle BPT = 150^\circ - \sphericalangle A$ (2). **1p**

Dar $\sphericalangle BPT$ este exterior triunghiului CPU, deci $\sphericalangle BPT = \sphericalangle CUP + \sphericalangle PCU$. Din (1) și (2) obținem $150^\circ - \sphericalangle A = \dfrac{\sphericalangle A}{2} + \dfrac{\sphericalangle B}{2} = \dfrac{\sphericalangle A}{2} + 30^\circ$, deci $\sphericalangle A = 80^\circ$ și $\sphericalangle C = 40^\circ$. **1p**

Al doilea test de selecție pentru OBMJ
București, 29 aprilie 2023

Barem și schemă de corectare

Problema 3. Fie un hexagon regulat de latură 2. Prin vârfurile și mijloacele laturilor sale construim paralele la laturi, care îl împart în 24 de triunghiuri echilaterale congruente, ale căror vârfuri le numim *noduri*. Numim *foaie* suprafața oricărui triunghi echilateral cu vârfurile în aceste noduri. Pentru fiecare nod X, numim *trio* al său figura formată din trei foi cu vârful comun X, astfel încât intersecția oricăror două foi este tot punctul X, iar foile sale sunt necongruente două câte două.

a) Determinați valoarea maximă a ariei unui trio.

b) Arătați că există un nod cu ale cărui triouri se poate acoperi suprafața hexagonului și există un nod cu ale cărui triouri nu se poate acoperi toată suprafața hexagonului.

c) Determinați numărul tuturor triourilor asociate hexagonului.

Soluție și barem. a) Fie hexagonul regulat $ABCDEF$, de centru O, și $T, U, V, X, Y,$ Z mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF, respectiv FA. Observăm că niciun nod care are un trio nu se poate afla pe laturile hexagonului. Așadar nodurile care au triouri sunt O, sau nodurile aflate la distanța 1 de O, pe care le notăm cu M, N, P, Q, R, S, ca în figura 1. .... **1p**

Foile pot fi triunghiuri echilaterale de latură $1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{7}, 3$, respectiv $2\sqrt{3}$. Foile de latură 3, respectiv $2\sqrt{3}$ nu pot face parte dintr-un trio, căci vârfurile lor sunt pe laturile hexagonului. Din O nu putem construi triouri de latură $\sqrt{7}$, iar singurele două foi de latură $\sqrt{7}$ cu vârful în R sunt RAU și RCT. Din R nu putem construi foi de latură 2 disjuncte de cea de latură $\sqrt{7}$.

Trioul cu foile RAU, RDP și REY, din figura 1, are aria maximă. Aria sa este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{4} = \frac{11\sqrt{3}}{4}$. **1p**

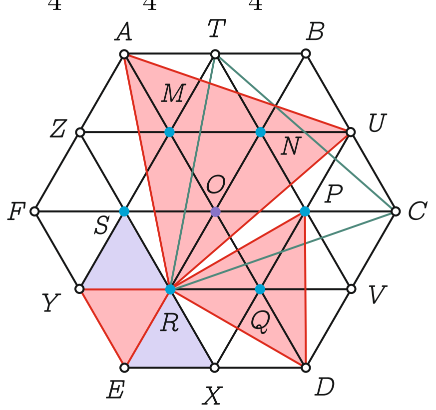


Figura 1

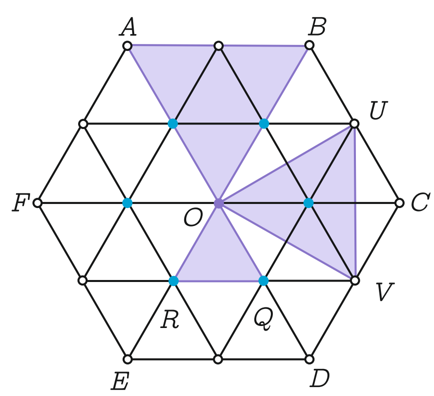


Figura 2

b) În trioul colorat din figura 2, foaia OAB acoperă o șesime din hexagon. Analog găsim câte un trio al lui O care are ca foi triunghiurile OBC, OCD, ODE, OEF, respectiv OFA, iar aceste șase triouri acoperă hexagonul. **1p**

Există exact două foi de latură maximă cu un vârf în R, și anume RAU și RCT, cu latura $\sqrt{7}$. Cum $RB = 3 > \sqrt{7}$, nu toate punctele segmentului RB sunt acoperite de triourile lui R **1p**

c) Spunem că un trio este de tip (x, y, z), dacă lungimile laturilor foilor sale sunt x, y, z.

Centrul O al hexagonului are doar triouri de tip $(1, \sqrt{3}, 2)$, ca în exemplul din figura 2. Pentru foaia OQR, singurele foi de latură 2 pe care le putem alege sunt OAF, OAB și OBC, iar în fiecare caz putem alege în două moduri foaia de latură $\sqrt{3}$, așadar există 6 triouri care conțin foaia OQR. Sunt 6 foi de latură 1 cu vârful O, așadar există 36 de triouri ale lui O. **1p**

Punctul R poate avea doar triouri de tipurile $(1, \sqrt{3}, 2)$ și $(1, \sqrt{3}, \sqrt{7})$.

Pentru foile RDP și RNZ există 2 alegeri ale foilor de latură 1: REX și REY, la fel pentru foile RFM și RNV, așadar nodul R are 4 triouri de tip $(1, \sqrt{3}, 2)$. Pentru foile RAU și RDP există 3 alegeri ale foilor de latură 1: REX, REY și RSY, la fel pentru foile RCT și RFM, așadar nodul R are 6 triouri de tip $(1, \sqrt{3}, \sqrt{7})$. Rezultă că în hexagon mai sunt alte 60 de triouri. În total, sunt 96 de triouri asociate hexagonului. **2p**

Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Al doilea test de selecție pentru OBMJ
București, 29 aprilie 2023

Barem și schemă de corectare

Problema 4. Fie $M \geqslant 1$ un număr real. Determinați toate numerele naturale n pentru care există numerele naturale $a, b, c > M$, distincte două câte două, astfel încât

$$n = (a,b)\cdot(b,c) + (b,c)\cdot(c,a) + (c,a)\cdot(a,b)$$

(prin (x,y) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor naturale x și y).

Soluție și barem. Numim *bun* un număr natural n pentru care există $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = (a,b)\cdot(b,c) + (b,c)\cdot(c,a) + (c,a)\cdot(a,b)$.

Vom demonstra că numerele n pentru care există $a, b, c > M$ astfel ca n să fie bun sunt numerele de forma $n = 2^{2t}(2k+1)$, unde $t, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, (1). **1p**

Fie $k \geqslant 1$ și $p, q, r > M$ trei numere prime distincte astfel încât $r > \max\{kp, kq\}$. Pentru $a = kp$, $b = kq$ și $c = r$ obținem $(a,b) = k$ și $(b,c) = (c,a) = 1$, de unde rezultă că $(a,b)\cdot(b,c) + (b,c)\cdot(c,a) + (c,a)\cdot(a,b) = 2k+1$, deci $2k+1$ este bun **2p**

Fie $t \in \mathbb{N}$ și n un număr natural pentru care există $a, b, c > M$, distincte două câte două, astfel încât $n = (a,b)\cdot(b,c)+(b,c)\cdot(c,a)+(c,a)\cdot(a,b)$. Pentru orice $t \in \mathbb{N}$, avem $2^t a, 2^t b, 2^t c > M$ și $2^{2t}\cdot n = (2^t a, 2^t b)\cdot(2^t b, 2^t c) + (2^t b, 2^t c)\cdot(2^t c, 2^t a) + (2^t c, 2^t a)\cdot(2^t a, 2^t b)$, așadar numerele de forma din afirmația (1) sunt bune. **1p**

Vom arăta că numerele de forma $n = 2^t$ sau $n = 2^{2t+1}(2k+1)$, unde $t, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, nu sunt bune, deci nu pot verifica nici proprietatea din enunț.

Mai întâi, demonstrăm că orice număr natural bun par este divizibil cu 4. Într-adevăr, dacă n_0 este par și $n_0 = (a,b)\cdot(b,c) + (b,c)\cdot(c,a) + (c,a)\cdot(a,b)$, atunci numerele (a,b), (b,c) și (c,a) nu pot fi toate impare. Dacă, de exemplu, $2 \mid (a,b)$, atunci $2 \mid (b,c)\cdot(c,a)$, deci a, b și c sunt pare (celelalte cazuri sunt analoage). Rezultă că $4 \mid n_0$, iar numărul $\dfrac{n_0}{4}$ este și el bun, deoarece $\dfrac{n_0}{4} = (a',b')\cdot(b',c') + (b',c')\cdot(c',a') + (c',a')\cdot(a',b')$, cu $a' = \dfrac{a}{2}$, $b' = \dfrac{b}{2}$, $c' = \dfrac{c}{2}$ **1p**

Ca urmare, presupunând că $n = 2^t$, cu $t \geqslant 2$ este bun, atunci 2^{t-2}, 2^{t-4}, 2^{t-6}, ... etc. sunt bune, deci 1 sau 2 ar trebui să fie bune, absurd, deoarece dacă $a, b, c \geqslant 1$, atunci $(a,b)\cdot(b,c) + (b,c)\cdot(c,a) + (c,a)\cdot(a,b) \geqslant 3$. Similar, dacă $n = 2^{2t+1}(2k+1)$, unde $t, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ este bun, atunci $2^{2t-1}(2k+1)$, $2^{2t-3}(2k+1)$, ..., $2(2k+1)$ sunt bune, absurd, deoarece $2(2k+1)$ nu este divizibil cu 4 .... **2p**