



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Brașov, 13 aprilie 2023**

Problema 1. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care există numerele naturale nenule distincte a, b, c , cu proprietatea că $n = a + b + c$ și $(a + b)(b + c)(c + a)$ este un cub perfect.

Problema 2. Se consideră un triunghi ABC . Fie punctele P și Q pe laturile AB , respectiv AC , astfel încât $AP = AQ$, iar dreapta PQ trece prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC . Notăm cu M cel de-al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor BPI și CQI , cu D intersecția dreptelor PM și BI și cu E intersecția dreptelor QM și CI . Demonstrați că dreapta MI trece prin mijlocul segmentului DE .

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele $2^3 - 2, 3^3 - 3, 4^3 - 4, \dots, (2n+1)^3 - (2n+1)$, unde n este un număr natural, cu $n \geq 2$. O operație înseamnă ștergerea a trei numere arbitrare a, b, c de pe tablă și înlocuirea acestora cu numărul $\frac{abc}{ab + bc + ca}$. Se efectuează mai multe operații, până când pe tablă rămân două numere. Arătați că suma ultimelor două numere rămase pe tablă este mai mare decât 16.

Problema 4. Un cub cu latura 3 este împărțit în 27 de cuburi de latură 1, iar în interiorul fiecăruia dintre ele este scris câte un număr natural nenul. Numim *fâșie* orice paralelipiped dreptunghic $1 \times 1 \times 3$ format din trei cuburi cu latura 1 care au trei fețe coplanare. Orice număr mai mare decât 1 care este scris într-unul dintre cuburile de latură 1 este suma a trei dintre numerele din celelalte cuburi, câte unul de pe fiecare fâșie pe care se află. Demonstrați că, indiferent de alegerea numerelor, în cubul cu latura 3 vor exista cel puțin 16 numere mai mici sau egale cu 60.

Problema 5. În exteriorul trapezului $ABCD$ cu baza mică AB , construim pătratele $ADEF$ și $BCGH$. Demonstrați că mediatoarea laturii AB trece prin mijlocul segmentului FH .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Primul test de selecție pentru OBMJ
Brașov, 13 aprilie 2023**

Barem și schemă de corectare

Problema 1. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care există numerele naturale nenule distincte a, b, c , cu proprietatea că $n = a + b + c$ și $(a + b)(b + c)(c + a)$ este un cub perfect.

Soluție și barem. Fie n minimul căutat, iar $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ distincte, astfel încât $n = a + b + c$ și $(a + b)(b + c)(c + a) = k^3$, cu $k \in \mathbb{N}$.

I Dacă toate numerele a, b, c sunt pare, atunci pentru numerele naturale nenule și distincte $a' = \frac{a}{2}$, $b' = \frac{b}{2}$ și $c' = \frac{c}{2}$, avem $\frac{n}{2} = a' + b' + c' \in \mathbb{N}$, iar $(a' + b')(b' + c')(c' + a') = \left(\frac{k}{8}\right)^3 \in \mathbb{N}$, contradicție cu faptul că n este minim. **2p**

II Dacă toate numerele a, b, c sunt impare, atunci $n \geq 1 + 3 + 5 = 9$. Deoarece $(1, 3, 5)$ nu verifică condiția ca $(a + b)(b + c)(c + a)$ să fie cub perfect, rezultă că $n \geq 9 + 2 = 11$ **1p**

III. Dacă numerele a, b, c nu au toate aceeași paritate, fără să restrângem generalitatea, considerăm că doar numerele a și b au aceeași paritate. Rezultă că $a + b$ este par, iar numerele $c + a$ și $b + c$ sunt impare. Atunci $2 \mid (a + b)(b + c)(c + a) = k^3$, deci $2 \mid k$, așadar $8 \mid (a + b)(b + c)(c + a)$. Cum numerele $b + c$ și $c + a$ sunt impare, rezultă că $8 \mid a + b$, deci $a + b \geq 8$ **1p**

Dacă $n = 9$, atunci $a + b = 8$ și $c = 1$, iar $(b + c)(c + a) = ab + 9$ trebuie să fie cub perfect, deci $ab \geq 18$. Dar $4 = \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$, deci $ab \leq 16$, contradicție. Așadar $n \geq 10$ **2p**

Observăm că pentru $n = 10$ și $a = 1, b = 2, c = 7$ sunt îndeplinite condițiile din ipoteză. Ținând cont de **I**, **II** și **III** deducem că valoarea minimă a lui n este 10. **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Primul test de selecție pentru OBMJ
Brașov, 13 aprilie 2023**

Problema 2. Se consideră un triunghi ABC . Fie punctele P și Q pe laturile AB , respectiv AC , astfel încât $AP=AQ$, iar dreapta PQ trece prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC . Notăm cu M cel de-al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor BPI și CQI , cu D intersecția dreptelor PM și BI și cu E intersecția dreptelor QM și CI . Demonstrați că dreapta MI trece prin mijlocul segmentului DE .

Soluție și barem. Triunghiul APQ este isoscel, deci $\sphericalangle APQ = \sphericalangle AQP$. Patrulaterul $BMIP$ și $CMIQ$ sunt inscriptibile, așadar $\sphericalangle APQ = \sphericalangle BMI$ și $\sphericalangle AQP = \sphericalangle CMI$, în consecință $\sphericalangle BMI = \sphericalangle CMI$. (1) **1p**
Notăm cu K intersecția dreptelor IM și BC .

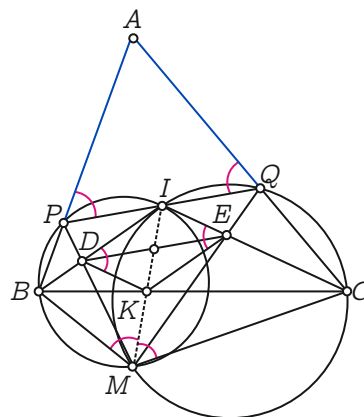
Deoarece BI este bisectoarea lui $\sphericalangle ABC$ și patrulaterul $BMIP$ este inscriptibil, avem $\sphericalangle IMP = \sphericalangle IBP = \sphericalangle IBK$. Din $\sphericalangle KMD = \sphericalangle KBD$ rezultă că patrulaterul $BDKM$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle IDK = \sphericalangle BMK$. Analog deducem că $CEKM$ este inscriptibil, iar $\sphericalangle IEK = \sphericalangle CMK$.

Folosind (1), rezultă că $\sphericalangle IDK = \sphericalangle IEK$ **3p**

Patrulaterul $BDKM$ și $BMIP$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle BKD = \sphericalangle BMD = \sphericalangle BIP$ (2)

Patrulaterul $CEKM$ și $CMIQ$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle CKE = \sphericalangle CME = \sphericalangle CIQ$ (3)

Din (2) și (3) deducem că $\sphericalangle BKD + \sphericalangle CKE = \sphericalangle BIP + \sphericalangle CIQ$. În consecință, rezultă:
 $\sphericalangle DKE = 180^\circ - (\sphericalangle BKD + \sphericalangle CKE) = 180^\circ - (\sphericalangle BIP + \sphericalangle CIQ) = \sphericalangle DIE$ **2p**
 $\sphericalangle IDK = \sphericalangle IEK$ și $\sphericalangle DKE = \sphericalangle DIE$, deci $DIEK$ este paralelogram, așadar dreapta KI trece prin mijlocul segmentului DE . Cum punctele I, K, M sunt coliniare, rezultă concluzia. **1p**





MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Primul test de selecție pentru OBMJ
Brașov, 13 aprilie 2023**

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele $2^3 - 2, 3^3 - 3, 4^3 - 4, \dots, (2n+1)^3 - (2n+1)$, unde n este un număr natural, cu $n \geq 2$. O *operație* înseamnă ștergerea a trei numere arbitrare a, b, c de pe tablă și înlocuirea acestora cu numărul $\frac{abc}{ab+bc+ca}$. Se efectuează mai multe operații, până când pe tablă rămân două numere. Arătați că suma ultimelor două numere rămase pe tablă este mai mare decât 16.

Soluție și barem. Deoarece $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{\frac{abc}{ab+bc+ca}}$, pentru orice numere

pozitive a, b, c , rezultă că, după orice operație, suma inverselor numerelor rămase pe tablă este egală cu cea a inverselor numerelor inițiale. Așadar, suma ultimelor două numere rămase pe tablă este egală cu suma S a inverselor numerelor inițiale. **2p**

Deoarece $\frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right)$, pentru orice $k > 1$, obținem:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{3^3 - 3} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^3 - (2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) = \frac{2n^2 + 3n}{8n^2 + 12n + 4}. \end{aligned}$$

..... **2p**
Fie x și y ultimele două numere rămase pe tablă. Avem $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{2n^2 + 3n}{8n^2 + 12n + 4}$.

Deoarece $\frac{4}{x+y} \leq \frac{x+y}{xy}$, pentru orice $x, y > 0$, din (1) rezultă $\frac{4}{x+y} \leq \frac{2n^2 + 3n}{8n^2 + 12n + 4} < \frac{1}{4}$, de unde obținem $x+y > 16$ **3p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Primul test de selecție pentru OBMJ
Brașov, 13 aprilie 2023**

Problema 4. Un cub cu latura 3 este împărțit în 27 de cuburi de latură 1, iar în interiorul fiecăruia dintre ele este scris câte un număr natural nenul. Numim *fâșie* orice paralelipiped dreptunghic $1 \times 1 \times 3$ format din trei cuburi cu latura 1 care au trei fețe coplanare. Orice număr mai mare decât 1 care este scris într-unul dintre cuburile de latură 1 este suma a trei dintre numerele din celelalte cuburi, câte unul de pe fiecare fâșie pe care se află. Demonstrați că, indiferent de alegerea numerelor, în cubul cu latura 3 vor exista cel puțin 16 numere mai mici sau egale cu 60.

Soluție și barem. Dacă toate numerele sunt egale cu 1, nu avem ce demonstra. Dacă cubul conține și numere mai mari ca 1, presupunem că în cub sunt scrise și numere pare și fie n cel mai mic dintre ele. Atunci n trebuie să fie suma a 3 numere impare, ceea ce este imposibil, deoarece suma a trei numere impare este un număr impar. Așadar toate numerele sunt impare. **1p**

Presupunem că există o fâșie care nu conține numărul 1. Fie a cel mai mic număr de pe acea fâșie. Deoarece $a > 1$, el este suma a trei numere mai mici ca el și mai mari decât 1, contradicție cu minimalitatea lui a . Așadar pe fiecare fâșie există cel puțin un 1, deci cubul conține cel puțin 9 de 1. **1p**

Fie $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{18}$ celelalte numere din cub. Dacă $a_1 > 3$, atunci unul dintre cele trei numere din cub a căror sumă este a_1 trebuie să fie mai mare ca 1 și mai mic decât a_1 , ceea ce contrazice minimalitatea lui a_1 . Așadar $a_1 \in \{1, 3\}$ **1p**

De aici, $a_2 \in \{1, 3, 5\}$. Dacă $a_2 \leq 3$, atunci $a_3 \leq 1 + a_1 + a_2 \leq 7$, iar dacă $a_2 = 5$, atunci a_1 și a_2 sunt pe o aceeași fâșie, deci nu pot face parte din scrierea lui a_3 , așadar $a_3 \leq 1 + 1 + a_2 = 7$. În consecință, $a_3 \in \{1, 3, 5, 7\}$ **1p**

Dacă $a_3 = 7$, atunci a_3 este pe o fâșie comună cu a_2 , deci a_3 și a_2 nu pot apărea simultan în scrierea lui a_4 , așadar $a_4 \leq a_3 + a_1 + 1 \leq 7 + 3 + 1 = 11$. Dacă $a_3 \leq 5$, avem: dacă $a_2 = 5$, atunci a_1 și a_2 sunt pe aceeași fâșie, deci $a_4 \leq a_3 + a_2 + a_1 \leq 5 + 5 + 1 = 11$, iar dacă $a_2 \leq 3$, atunci $a_4 \leq a_3 + a_2 + a_1 \leq 5 + 3 + 3 = 11$. În oricare caz, avem $a_4 \leq 11$ **1p**

În general, avem $a_{k+3} \leq a_{k+2} + a_{k+1} + a_k$.

Dacă a_{k+1} și a_{k+2} sunt pe o aceeași fâșie, atunci ele nu pot apărea simultan în scrierea lui a_{k+3} , și deoarece $a_{k+2} \leq a_{k+1} + a_k + a_{k-1}$, obținem $a_{k+3} \leq a_{k+2} + a_k + a_{k-1} \leq a_{k+1} + 2a_k + 2a_{k-1}$.

Dacă a_{k+1} și a_{k+2} sunt pe fâșii diferite, deoarece $a_{k+2} \leq a_k + a_{k-1} + a_{k-2}$, obținem $a_{k+3} \leq a_{k+2} + a_{k+1} + a_k \leq a_{k+1} + 2a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \leq a_{k+1} + 2a_k + 2a_{k-1}$.

Așadar, $a_{k+3} \leq a_{k+1} + 2a_k + 2a_{k-1}$, pentru orice $k \geq 2$. (1) **1p**

Din (1) deducem succesiv că $a_5 \leq 23$, $a_6 \leq 35$ și $a_7 \leq 59$, așadar cel puțin 16 numere sunt mai mici sau egale cu 60. **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Primul test de selecție pentru OBMJ
Brașov, 13 aprilie 2023**

Problema 5. În exteriorul trapezului $ABCD$, cu baza mică AB , construim pătratele $ADEF$ și $BCGH$. Demonstrați că mediatoarea laturii AB trece prin mijlocul segmentului FH .

Soluție și barem. Fie I mijlocul bazei AB . Alegem punctele M și Q pe baza CD , cu $DM = QC = AI$.

Evident, $AIMN$ și $BIQC$ sunt paralelograme, deci $IM = AD$, $IM \parallel AD$ și $IQ = BC$, $IQ \parallel BC$.

În exteriorul triunghiului IMQ , construim pătratele $IMNP$ și $IQRS$. Considerăm punctele U și V astfel încât $IPUS$ este paralelogram, iar V este proiecția lui I pe CD **1p**

Avem $\angle PIS + \angle PIM + \angle MIQ + \angle QIS = 360^\circ$, și deoarece $IPUS$ este paralelogram, deducem: $\angle PIS + \angle MIQ = 180^\circ = \angle IPU + \angle PIS$, așadar $\angle IPU = \angle MIQ$. Cum $IP = IM$ și $PU = IS = IQ$, rezultă că triunghiurile IPU și MIQ sunt congruente (L.U.L.), deci $\angle PIU = \angle IMQ$ **3p**

Triunghiul IMV este dreptunghic în V , deci $\angle MIV = 90^\circ - \angle IMV = 90^\circ - \angle PIU$. Obținem $\angle MIV + \angle PIU + \angle MIP = 180^\circ$, așadar punctele U, I, V sunt coliniare. Rezultă că UI este mediatoarea segmentului AB . Deoarece $IPUS$ este paralelogram, dreapta UI trece prin mijlocul J al diagonalei PS **1p**

Din $\angle DAF = \angle MIP = 90^\circ$ și $AD \parallel IM$, rezultă că $AF \parallel IP$ și cum $AF = IP$, patrulaterul $AIPF$ este un paralelogram. Așadar $FP \parallel AI$ și $FP = AI$. Analog se arată că $SH \parallel IB$ și $SH = IB$. Cum I este mijlocul segmentului AB , deducem că $FP \parallel SH$ și $FP = SH$, deci $FPHS$ este un paralelogram. În consecință, diagonala FH trece prin mijlocul J al segmentului PS , deci dreptele UI și FH sunt concurente. **2p**

