Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

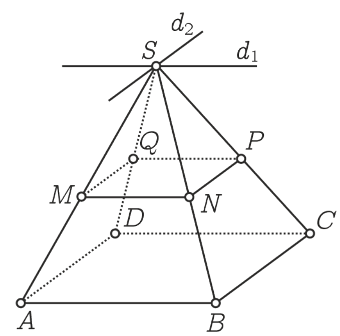
CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. Fie $SABCD$ o piramidă având ca bază paralelogramul $ABCD$. Pe muchiile SA, SB, SC și SD se consideră punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $MNPQ$ să fie un paralelogram.

a) Dacă $ABCD$ este un romb, arătați că $MNPQ$ este un romb.

b) Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, arătați că $MNPQ$ este un dreptunghi.

Gazeta Matematică



Soluție. Fie $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$ și $d_2 = (SBC) \cap (SDA)$. Cum $AB \parallel CD$, $AB \subset (SAB)$ și $CD \subset (SCD)$, din teorema acoperișului rezultă că $AB \parallel CD \parallel d_1$. Deoarece $MN \parallel PQ$, $MN \subset (SAB)$ și $PQ \subset (SCD)$, din teorema acoperișului rezultă că $MN \parallel PQ \parallel d_1$, prin urmare $AB \parallel CD \parallel MN \parallel PQ \parallel d_1$.

Analog se arată că $BC \parallel DA \parallel NP \parallel QM \parallel d_2$. **3p**

a) Folosind teorema fundamentală a asemănării, obținem

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SN}{SB} = \frac{NP}{BC}.$$

Dacă $ABCD$ este un romb, atunci $AB = BC$. Deducem că $MN = NP$, prin urmare paralelogramul $MNPQ$ este, și el, un romb. **2p**

b) Unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, atunci $\widehat{ABC} = 90°$. Întrucât $MN \parallel AB$ și $NP \parallel BC$, obținem că $\widehat{MNP} = 90°$, prin urmare paralelogramul $MNPQ$ este, și el, un dreptunghi. ... **2p**

Problema 2. Un triplet (a, b, c) de numere întregi se numește *artistic* dacă numărul $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ este întreg.

a) Determinați numerele întregi n pentru care tripletele $(n, n+1, n+3)$ sunt artistice.

b) Dacă (x, y, z) este un triplet artistic, arătați că numărul $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ este întreg.

Soluție. a) Tripletul $(n, n+1, n+3)$, $n \in \mathbb{Z}$, este artistic dacă și numai dacă numărul $\dfrac{3n^2+8n+3}{3n+4} = n + \dfrac{4n+3}{3n+4}$ este întreg.

Rezultă că $3n+4$ divide numărul $4(3n+4) - 3(4n+3) = 7$, de unde $n \in \{-1, 1\}$. Se verifică faptul că ambele variante convin (găsim tripletele artistice $(-1, 0, 2)$, respectiv $(1, 2, 4)$). ... **3p**

b) Deoarece numerele $x+y+z$ și $\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$ sunt întregi, rezultă că $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} = (x+y+z) - 2 \cdot \dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$ este număr întreg. **2p**

Apoi, $\dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x+y+z} = (xy+yz+zx) \cdot \dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z} - 2xyz$ este număr întreg. ... **1p**

În concluzie, $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z} = \left(x^2+y^2+z^2\right) \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} - 2 \cdot \dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x+y+z}$ este număr întreg. **1p**

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule a, b și c care verifică simultan condițiile:
(i) $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+2023^2\right)=(ab+2023c)^2$;
(ii) $\left(a^2+2023^2\right)\left(b^2+c^2\right)=(2023a+bc)^2$;
(iii) cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c și 2023 este egal cu 1.

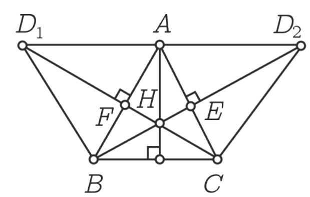
Soluție. Scădem membru cu membru egalitățile (i) și (ii) și obținem, prin calcul direct, că $\left(a^2-c^2\right)\left(b^2-2023^2\right)=0$. Cum $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, deducem că $a=c$ sau $b=2023$. **3p**

Dacă $a=c$, din (i) rezultă $\left(a^2-2023b\right)^2=0$, deci $a^2=2023b=7\cdot 17^2\cdot b$. Așadar $7\mid b$ și $7\mid a=c$, prin urmare cel mai mare divizor comun al numerelor a,b,c și 2023 este cel puțin egal cu 7, în contradicție cu (iii). **2p**

Dacă $b=2023$, din (i) rezultă că $\left(ac-2023^2\right)^2=0$, deci $ac=2023^2=7^2\cdot 17^4$.

Ținând cont de (iii), deducem că a și c sunt prime între ele și obținem soluțiile:
$(a,b,c)\in\left\{\left(1,2023,2023^2\right),\left(7^2,2023,17^4\right),\left(17^4,2023,7^2\right),\left(2023^2,2023,1\right)\right\}$. **2p**

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}=180^\circ$, $\widehat{ABC}\equiv\widehat{DAB}$, iar proiecția vârfului D pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC. Demonstrați că $AB=AC$ și $DB=DC$.



Soluție. Fie BE și CF înălțimile din B, respectiv C ale triunghiului ABC, iar H punctul lor de intersecție.

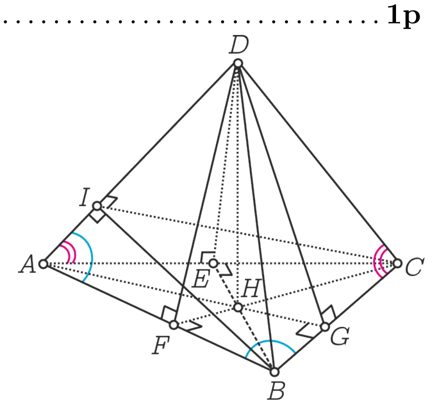
Din teorema celor trei perpendiculare, obținem că $DE\perp AC$ și $DF\perp AB$. **1p**

Desfășurăm tetraedrul în planul (ABC). Notăm cu D_1 poziția în care ajunge vârful D al triunghiului DAB și cu D_2 poziția în care ajunge vârful D al triunghiului DAC. **1p**
Perpendicularitățile $DE\perp AC$ și $DF\perp AB$ se mențin și pe desfășurare. Deducem că, pe desfășurare, punctele D_1, F și C, respectiv D_2, E și B sunt coliniare. **1p**

Din $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}=180^\circ$ rezultă că punctele D_1, A și D_2 sunt coliniare; evident că A este mijlocul segmentului D_1D_2. .... **1p**

Deoarece $\widehat{ABC}\equiv\widehat{DAB}$, dreptele D_1D_2 și BC sunt paralele, așadar patrulaterul D_1D_2CB este un trapez, ale cărui diagonale se intersectează în H. Dreapta AH trece prin mijlocul bazei mari, deci conține și mijlocul bazei mici BC. Dar AH este înălțime a triunghiului ABC. Fiind și mediană, urmează că triunghiul ABC este isoscel, cu $AB=AC$ **2p**

Dreapta AH este mediatoarea comună a bazelor trapezului D_1D_2CB, așadar acesta este un trapez isoscel. Astfel, $D_1B=D_2C$, deci $DB=DC$. **1p**



Soluție alternativă. Din $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}=180^\circ$, $\widehat{ABC}\equiv\widehat{DAB}$ și $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^\circ$ rezultă că $\widehat{CAD}\equiv\widehat{ACB}$ **1p**

Fie H ortocentrul triunghiului ABC, BE, CF și AG înălțimile triunghiului ABC. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $DE\perp AC$, $DF\perp AB$ și $DG\perp BC$....... **1p**

Triunghiurile ABG și DAF sunt asemenea, așadar avem $\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{DF}{AD}$, deci $AG\cdot AD=DF\cdot AB$. **1p**

Triunghiurile ACG și DAE sunt asemenea, deci $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{DE}{AD}$, adică $AG \cdot AD = DE \cdot AC$. ..**1p**

Așadar $DF \cdot AB = DE \cdot AC$, deci $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$ **1p**

Din $AG \perp BC$ și $DG \perp BC$ rezultă $BC \perp (ADG) \Rightarrow BC \perp AD$. Dacă $BI \perp AD$ cu $I \in AD$, atunci $AD \perp (BIC)$. **1p**

Rezultă că $CI \perp AD$, deci $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD} \Leftrightarrow BI = CI$, de unde deducem că triunghiurile AIB și AIC sunt congruente, deci $AB = AC$. Analog deducem că triunghiurile DIB și DIC sunt congruente, deci $DB = DC$. **1p**