OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2022
CLASA a XI- a
BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1

Se consideră matricele $A, B \in M_2(R)$ cu proprietățile: $AB = A^2B^2 - (AB)^2$ și $\det B = 2023$.

a) Arătați că A nu este inversabilă.

b) Aratati că există $\alpha \in R$ astfel încât $\det(A + xB) = \alpha x + \det B \cdot x^2, (\forall) x \in R$.

c) Determinați $m \in R^*$, știind că $\det(A + mB) - \det(B + mA) = 2023$.

Soluție:

a) $AB = A^2B^2 - (AB)^2 \Rightarrow A \cdot B = A^2B^2 - ABAB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = A(AB^2 - BAB) \Rightarrow AB = A(AB - BA)B.$

$\left.\begin{array}{l} AB = A(AB-BA)B \\ \det B \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow A = A(AB - BA) \Rightarrow A(I_2 - AB + BA) = O_2.$ ....**(1p)**

Dacă A este inversabilă $\Rightarrow I_2 - AB + BA = O_2 \Rightarrow AB - BA = I_2 \Rightarrow Tr(AB - BA) = Tr(I_2) \Rightarrow$

$Tr(AB) - Tr(BA) = 2 \Rightarrow 0 = 2 \Rightarrow$ fals $\Rightarrow$ A nu este inversabilă....................................... **(1p)**

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \ A, B \in M_2(R).$

Prin calcul direct (utilizând proprietățile determinanților) se demonstrează relația:

$\det(A + xB) = \det A + \alpha x + \det B \cdot x^2, (\forall)\, x \in R$ și $\alpha = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} \in R$.....................**(1p)**

Din a) avem că A este neinversabilă, deci det A=0, de unde rezultă:

$\det(A + xB) = \alpha x + \det B \cdot x^2, (\forall) x \in R$ și $\alpha \in R$. .... **(1p)**

c) $\det(A + xB) = \alpha x + \det B \cdot x^2 = \alpha x + 2023 \cdot x^2$.

Avem $\det(A + mB) = \alpha m + 2023m^2$. ....**(1p)**

$\det(B + mA) = \det\left(m\left(A + \frac{1}{m}B\right)\right) = m^2 \det\left(A + \frac{1}{m} \cdot B\right) = m^2 \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{m} + 2023 \cdot \frac{1}{m^2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(B + mA) = \alpha\, m + 2023.$ ……………………………………………………………(**1p**)

$\det(A + mB) - \det(B + mA) = \alpha \cdot m + 2023 \cdot m^2 - m \cdot \alpha - 2023 = 2023(m^2 - 1).$

Obținem: $2023(m^2 - 1) = 2023 \Rightarrow m^2 - 1 = 1 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2} \in R^*$. …………………(**1p**)

Problema 2

Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Aratati ca dacă matricea $X \in M_2(R)$ verifică relația $MX = XM$, atunci există $a, b \in R$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}$.

b) Determinați matricea $X \in M_2(R)$, știind că $X^{2023} = M$.

Soluție:

a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R)$;

$M \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-7c & 8b-7d \\ 7a-6c & 7b-6d \end{pmatrix}$.

$X \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a+7b & -7a-6b \\ 8c+7d & -7c-6d \end{pmatrix}$ ……………………………………………(**1p**)

Egalând cele două matrice se obține sistemul:

$\begin{cases} 8a-7c = 8a+7b \\ 8b-7d = -7a-6b \\ 7a-6c = 8c+7d \\ 7b-6d = -7c-6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -b \\ d = a+2b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}, a, b \in R.$ ……………………(**1p**)

b) $X^{2024} = X^{2023} \cdot X = M \cdot X$ și $X^{2024} = X \cdot X^{2023} = X \cdot M \Rightarrow XM = MX \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}, a, b \in R.$ …………………………………………..…………………(**1p**)

$\det(X^{2023}) = -48 + 49 \Rightarrow (\det X)^{2023} = 1 \Rightarrow \det X = 1.$

Dar $\det X = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \Rightarrow a + b = \pm 1.$ ………………………………………(**1p**)

Cazul I.

Dacă $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow$

$X = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a-1 & 2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1+1 & -(a-1) \\ a-1 & 1+1-a \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (a-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = I_2 + (a-1)A,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

$X^{2023} = (I_2 + (a-1)A)^{2023} = I_2 + (a-1)C_{2023}^{1}A = I_2 + 2023(a-1)A$ ……………………….(**1p**)

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = I_2 + 2023(a-1)A \Rightarrow 2023(a-1)A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow 2023(a-1)A = 7A$

$$\Rightarrow 2023(a-1) = 7 \Rightarrow a - 1 = \frac{7}{2023}$$

Dar $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (a-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 + \frac{7}{2023} & -\frac{7}{2023} \\ \frac{7}{2023} & 1 - \frac{7}{2023} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2023}\begin{pmatrix} 2030 & -7 \\ 7 & 2016 \end{pmatrix}$.   (**1p**)

Cazul II.

Dacă $a + b = -1 \Rightarrow b = -1 - a \Rightarrow$

$X = \begin{pmatrix} a & -1-a \\ a+1 & -2-a \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (a+1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$X = -I_2 + (a+1)A,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

$\Rightarrow X^n = (-I_2 + (a+1)A)^n = (-1)^n I_2 + (-1)^{n-1} n(a+1)A$.

$X^{2023} = -I_2 + 2023(a+1)A \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2023a + 2022 & -2023a - 2023 \\ 2023a + 2023 & -2023a - 2024 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2023a + 2022 = 8 \Rightarrow a = \dfrac{-2014}{2023} \\ -2023a - 2023 = -7 \Rightarrow a = \dfrac{-2016}{2023} \end{cases}$$

$\Rightarrow$Ecuația nu are soluții dacă $a + b = -1$. ……………………………………………………….(**1p**)

Problema 3

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ și $a_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$, $n \geq 2$.

a) Calculați a_1, a_2 și a_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(\frac{1}{16} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)}{a_k^2} \right)^{\ln n}$.

Soluție:

a) $a_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$……………………………………………………(**1p**)

$$a_2 = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cdot\left(1+\sqrt{\cos 2x}-1\right)}{x^2} = a_1 + \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\left(\sqrt{\cos 2x}-1\right)}{x^2}$$

$\Rightarrow\ a_2 = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2 x}{x^2} = \frac{3}{2}$ ....**(1p)**

Avem: $a_n = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\dots\cdot\sqrt[n-1]{\cos(n-1)x}\left(1+\sqrt[n]{\cos nx}-1\right)\cdot}{x^2}\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ a_n = a_{n-1} + \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt[n]{\cos nx}\right)\cdot\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\dots\sqrt[n-1]{\cos(n-1)x}\cdot}{x^2} =$$

$$= a_{n-1} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx\cdot}{x^2\left(1+\sqrt[n]{\cos nx}+\sqrt[n]{\cos^2 nx}+\dots+\sqrt[n]{\cos^{n-1} nx}\right)} = a_{n-1} + \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{nx}{2}}{x^2}$$

$\Rightarrow\ a_n = a_{n-1} + \frac{n}{2}, n\ge 2 \Rightarrow\ a_n = \frac{n(n+1)}{4}$ ....**(2p)**

b) $\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)}{a_k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)}{k^2\cdot(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} =$

$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ . ...**(1p)**

Înlocuind în limită, se obține:

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)}{a_k^2}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{\ln n} = e^{-\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{(n+1)^2}} = e^0 = 1$ ...**(2p)**

Am utilizat: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{2n+1} = 0$

Problema 4

Fie $(x_n)_{n\ge 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că $x_{n+1} = \frac{n(n+4)}{(n+1)(n+2)}\cdot x_n + \frac{6}{(n+1)(n+2)}, n\ge 1$.

Aflați valoarea lui x_1 pentru care șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este convergent, iar pentru x_1 astfel determinat calculați limita $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1-x_n)}{x_n}$.

G.M.-B, Nr. 10/2021, Mihaela Berindeanu, București

Soluție:

Înmulțim relația din enunț cu $\frac{(n+1)}{(n+3)(n+4)}$ și obținem:

$\frac{(n+1)}{(n+3)(n+4)}x_{n+1} = \frac{n}{(n+2)(n+3)}x_n + \frac{6}{(n+2)(n+3)(n+4)}$, pentru orice $n\ge 1$,

Notăm $y_n = \frac{n}{(n+2)(n+3)}x_n, n\ge 1$ și rezultă relația $y_{n+1} = y_n + \frac{6}{(n+2)(n+3)(n+4)}, n\ge 1$ ....**(1p)**

Obținem egalitățile:

$y_2 = y_1 + \frac{6}{3\cdot4\cdot5}$, $y_3 = y_2 + \frac{6}{4\cdot5\cdot6}$,………………, $y_{n+1} = y_n + \frac{6}{(n+2)(n+3)(n+4)}$.

Se adună cele n relații și rezultă:

$y_{n+1} = y_1 + 6\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)} = y_1 + \frac{6}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+3)(k+4)}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{n+1} = y_1 + 3\left(\frac{1}{3\cdot4} - \frac{1}{(n+3)(n+4)}\right) \Rightarrow y_n = y_1 + 3\left(\frac{1}{3\cdot4} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$……………………………….**(2p)**

Dar $x_n = \frac{(n+2)(n+3)}{n} y_n \Rightarrow x_n = \frac{(n+2)(n+3)}{n}\left(y_1 + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{n}$………………………………………**(1p)**

Șirul $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent $\Leftrightarrow y_1 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3\cdot4}x_1 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ ...………**(1p)**

Cu $x_1 = -3$, obținem $x_n = -\frac{3}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Avem: $\lim_{n\to+\infty}\frac{ln(1-x_n)}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{ln(1+(-x_n))}{-(-x_n)} = -1$ ...…………………………………………….**(2p)**