MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2023
CLASA A IX-A
BAREM DE CORECTARE

Problema 1

Fie predicatul $p(x)$: „$\left|3\left\{\frac{x}{3}\right\}-1\right|=|2x-5|, x\in[0,+\infty)$” , $\{a\}$ este partea fracționară a lui a.

a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției $p(11)$.

b) Determinați mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.

Soluție: **a)** $p(11)$: „$\left|3\left\{\frac{11}{3}\right\}-1\right|=|2\cdot 11-5|$” ……………………………….…… …...1p

Cum $\left\{\frac{11}{3}\right\}=\left\{\frac{11}{3}-3\right\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$ ……………………………………………..……..1p

$p(11)$: „$1=17$” este o propoziție falsă……………………………………..……..1p

b) Pentru $x\in[3k,3k+3), k\in\{0,1,2,...\}$ avem $k\le\frac{x}{3}<k+1$ sau $0\le\frac{x}{3}-k<1$

de unde deducem că $\left\{\frac{x}{3}\right\}=\frac{x}{3}-k$ ……………………………………………………..1p

Ecuația devine $\left|3\left(\frac{x}{3}-k\right)-1\right|=|2x-5| \Rightarrow |x-3k-1|=|2x-5|$ 1p

Din $x-3k-1=2x-5 \Rightarrow x=-3k+4\in[3k,3k+3)$ imposibil………… ………………...1p

Din $x-3k-1=-2x+5 \Rightarrow x=k+2\in[3k,3k+3) \Rightarrow k\in\{0,1\}$ și obținem soluțiile

ecuației $x=2, x=3$ .Mulțimea de adevăr este $\{2,3\}\subset[0,+\infty)$ …………………………..1p

Problema 2

Fie $a_1, a_2, ..., a_n, n \geq 3,$ numere reale strict pozitive astfel încât :

$$\frac{2a_1}{a_2} = \frac{3a_2}{2a_3} = ... = \frac{na_{n-1}}{(n-1)a_n} = \frac{a_n}{na_1} \text{ și } S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

a) Dacă $n = 3,$ arătați că $\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2.$

b) Dacă $a_1 = \frac{1}{1011},$ demonstrați că $S_{2022} = 2023.$

Soluție:

a) $\frac{2a_1}{a_2} = \frac{3a_2}{2a_3} = \frac{a_3}{3a_1} = k$ 1p

$k \cdot k \cdot k = \frac{2a_1}{a_2} \cdot \frac{3a_2}{2a_3} \cdot \frac{a_3}{3a_1} = 1 \Rightarrow k = 1$ .... ……………………..... 1p

$a_2 = 2a_1, a_3 = 3a_1 \Rightarrow \frac{a_1 + a_3}{2} = a_2,$ ………………………………………………………1p

b) Notăm cu k valoarea comună a rapoartelor..1p

$k^{2022} = \frac{2a_1}{a_2} \cdot \frac{3a_2}{2a_3} \cdot ... \cdot \frac{2022a_{2021}}{2021a_{2022}} \cdot \frac{a_{2022}}{2022a_1} = 1 \Rightarrow k = 1$ 1p

$\frac{a_1}{\frac{1}{2}a_2} = \frac{\frac{1}{2}a_2}{\frac{1}{3}a_3} = ... = \frac{\frac{1}{2021}a_{2021}}{\frac{1}{2022}a_{2022}} = \frac{\frac{1}{2022}a_{2022}}{a_1} = 1$ ………………………………………………1p

$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{3}a_3 = ... = \frac{1}{2022}a_{2022} \Rightarrow S_{2022} = a_1(1 + 2 + ... + 2022) = 2023,$ ………………....1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Problema 3

Fie triunghiul ABC, AD mediană, $D \in (BC)$, G un punct pe (AD) și P mijlocul lui (AG). Paralela prin A la CG intersectează BG în N iar paralela prin A la BG intersectează CG în M.

a) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{MP}$ și $\overrightarrow{NP}$ sunt coliniari;

b)) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului atunci avem relația

$$3\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ND}\right)=4\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right).$$

Soluție: **a)** $AMGN$ paralelogram, $\overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG}}{2}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}}{2}$ 1p

și $\overrightarrow{NP}=\frac{\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NG}}{2}=\frac{\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM}}{2}$ 1p

Cum $\overrightarrow{MP}=-\overrightarrow{NP}\Rightarrow \overrightarrow{MP},\overrightarrow{NP}$ coliniari... ....1p

b) P mijlocul lui $[MN]\Rightarrow \overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DP}=2\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$ 1p

Din relația Leibniz avem că $3\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ 1p

Dar $3\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ND}\right)$...1p

Așadar $3\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ND}\right)=4\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 1p

Problema 4.

Fie numerele reale $a,b,c>0$. Arătați că

a) $8abc \le (a+b)(b+c)(c+a)$

b) $9\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)\ge 8abc(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Florin Rotaru- G.M. 10/2021 (enunț modificat)

Soluție: a) Folosind inegalitatea mediilor, obținem $2\sqrt{ab}\le(a+b)$ 1p

Analoagele $2\sqrt{bc}\le(b+c), 2\sqrt{ca}\le(c+a)$

Înmulțind membru cu membru obținem concluzia 1p

b) Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwart, obținem

$\left(a^2+bc\right)\left(b+c\right)\geq\left(a\sqrt{b}+\sqrt{bc}\sqrt{c}\right)^2$, adică $\left(a^2+bc\right)\left(b+c\right)\geq b\left(a+c\right)^2$, ...1p

Analog $\left(b^2+ca\right)\left(c+a\right)\geq c\left(b+a\right)^2, \left(c^2+ab\right)\left(a+b\right)\geq a\left(c+b\right)^2$

Înmulțind membru cu membru inegalitățile, rezultă

$\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)\geq abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$. (*).......................................1p

Având în vedere că $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-abc$ și că

$8abc\leq\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$, ...1p

deducem că $9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\geq 8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)$...................................1p

folosind inegalitatea (*) obținem concluzia 1p