OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 11.02.2022

CLASA a XII-a

BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1. Fie $G=\left\{ A\in M_3(\mathbb{R}) \middle| A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \right\}$. Pe G se definește legea „ $*$ ” dată prin

$A*B=AB+\alpha BA+\beta(A+B+I_3)$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, iar I_3 este matricea unitate.

a) Dacă $\alpha=1$, $\beta=0$, atunci elementul neutru față de legea dată este $E=\frac{1}{2}I_3$.

b) Dacă $a\neq -2$, $\alpha=0$, $\beta=2$, atunci $(G,*)$ este grup comutativ.

Soluție:

a) Pentru $\alpha=1$, $\beta=0$, atunci $A*B=AB+BA=2AB$, deoarece $AB=BA$ 1p

Se arată că $E=\frac{1}{2}I_3$ este element neutru 1p

b) Pentru $a\neq -2$, $\alpha=0$, $\beta=2$, atunci $A*B=AB+2A+2B+2I_3$ și se arată că legea este comutativă și asociativă 1p

Fie $E_0\in G$ astfel încât $A*E_0=E_0*A=A$. Atunci $AE_0+2A+2E_0+2I_3=A$. Rezultă că $(A+2I_3)E_0=-(A+2I_3)$ 1p

Cum matricea $A+2I_3$ este inversabilă, pentru că $\det(A+2I_3)=(a+2)^3\neq 0$, atunci $E_0=-I_3$

....1p

Fie $A \in G$ și presupunem că există $A' \in G$ astfel încât $A * A' = -I_3$, adică

$\left(A + 2I_3\right) A' = -3I_3 - 2A$ 1p

Finalizare și verificare $A' = -\left(A + 2I_3\right)^{-1}\left(3I_3 + 2A\right)$ 1p

Problema 2. Calculați:

a) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1-\ln\left(x^{-x}\right)}{xe^{-x} - \ln\left(x^{-x}\right)}\,dx$.

Soluție:

a) Notăm $\displaystyle I = \int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx$

Facem schimbarea de variabilă $t = \dfrac{1}{x}$ și obținem $\displaystyle I = \int_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \frac{\ln\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}+1}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt =$ 1p

$\displaystyle = -\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = -I$, ...1p

adică $2I = 0$, de unde $I = 0$ 1p

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1-\ln\left(x^{-x}\right)}{xe^{-x} - \ln\left(x^{-x}\right)}\,dx = \int_1^e \frac{1 + x\ln x}{xe^{-x} + x\ln x}\,dx =$ 1p

$\displaystyle = \int_1^e \frac{x\ln x + 1 + xe^{-x} - xe^{-x}}{xe^{-x} + x\ln x}\,dx = \int_1^e \frac{x\left(\ln x + e^{-x}\right) + 1 - xe^{-x}}{x\left(e^{-x} + \ln x\right)}\,dx = \int_1^e dx + \int_1^e \frac{1 - xe^{-x}}{x\left(e^{-x} + \ln x\right)}\,dx =$ 1p

$\displaystyle = x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{\left(e^{-x} + \ln x\right)'}{e^{-x} + \ln x}\,dx = e - 1 + \ln\left(e^{-x} + \ln x\right)\Big|_1^e = e - 1 + \ln\left(e^{-e} + 1\right) + 1 = \ln\left(e^e + 1\right)$ 2p

Problema 3. Se consideră grupul $(G,\cdot)$ cu proprietatea că există un element *a* al grupului astfel încât $ax^3a = x$, $\forall x \in G$.

a) Arătați că $x^3 = axa$, $\forall x \in G$.

b) Demonstrați că $x^8 = e$, $\forall x \in G$, unde e este elementul neutru al grupului.

c) Demonstrați că grupul $(G,\cdot)$ este abelian.

Soluție:

a) În relaţia din enunţ înlocuim *x* cu *e*, rezultă că $a^2 = e$, adică $a = a^{-1}$ 1p

$ax^3a = x \Rightarrow a^{-1}x^3a^{-1} = x$ şi înmulţind cu a şi la stânga, şi la dreapta rezultă relaţia din enunţ 1p

b) $x^9 = \left(x^3\right)^3 = (axa)^3 = (axa)(axa)(axa) = ax^3a =$ 1p

$= aaxaa = a^2xa^2 = x$. Deci $x^9 = x$, adică $x^8 = e$ 1p

c) Din punctul a) înlocuind x cu xy, rezultă că

$(xy)^3 = axya \Rightarrow (xy)^3 = axaaya \Rightarrow (xy)^3 = x^3y^3 \Rightarrow (yx)^2 = x^2y^2$ 1p

În relaţia anterioară înlocuim x cu x^2 şi y cu y^2, obținem $\left(y^2x^2\right)^2 = x^4y^4$.

În relaţia anterioară înlocuim x cu y şi y cu x, rezultă că $(xy)^2 = y^2x^2$.

Deci, $x^4y^4 = \left(y^2x^2\right)^2 = (xy)^4 = (xy)^3xy = x^3y^3xy \Rightarrow xy^3 = y^3x$ 1p

$x^3y^3 = x^2xy^3 = x^2y^3x = xxy^3x = xy^3x^2 = y^3x^3 \Rightarrow axaaya = ayaaxa \Rightarrow xy = yx$ 1p

Problema 4. Calculați $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_{2021x}^{2022x} \frac{\sin^n t}{t^m}\,dt$, unde $n,m\in\mathbb{N}$.

(GM 2022)

Soluție:

$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 1p

Funcția $\frac{\sin t}{t}$ este strict descrescătoare pe $(0,\pi)$ 1p

Avem inegalitatea $\frac{\sin 2022x}{2022x}<\frac{\sin t}{t}<1$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2022}\right)$ și pentru orice $t\in(2021x,2022x)$ 1p

Obținem $\left(\frac{\sin 2022x}{2022x}\right)^n \int_{2021x}^{2022x} t^{n-m}dt < \int_{2021x}^{2022x}\frac{\sin^n t}{t^m}dt < \int_{2021x}^{2022x} t^{n-m}dt$ 2p

Finalizare $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_{2021x}^{2022x} \frac{\sin^n t}{t^m}dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_{2021x}^{2022x} t^{n-m}dt = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n\ge m \\ \ln\frac{2022}{2021}, \text{ dacă } m=n+1 \\ \infty, \text{ dacă } m>n+1 \end{cases}$ 2p