OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 11.02.2022

CLASA a VIII - a

BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1

a) Fie x, y numere reale astfel încât $x - 2y + 1 = 0$.

Arătați că pentru $y \in [1; 3]$ expresia $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y + 3} + \sqrt{x^2 - 4x - 12y + 31}$ are valoare costantă

b) Determinați n ∈ ℕ astfel încât: $n^3 + 20n^2 + 100n = 2023$.

Soluție:

a) $x = 2y - 1$ => $E(y) = \sqrt{4(y-1)^2} + \sqrt{4(y-3)^2}$……………………......…………2p

$E(y) = 2|y - 1| + 2|y - 3|$…………………………………………………………..1p

$y \in [1; 3]$ <=> $1 \leq y \leq 3$ => $y - 1 \geq 0, y - 3 \leq 0$ ……………………….…………..1p

=> $E(y) = 2(y - 1) + 2(3 - y) = 4 = constant$…………………………………..…….1p

b) $n^3 + 20n^2 + 100n = n(n + 10)^2$ 1p

2023=7·17· 17 $= 7 \cdot 17^2$ => n=7…………………………………………….......…..1p

Problema 2 **a)** Să se demonstreze că $\sqrt{7n(7n+1)} < 7n + 1$, (∀) $n \in N$.

b) Să se calculeze $\left[\sqrt{7n(7n+1)}\right]$, (∀) $n \in N$

c) Să se calculeze: $\left[\sqrt{56}\right] + \left[\sqrt{210}\right] + \left[\sqrt{462}\right] + \cdots + \left[\sqrt{2023 \cdot 2024}\right]$.

Soluție:

a) $\sqrt{7n(7n+1)} < 7n+1 <=> 7n(7n+1) < (7n+1)^2$ 1p

$<=> 49n^2 + 7n < 49n^2 + 14n + 1 <=> 0 < 7n + 1$, $(\forall)\ n \epsilon N$ 1p

b) $49n^2 \leq 49n^2 + 7n < 49n^2 + 14n + 1 <=> \sqrt{49n^2} \leq \sqrt{7n(7n+1)} < \sqrt{(7n+1)^2}$.......1p

$<=> 7n \leq \sqrt{7n(7n+1)} < 7n + 1$ => $\left[\sqrt{7n(7n+1)}\right] = 7n, (\forall)\ n \epsilon N$ 1p

c) Conform **b)** => $[\sqrt{56}] = [\sqrt{7 \cdot 8}] = 7 = 7 \cdot 1$

$[\sqrt{210}] = [\sqrt{14 \cdot 15}] = 14 = 7 \cdot 2$

$[\sqrt{462}] = [\sqrt{21 \cdot 22}] = 21 = 7 \cdot 3$

....

$[\sqrt{2023 \cdot 2024}] = 2023 = 7 \cdot 289$ 1p

=> $[\sqrt{56}] + [\sqrt{210}] + [\sqrt{462}] + \cdots + [\sqrt{2023 \cdot 2024}] =$

$= 7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + \cdots + 7 \cdot 289 = 7 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 289)$ 1p

$= 7 \cdot \frac{289 \cdot 290}{2} = 293335$ 1p

Problema 3 Fie ABCDA’B’C’D’ un cub, punctul M mijlocul muchiei CC’, punctul E simetricul lui A față de M și punctul G simetricul lui B’ fata de C’. Arătați că:

a) punctele G, E, B’ și A’ sunt coplanare,
b) GE⊥(ADD’).

Soluție:

a) $\left.\begin{array}{l} MC \equiv MC' \\ AM \equiv ME \end{array}\right\} => ACEC'paralelogram =>$ AC≡ $C'E$, AC ∥ C’E...............................2p

AC ∥ C’E și AC ∥ A’C’=> A’, C’, E coliniare => E∈(A’B’C’)..1p

Cum G simetricul lui B’ față de C’ => G ∈ (A’B’C’)

G, E ∈ (A’B’C’)=> G, E, B’, A’ coplanare...1p

b) AC = C'E, AC = A'C' => C' mijlocul lui A'E și C' mijlocul lui B'G => A'B'EG paralelogram => A'B' || GE..2p

dar A'B'⊥(ADD') => GE⊥(ADD')..1p

Problema 4 Fie ABCD un tetraedru regulat și M ϵ (AC).

a) Dacă M este mijlocul lui AC, calculați *cos* (∢ (BM,CD)),

b) Arătați că, pentru orice M ϵ AC, raportul $\frac{cos(∢(BM,CD))}{sin(∢ ABM)}$ are aceeași valoare.

G.M. nr.11, 2022

Soluție:

a) ABCD tetraedru regulat => toate fețele sunt triunghiuri echilaterale de latură ***l*** ,

M este mijlocul lui AC. Fie N mijlocul lui AD => BM ⊥ AC, BN ⊥ AD, BM = BN = $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

și MN este linie mijlocie în ΔACD => MN || DC și MN = $\frac{DC}{2}$ => MN = $\frac{l}{2}$,

cos (∢ (BM,CD)) = cos (∢ (BM,MN)) = cos (∢ BMN)..1p

ΔBMN este isoscel, BM ≡ BN, fie P mijlocul lui MN => BP ⊥ MN, NP = PM = $\frac{l}{4}$

=> cos (∢ BMN) = cos (∢ BMP) = $\frac{MP}{BM} = \frac{\frac{l}{4}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 1p

b) *Cazul I* : M mijlocul lui AC => $sin(∢ ABM) = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$

$$=> \frac{cos(∢(BM,CD))}{sin(∢ ABM)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ 1p

Cazul al II-lea Fie T mijlocul lui AC => BT ⊥ AC , BT = $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, M ϵ AC, M ≠ T =>

=> AM < AT sau AM > AT

În ambele situații notăm AM = *x* și BM = *y*, *x,y >0*

Fie N ϵ AD, astfel încât AN = AM = *x* = > ΔAMN este echilateral, MN = *x*

$\Delta ABM \equiv \Delta ABN$ (L.U.L.) => $BM = BN = y$ => ΔBMN este isoscel 1p

Fie P mijlocul segmentului MN => $BP \perp MN$, $NP = PM = \frac{x}{2}$

=> $\cos(\sphericalangle BMN) = \cos(\sphericalangle BMP) = \frac{MP}{BM} = \frac{\frac{x}{2}}{y} = \frac{x}{2y}$ 1p

$$A_{\Delta ABM} = \frac{AB \cdot BM \cdot sin(\sphericalangle ABM)}{2} = \frac{AM \cdot BT}{2} \iff$$

$\iff l \cdot y \cdot sin(\sphericalangle ABM) = x \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \iff sin(\sphericalangle ABM) = \frac{x\sqrt{3}}{2y}$ ………….….......…1p

$\frac{cos(\sphericalangle(BM,CD))}{sin(\sphericalangle ABM)} = \frac{\frac{x}{2y}}{\frac{x\sqrt{3}}{2y}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 1p