OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2023
CLASA a X – a

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1

Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $x^3 + x + 2 = \sqrt[3]{3x^2 + 3x}$.

Soluție:

Se adună în ambii membri $3x^2 + 3x$

Se obține $(x+1)^3 + (x+1) = (3x^2 + 3x) + \sqrt[3]{3x^2 + 3x}$……………………………….2p

Se consideră funcția $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(t) = t^3 + t$ strict crescătoare, deci injectivă……………1p

Ecuația este echivalentă cu $f(x+1) = f(\sqrt[3]{3x^2 + 3x})$……………………………………1p

Se obține $x + 1 = \sqrt[3]{3x^2 + 3x} \quad \leftrightarrow \quad x + 1 = 0$……………………………………………..2p

Soluția este număr real $\to x = -1$……………………………………………………………1p

Problema 2

Determinați funcțiile $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ cu proprietatea că

$$f(2f(x) + y) - f(2f(y) - x) = x, \text{ pentru orice } x, y \in \mathrm{R}.$$

Soluție:

Pentru $y = -2f(x)$ se obține $f(0) - f\big(2f(-2f(x)) - x\big) = x,\ \forall x \in \mathrm{R}$………………..…….1p

Fie $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, g(x) = 2f\big(-2f(x)\big) - x$,

$(f \circ g)(x) = -x + f(0)\ \ \forall x \in \mathrm{R}$, deduce că f este surjectivă……………………………………2p

Consider $a \in \mathrm{R}$ pentru care $f(a) = 0$.

Pentru $x = a$, din ipoteză, se obține: $f(y) = a + f(2f(y) - a),\ \forall y \in \mathrm{R}$ (1) …………..…....1p

f–surjectivă, deci pentru orice $t \in \mathrm{R}$ există $y \in \mathrm{R}$ astfel încât $f(y) = \frac{t+a}{2}$………………..……...1p

Din (1) se deduce că $\frac{t+a}{2} = a + f(t)$, deci $f(t) = \frac{t-a}{2} = \frac{t}{2} - \frac{a}{2},\ \ \forall t \in \mathrm{R}$………………...……..1p

Soluțiile problemei sunt funcțiile $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \frac{x}{2} - \frac{a}{2},\ a \in \mathrm{R}$ ………………….….……….1p

Problema 3

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \boldsymbol{C}^*$, distincte două câte două astfel încât $z_1 + \frac{1}{z_2} = z_2 + \frac{1}{z_3} = z_3 + \frac{1}{z_1}$.

Arătați că $z_1 z_2 z_3 \in \mathbf{R}$ și $|z_1 z_2 z_3| = 1$.

Soluție:

Notăm $z_1 + \frac{1}{z_2} = z_2 + \frac{1}{z_3} = z_3 + \frac{1}{z_1} = t$. Se obține: $z_2 = \frac{1}{t - z_1}, z_3 = t - \frac{1}{z_1}$. 1p

Înlocuind în $z_2 + \frac{1}{z_3} = t$ se obține $\frac{1}{t - z_1} + \frac{z_1}{t z_1 - 1} = t$..2p

Se obține ecuația $(t^2 - 1)(z_1^2 - t z_1 + 1) = 0$..1p

Din $z_1^2 - t z_1 + 1 = 0 \rightarrow z_1 + \frac{1}{z_1} = t$. Cum $z_1 + \frac{1}{z_2} = t \rightarrow \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} \leftrightarrow z_1 = z_2$ - contrar ipotezei....1p

Din $t^2 - 1 = 0$ avem $t = \pm 1$

Dacă $t = -1$ se obține $z_2 = -\frac{1}{1 + z_1}$ si $z_3 = -\frac{z_1 + 1}{z_1}$ deci $z_1 z_2 z_3 = 1$

Dacă $t = 1$ se obține $z_2 = \frac{1}{1 - z_1}$ și $z_3 = \frac{z_1 - 1}{z_1}$ deci $z_1 z_2 z_3 = -1$.

În concluzie $z_1 z_2 z_3 \in$ R și $|z_1 z_2 z_3| = 1$. 2p

Problema 4

Fie $E_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}$, unde am considerat *n* radicali, $n \in$ N*.

a) Calculați $[E_n]$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a;

b) Arătați că $\{E_n\} > \frac{1}{5}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real *a*.

Soluție:

a) Notăm $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ și $b_n = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}$.

Observăm că $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ și $b_{n+1} = \sqrt[3]{6 + b_n}$

Demonstrează prin inducție matematică: $\sqrt{2} < a_n < 2$ și $\sqrt[3]{6} < b_n < 2$……..……………….……3p

Prin însumare: $\sqrt{2} + \sqrt[3]{6} < a_n + b_n < 4$…………………………………………………………1p

Cum $\sqrt{2} > 1{,}4$ și $\sqrt[3]{6} > 1{,}8$ se deduce $3{,}2 < E(n) < 4$, deci $[E_n] = 3$………………………...1p

b) Conform a) $3{,}2 < E(n) < 4$, deci $0{,}2 < \{E_n\} < 1 \leftrightarrow \frac{1}{5} < \{E_n\} < 1$, deci $\{E_n\} > \frac{1}{5}$…...2p