OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 11.02.2022

CLASA a VII – a

BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1

Fie $x=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ și $y=\sqrt{17-12\sqrt{2}}$.

a) Determinați diferența dintre media aritmetică și media geometrică a celor două numere;

b) Dacă $z=x^{-1}+y^{-1}$, demonstrați că $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{35\cdot 36}=35\cdot z^{-2}$.

Soluție:

a) Calculează $x=3+2\sqrt{2}$ ……………………………………………………………………1p

Calculează $y=3-2\sqrt{2}$ ……………………………………………………………………1p

Calculează $m_a=3$ și $m_g=1$ ……………………………………………………………1p

Finalizează $m_a-m_g=3-1=2$ ……………………………………………………………1p

b) Calculează $z=6$ ……………………………………………………………………………1p

Calculează $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{35\cdot 36}=\frac{35}{36}$ ………………………………………………………1p

Calculează $35\cdot z^{-2}=\frac{35}{36}$ și finalizează ……………………………………………………1p

Problema 2

a) Fie $a, b, c \in N^*$ astfel încât $\frac{3a+4b}{4a+3b}=\frac{87}{88}$ și $\frac{2b+3c}{3b+2c}=\frac{39}{46}$. Demonstrați că $b^2+c^2=a^2$.

b) Fie $a, b \in N^*$ astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2023}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{a}{7}-289\right)\left(\frac{b}{7}-289\right)}$ este pătrat perfect.

Soluție:

a) $\frac{3a+4b}{4a+3b}=\frac{87}{88} \Rightarrow 88(3a+4b)=87(4a+3b) \Rightarrow 264a+352b=348a+261b \Rightarrow 91b=84a \Rightarrow$

$13b=12a \Rightarrow \frac{a}{13}=\frac{b}{12}$ (1) ………………………………………………………1p

$\frac{2b+3c}{3b+2c}=\frac{39}{46} \Rightarrow 46(2b+3c)=39(3b+2c) \Rightarrow 92b+138c=117b+78c \Rightarrow 60c=25b \Rightarrow$

$12c=5b \Rightarrow \frac{c}{5}=\frac{b}{12}$ (2) ………………………………………………………1p

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{a}{13}=\frac{b}{12}=\frac{c}{5}=k \Rightarrow \begin{cases} a=13k \\ b=12k \\ c=5k \end{cases}$ ……………………………………………1p

Din $b^2+c^2=(12k)^2+(5k)^2=169k^2$ și $a^2=(13k)^2=169k^2$ avem imediat $b^2+c^2=a^2$ …….1p

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2023} \Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2023} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{a}=\frac{b}{7\cdot 289} \\ \frac{a+b}{b}=\frac{a}{7\cdot 289} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{289(a+b)}{a}=\frac{b}{7} \\ \frac{289(a+b)}{b}=\frac{a}{7} \end{cases} \Rightarrow$ ……….1p

$\begin{cases} \frac{b}{7}-289=\frac{289(a+b)}{a}-289 \\ \frac{a}{7}-289=\frac{289(a+b)}{b}-289 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{7}-289=\frac{289b}{a} \\ \frac{a}{7}-289=\frac{289a}{b} \end{cases} \Rightarrow$ …………………………1p

$\left(\frac{a}{7}-289\right)\left(\frac{b}{7}-289\right)=\frac{289b}{a}\cdot\frac{289a}{b}=289^2 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{7}-289\right)\left(\frac{b}{7}-289\right)}=\sqrt{289^2}=289=17^2$ ….1p

Problema 3

Fie E un punct pe latura DC a pătratului ABCD, [AN bisectoarea unghiului ∠EAB, N $\in$ BC și $AE \cap BC = \{P\}$. Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M. Demonstrați că:

a) [NA este bisectoarea unghiului ∠MNB;

b) MN = DM + BN;

c) ∢MAN = 45^0

Soluție:

a) Arată că E – ortocentrul ΔPMN și $AP \perp MN$ …………………………………………….1p

Arată că $\Delta AQN \equiv \Delta ABN$ (1) ……………………………………………………………….1p

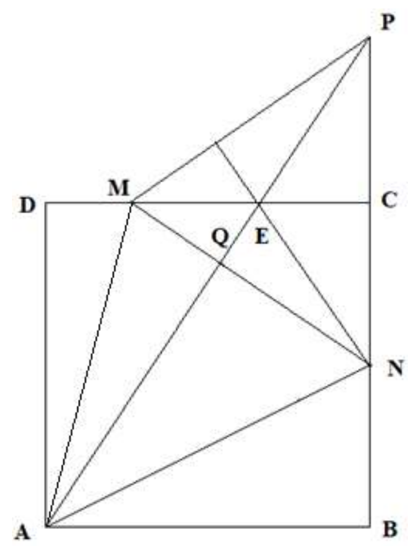
Finalizează ………………………………………………………………………..……….1p

b) Arată că AQ = AB = AD și imediat $\Delta AQM \equiv \Delta ADM$ (2) …………….……….………….1p

Finalizează …… ……………………..……………………………………………….……….1p

c) Din (1) ∢QAN = ∢BAN și din (2) ∢DAM = ∢MAQ …………………………..……….1p

Finalizează ………………………………………………………………………..……….1p



Problema 4

Punctul O este intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului ABC. Dreapta AO intersectează latura BC în punctul D astfel încât $OD = DB = \frac{CD}{2}$.

a) Arătați că ΔDOC este dreptunghic;

b) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Soluție:

a) Din OC = OB(raze) $\Rightarrow$ ΔBOC este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle$ OCB = $\sphericalangle$ OBC (1) ……………………….1p

Fie M = mijlocul lui [CD] și notăm OD = x

Avem imediat OD = DB = DM = MC = x

Arată că ΔMOC ≡ ΔDOB (OC=OB, (1) și CM=DB) ……………………………………………1p

$\Rightarrow$ OM = OD = x

În ΔDOC, OM – mediana și $OM = \frac{CD}{2}$ $\Rightarrow$ ΔDOC dreptunghic și $\sphericalangle$ COD = 90^0 ……………….….2p

b) Din $\sphericalangle AOC = 90^0$ obține imediat că $\sphericalangle ABC = 45^0$ ……………………………………………1p

Află $\sphericalangle BOC = 120^0$ și imediat obține $\sphericalangle BAC = 60^0$ ……………………………………………1p

Finalizează și găsește și $\sphericalangle ACB = 75^0$ ……………………………………………………1p