OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2022
CLASA a VIII - a

Problema 1

a) Fie x, y numere reale astfel încât $x - 2y + 1 = 0$.

Arătați că pentru $y \in [1; 3]$ expresia $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y + 3} + \sqrt{x^2 - 4x - 12y + 31}$ are valoare costantă.

b) Determinați n$\in \mathbb{N}$ astfel încât: $n^3 + 20n^2 + 100n = 2023$.

Problema 2 **a)** Să se demonstreze că $\sqrt{7n(7n+1)} < 7n + 1$, $(\forall)\ n \epsilon N$.

b) Să se calculeze $\left[\sqrt{7n(7n+1)}\,\right]$, $(\forall)\ n \epsilon N$

c) Să se calculeze: $\left[\sqrt{56}\,\right] + \left[\sqrt{210}\,\right] + \left[\sqrt{462}\,\right] + \cdots + \left[\sqrt{2023 \cdot 2024}\,\right]$.

Problema 3 Fie ABCDA'B'C'D' un cub, punctul M mijlocul muchiei CC', punctul E simetricul lui A față de M și punctul G simetricul lui B' față de C'. Arătați că:

a) Punctele G, E, B'și A' sunt coplanare;

b) GE⊥(ADD').

Problema 4 Fie ABCD un tetraedru regulat și M ϵ (AC).

a) Dacă M este mijlocul lui AC, calculați *cos* (∢ (BM,CD));

b) Arătați că, pentru orice M ϵ (AC)., raportul $\dfrac{cos(\sphericalangle(BM,CD))}{sin(\sphericalangle ABM)}$ are aceeași valoare.

G.M. nr.11, 2022

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.