OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 2023

CLASA a V - a

BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1

a) Arătaţi că anul în care suntem reprezintă predecesorul rezultatului obţinut făcând calculul de mai jos:

$$(2023 \cdot 2023 + 2023) : 2023;$$

b) Ştiind că $x = 2023 + 2022 + 2021 - 2020 - 2019 + 2018 + 2017 - 2016 - 2015 + \cdots + 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1$, arătaţi că valoarea lui x reprezintă dublul anului în care ne aflăm.

Soluție:

a. $2023(2023 + 1) : 2023$

$2023 \cdot 2024 : 2023$..1 p

2024

2023 *este predecesorul lui* 2024..1 p

b. Observăm că $x = 2023 + (2022 + 2021 - 2020 - 2019) + (2018 + 2017 - 2016 - 2015) + \cdots + (6 + 5 - 4 - 3) + 2 + 1$..1p

$x = 2023 + \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_{de\ 505\ ori} + 2 + 1$ 1p

$x = 2023 + 4 \cdot 505 + 2 + 1$..1p

$x = 2023 + 2023 = 2 \cdot 2023$..1p

deci valoarea lui x este dublul anului 2023...1p

Problema 2

Se dau numerele naturale a și b astfel încât dacă îl împărțim pe a la b obținem restul 16, iar dacă îl împărțim pe b la a obținem restul 51. Știind că numărul a este un pătrat perfect mai mic decât 200, aflați cele două numere.

Soluție:

Din teorema împărțirii cu rest avem:

$\begin{cases} a = b \cdot c_1 + 16, & b > 16 \\ b = a \cdot c_2 + 51, & a > 51 \end{cases}$..1p

Cazul I: $\text{b} > a \Rightarrow \text{c}_1 = 0 \Rightarrow \text{a} = 16 < 51$ (contradicție)..1p

Cazul II : $\text{a} > b \Rightarrow \text{c}_2 = 0 \Rightarrow \text{b} = 51 > 16$...1p

Deci $a = 51 \cdot c_1 + 16$...1p

Dar $\begin{cases} \text{a} = \text{patrat perfect} \\ \text{a} < 200 \\ \text{a} > 51 \end{cases} \Rightarrow \text{a poate fi: } 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196$....................................1p

a= 169...2p

Problema 3

Fie *n* un număr natural. Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor numărului natural și cu $F(n)$ ultima cifră a lui. Determinați numerele naturale n care au proprietatea:

$$n + S(n) + F(n) = 2030.$$

Soluție:

Din exemplul 999+27+9 < 2030 rezultă că n are 4 cifre deci $n = \overline{abcd}$…………………...…..1p

Din datele problemei obținem : $\overline{abcd} + a + b + c + 2d = 2030$

$\Rightarrow 1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + 2d = 2030$……………………………………...1p

$\Rightarrow 1001a + 101b + 11c + 3d = 2030 \Rightarrow a \in \{1,2\}$……………………………………….....1p

Cazul I: a=1$\Rightarrow 101b + 11c + 3d = 1029 \Rightarrow b = 9 \text{ și } 11c + 3d = 120 \Rightarrow$………………..…..1p

$\Rightarrow c = 9 \text{ și } d = 7 \Rightarrow \overline{abcd}$ =1997……………………………..……………………………..1p

Cazul II: $a = 2 \Rightarrow 101b + 11c + 3d = 28 \Rightarrow b = 0$…………………………………………1p

$11c + 3d = 28 \Rightarrow c = 2 \text{ și } d = 2 \Rightarrow \overline{abcd}$=2022…………………………………….…1p

Problema 4

Determinați numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{a00} = a^7 + a^b + a^c$

Soluție :

Cazul I: Dacă $a = 1 \Rightarrow 100 = 1^7 + 1^b + 1^c \Rightarrow 100 = 3\ (Fals)$…………………………1p

Cazul II: Dacă $a = 2 \Rightarrow 200 = 2^7 + 2^b + 2^c \Rightarrow 2^b + 2^c = 72$…………………………….1p

Pentru $\begin{cases} b \leq 5 \\ c \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 2^b + 2^c \leq 2^6 = 64 < 72$…………………………………………1p

Pentru $\begin{cases} b \geq 7 \\ c \geq 7 \end{cases} \Rightarrow 2^b + 2^c \geq 2^7 = 128 > 72$……………………………………...…1p

Pentru $\begin{cases} b = 6\ si\ c = 3 \\ c = 6\ si\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2^b + 2^c = 72 \Rightarrow \overline{abc} = \{263, 236\}$ …………………….2p

Cazul III: Daca $a \geq 3 \Rightarrow a^7 \geq 3^7 \geq 1000 > \overline{a00}$……………………………………………1p