Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 11 februarie 2023

Clasa a V-a

Problema 1

Scrieți numărul 2023^{2023} ca o sumă de patru pătrate perfecte nenule.
Barem:

$2023^{2023}=2023^{2022}\cdot 2023=(2023^{1011})^2\cdot 2023$......................................2p
$2023=7\cdot 17^2=(4+1+1+1)\cdot 17^2$..2p
$2023=34^2+17^2+17^2+17^2$..1p
$2023^{2023}=(2023^{1011})^2\cdot(34^2+17^2+17^2+17^2)=(2023^{1011}\cdot 34)^2+$
$+(2023^{1011}\cdot 17)^2++(2023^{1011}\cdot 17)^2++(2023^{1011}\cdot 17)^2$....................2p

Problema 2

Se consideră numărul $N=15^{2\cdot k}-3^{2\cdot k+2}\cdot 5^{2\cdot k-2}, k\in\mathbb{N}^*$. Demonstrați că N e pătrat perfect.
Barem:

$N=15^{2\cdot k}-3^{2\cdot k+2}\cdot 5^{2\cdot k-2}$
$=3^{2\cdot k}\cdot 5^{2\cdot k}-3^{2\cdot k+2}\cdot 5^{2\cdot k-2}$ 1p
$=3^{2\cdot k}\cdot 5^{2\cdot k-2}\cdot(5^2-3^2)$..1p
$=3^{2\cdot k}\cdot 5^{2\cdot(k-1)}\cdot 16$ 2p
$=3^{2\cdot k}\cdot 5^{2\cdot(k-1)}\cdot 4^2$ 1p
$=\left(3^k\cdot 5^{k-1}\cdot 4\right)^2=$ pătrat perfect...1p

Problema 3

La un concurs de şah au participat toți cei 30 elevi ai unei clase. Primul băiat a jucat cu 3 fete, al doilea băiat a jucat cu 4 fete, al treilea cu 5 fete ş.a.m.d., ultimul jucând cu toate fetele. Câte fete sunt în clasă?
Barem:

Fie **n** - numărul băieților...1 p
Avem corespondențele:
primul băiat → 3 fete (1+2 fete),
al **doilea** băiat → 4 fete (2 + 2 fete),
al **treilea** băiat → 5fete (3 + 2 fete),
…………………………....

al **n**-lea băiat → n + 2 fete ……………………………………………......3p
Deci **n** + (**n**+2) = 30 ⇒ **n** = 14 ……………..……………………………....2p
Finalizare, sunt 16 fete. ……………………………………………………...1p

Problema 4

Determinați trei numere naturale, știind că diferența dintre primul și al treilea este 76, împărțindu-l pe al doilea la al treilea obținem câtul 3 și restul 5, iar împărțindu-l pe primul la diferența dintre al doilea și al treilea obținem câtul 2 și restul 6.

Barem:
Fie **a, b, c** – numerele căutate
a-c=76 ....….…………..…………………………..……… 1p
b=3·**c**+5 ....….…………..…………………………..………1p
a=2(**b-c**)+6 ....….…………..…………………………..……...1p
a=4**c**+16
4**c**+16=**c**+76 ....….…………..………………………… 1p
3**c**=60 => **c**=20 ....….…………..…………………………..……....1p
a=4·20+16 => **a**=96 ....….…………..…………………………..…...1p
b=3·20+5 => **b**=65 ....….…………..…………………………..…...1p