Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, 11 februarie 2023
Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE:

Problema 1

Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, știind că are loc relația $\sqrt{\overline{abc}} = 5(a+b+c)$.

$\overline{abc} = 25(a+b+c)^2 \Rightarrow 25 | \overline{abc}$.........1p

$\overline{abc}$ *este un pătrat perfect de* 3 *cifre*, $25|\overline{abc} \Rightarrow \overline{bc} \in \{00, 25, 50, 75\}$.........1p

Pătrate perfecte de trei cifre $\{225, 400, 625, 900\}$.........1p

Verificare: $\overline{abc} = 225, \sqrt{225} = 15, dar\ 5 \cdot (2+2+5) = 45 \neq 15$.........1p

Verificare: $\overline{abc} = 400, \sqrt{400} = 20,\ iar\ 5 \cdot (4+0+0) = 20$.........1p

Verificare: $\overline{abc} = 625, \sqrt{625} = 25, dar\ 5 \cdot (6+2+5) = 65 \neq 25$.........1p

Verificare: $\overline{abc} = 900, \sqrt{900} = 30, dar\ 5 \cdot (9+0+0) = 45 \neq 30$.........1p

Deci $\overline{abc} = 400$

Problema 2

Fie numerele $a = 1+2+3+\dots+n$ **și**

$$b = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n}$$

a) **Calculați:** $n = [1+\sqrt{2}] + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right] + \dots + \left[\frac{2022+\sqrt{2023}}{2022}\right]$, **unde [x] este partea întreagă a numărului x**

b) **Arătați că** $\sqrt{a \cdot b} \in N,\ pentru\ n = 2023$

a) $[1+\sqrt{2}] = 2$.........1p

$n = [1+\sqrt{2}] + \left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \dots + \left[1+\frac{\sqrt{2023}}{2022}\right] =$.........1p

$n = 2 + \underbrace{1+1+\dots+1}_{2021\ termeni} = 2023$.........1p

b) $a = \frac{2023 \cdot 2024}{2} = 2023 \cdot 1012$..1p

$b = \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \dots + \frac{2}{2023\cdot 2024}$..1p

$b = 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) = \frac{2023}{1012}$...1p

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{2023^2} = 2023 \in N$..1p

Problema 3

Pe baza *BC* a triunghiului ΔABC isoscel, se consideră punctele *D* și *E* astfel încat $BE = CD = \frac{1}{3}BC$. În exteriorul triunghiului ABC construim triunghiurile echilaterale *MBE* si *OCD*. Demonstrați că:

a) ΔAED si ΔAMO isoscele;

b) *MODE* este trapez isoscel și $MD \perp OD$

a) Fie $BC = 3a \Rightarrow BE = ED = CD = ME = OC = OD = a$ 1p

$\Delta ABE \equiv \Delta ACD \Rightarrow AE = AD \Rightarrow \Delta AED\ isoscel$,...1p

$\Delta ABM \equiv \Delta ACO \Rightarrow AM = AO \Rightarrow \Delta AMO\ isoscel$...1p

b) $m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle ODC) = 60^\circ \Rightarrow MB \parallel DO, MB = DO \Rightarrow$...1p

$BDOM\ paralelogram \Rightarrow MO \parallel BD, MO = BD = 2a$

$MO \parallel ED, ME = OD = a \Rightarrow MODE\ trapez\ isoscel$ 2p

$\Delta EMD\ isoscel \Rightarrow m(\sphericalangle EMD) = m(\sphericalangle EDM) = 30^\circ \Rightarrow$

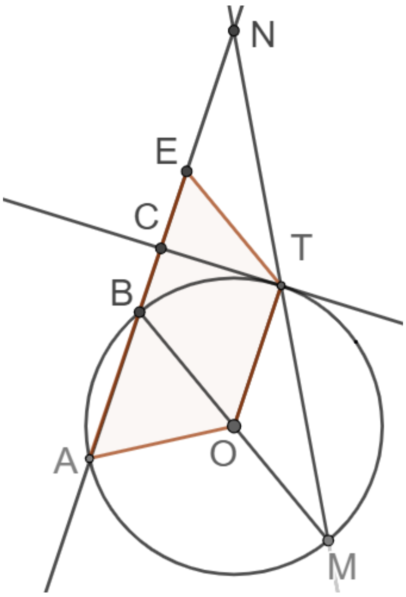
$m(\sphericalangle MDB) = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow MD \perp DO$ 1p

Problema 4

Se consideră cercul *C(O, r)* și dreapta d tangentă la cercul dat în punctul T. O dreaptă paralelă cu OT intersectează cercul și dreapta d în punctele A, B și C (B este între C și A). Fie M punctul diametral opus lui B. Dreapta MT intersectează pe AB în N.

a) Arătați că triunghiul MBN este isoscel;

b) Notăm cu E mijlocul segmentului BN. Arătați că patrulaterul AOTE este trapez isoscel.



a) $\left.\begin{matrix} OT \parallel AB \\ dar\ MN\ secantă \end{matrix}\right\} \rightarrow \widehat{BNM} \equiv \widehat{OTM}$..............................1p

Triunghiul OTM isoscel → $\widehat{OTM} \equiv \widehat{BMN}$............................1p

$\widehat{BMN} \equiv \widehat{BNM}$ → triunghiul BMN isoscel 1p

$b)$ BM diametru → triunghiul BTM dreptunghic ………......1p

BT înălțime în triunghiul BMN isoscel deci [BT] mediană →

T mijlocul [MN]..1p

$\left.\begin{matrix} T\ mijlocul\ [MN] \\ E\ mijlocul\ [BN] \end{matrix}\right\}$ → [TE] l.m. în triunghiul BMN →

$TE = \frac{BM}{2}$.. 1p

OA rază → $OA = \frac{BM}{2}$, deci

$\left.\begin{matrix} TE = OA \\ dar\ AB \parallel OT \end{matrix}\right\} \rightarrow AOTE\ trapez\ isoscel$...1p

Notă: Timp de lucru: 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.