Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 11 februarie 2023

Clasa a VI-a

Problema 1

Punctele A, B, C, D sunt coliniare în această ordine astfel încât: $AB+2BC+3CD=2AD$.

a) Demonstrați că $AB = CD$.

b) Dacă $AC \cdot BD = 64$ și $BC = 5$, calculați lungimea segmentului AD.

Barem:

$AD = AB + BC + CD$ .... (1p)

$2AD = 2AB + 2BC + 2CD$ și înlocuind se obține $AB= CD$.................................. (2p)

$(AB+5)(CD+5)=64$ ………………………………………………………….…… (1p)

$AB = CD = 3cm$ .... (2p)

$AD = 11cm$... (1p)

Problema 2

Determinați numerele prime a, b, c pentru care are loc relația $6a+7b+c=97$.

Barem:

$6a$ –par și 97- impar→ $7b+c$ –impar → $7b$-par și c-impar sau c-par și $7b$-impar…….….…(1p)

Dacă $7b$-par și b- prim → $b=2$ și $6a+c=83$ sau

Dacă c-par și c- prim → $c=2$ și $6a+7b=95$…………………………….………………(1p)

$b=2$ și $6a+c=83$, a, c-prime → $a=2$, $b=71$ sau $a=5$, $c=53$ sau $a=7$, $c= 41$ sau $a=11$,$c=17$ sau $a=13$, $c=5$…...(4p)

$c=2$ și $6a+7b=95$, a,b –prime → $a=3$, $b=11$……………………………………..….(1p)

Str. Dobrogeanu Gherea nr. 3-4, 820007, Tulcea
Tel: +40 (0)240 51 57 71, +40 (0) 240 51 44 89 Fax: +40 (0)240 51 18 86
E-mail: contact@isjtulcea.ro; www.isjtulcea.ro

Problema 3

Fie unghiurile ∡AOB, ∡BOC și ∡COA în jurul unui punct. Semidreapta (OM este bisectoarea unghiului ∡AOB iar (ON semidreapta opusă ei. Dacă măsurile unghiurilor ∡AOM, ∡BOC și ∡COA sunt direct proporționale cu 3, 4 respectiv 8, arătați că unghiurile ∡AON, ∡BON și ∡AOB sunt congruente.

Barem:

∡AOB+ ∡BOC + ∡COA=360^0…………………………………………….…………(1p)
∡AOM=3K, ∡BOC=4K, ∡COA=8K…………………………………….…………(1p) .
6K+4K+8K=360 →K=20.. (1p)
∡AOB=120^0, ∡BOC=80^0, ∡COA=160^0……………………………… ……………(1p)
∡AON= 180^0-∡AOM → ∡AON=120^0……………………………… ……………(1p)
∡CON = 160- ∡AON=40^0→ ∡BON=120^0………………………… ……………(1p)
∡AOB=∡BON =∡AON =120^0…………………………..………… …….………(1p)

Problema 4

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația: $(6^x + 2^x)^y + (6^y - 2^y)^x = 3$, știind că x și y nu sunt simultan nule.

Barem:

Pentru $x, y \in \mathbb{N}^*$ avem că ambii termeni ai sumei din membrul stâng sunt numere pare.... (2p)

Suma termenilor din membrul stâng este număr par.. (1p)

Deci ecuația nu are soluții pentru $x, y \in \mathbb{N}^*$..(1p)

Pentru $x = 0$ avem 2^y+1=3. Deci y=1 ....(1p)

Pentru $y = 0$ avem $1 = 3$ (fals).. (1p)

Concluzie : soluția ecuației este $x = 0$ și y=1...(1p)

Str. Dobrogeanu Gherea nr. 3-4, 820007, Tulcea
Tel: +40 (0)240 51 57 71, +40 (0) 240 51 44 89 Fax: +40 (0)240 51 18 86
E-mail: contact@isjtulcea.ro; www.isjtulcea.ro