Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 11 februarie 2023

Clasa a VIII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Problema 1

Se consideră numărul $A=\overline{a1}\cdot\overline{a9}+16$. Arătați că $\sqrt{A}$ este număr natural nenul.

Supliment G.M.

SOLUȚIE / BAREM	Punctaj
Descompunând în baza 10 și efectuând calculele obținem succesiv: $A=(10a+1)(10a+9)+16=100a^2+100a+25=$	**4 p**
$=(10a+5)^2=\overline{a5}^2$. Sau, se poate lucra direct cu forma numerelor din enunț: $A=\overline{a1}\cdot\overline{a9}+16=\left(\overline{a5}-4\right)\left(\overline{a5}+4\right)+16=\overline{a5}^2$.	**2 p**
Deci $\sqrt{A}=\sqrt{\overline{a5}^2}=\overline{a5}\in\mathbb{N}^*$.	**1 p**

Problema 2

Determinați numerele reale $a,b,c>0$ pentru care $\begin{cases} a^3+b^3+c^3=3abc \\ a^{2023}+b^{2023}+c^{2023}=3 \end{cases}$.

SOLUȚIE / BAREM	Punctaj
Se demonstrează identitatea $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$.	**3 p**
Deoarece, din ipoteză, avem că $a^3+b^3+c^3=3abc$ și $a+b+c>0$, din egalitatea de mai sus obținem $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, adică $a=b=c$.	**3 p**
Folosind acum faptul că $a^{2023}+b^{2023}+c^{2023}=3$ și $a=b=c$ va rezulta de aici că $a=b=c=1$.	**1 p**

Problema 3

Pe perpendiculara ridicată în vârful *A* al triunghiului *ABC*, în care $AB=AC=30$ cm și $BC=36$ cm, se alege punctul *M* astfel încât $AM=10$ cm . Fie *D* mijlocul segmentului $[BC]$.

a) Calculați lungimile segmentelor $[MB]$ și $[MD]$.

b) Dacă $[AE]$ și $[AF]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle MAB$ și respectiv $\sphericalangle MAC$, unde $E\in[MB]$ și $F\in[MC]$, atunci arătați că $EF \parallel (ABC)$.

c) Calculați lungimea segmentului $[EF]$.

Str. Dobrogeanu Gherea nr. 3-4, 820007, Tulcea
Tel: +40 (0)240 51 57 71, +40 (0) 240 51 44 89 Fax: +40 (0)240 51 18 86
E-mail: contact@isjtulcea.ro; www.isjtulcea.ro

SOLUȚIE / BAREM		Punctaj
a)	Triunghiul *ABC* fiind isoscel rezultă că *AD* este și înălțime și, din Pitagora, obținem $AD=24$ cm. Din $AM\perp(ABC)$ rezultă că *AM* este perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan, deci triunghiurile *MAB*, *MAD* și *MAC* sunt dreptunghice în *A*; tot din Pitagora obținem $MB=10\sqrt{10}$ cm și $MD=26$ cm.	**2 p**
b)	Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile *MAB* și *MAC* obținem: $\frac{ME}{EB}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$ și respectiv $\frac{MF}{FC}=\frac{AM}{AC}=\frac{1}{3}$; prin urmare $\frac{ME}{EB}=\frac{MF}{FC}=\frac{1}{3}$, de unde, conform reciprocei Teoremei lui Thales, obținem că $EF\parallel BC$ și cum $BC\subset(ABC)$, concluzionăm că $EF\parallel(ABC)$.	**3 p**
c)	La punctul anterior s-a obținut că $EF\parallel BC$; din T.F.A. va rezulta că $\Delta MEF\sim\Delta MBC$, deci $\frac{EF}{BC}=\frac{ME}{MB}=\frac{1}{4}$, căci $\frac{ME}{EB}=\frac{1}{3}$; deducem în final că $EF=\frac{1}{4}\cdot BC=9$ cm.	**2 p**

Problema 4

a) Arătați că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, are loc identitatea: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$.

b) Determinați $a,b,c\geq 1$ pentru care $\frac{a}{a^3-2a+2}+\frac{b}{b^3-2b+2}+\frac{c}{c^3-2c+2}=3$.

SOLUȚIE / BAREM		Punctaj
b)	Calcul direct.	**1 p**
c)	Din punctul anterior rezultă că, pentru orice $x\geq 1$, avem $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\geq 0$, cu egalitate doar dacă $x=1$; de aici obținem $x^3-2x+2\geq x>0$, adică $\frac{x}{x^3-2x+2}\leq 1$, egalitatea având loc pentru $x=1$. **(1)**	**3 p**
Însumând cele trei inegalități obținute din relația **(1)**, corespunzătoare valorilor lui $x\in\{a;b;c\}$, rezultă $\frac{a}{a^3-2a+2}+\frac{b}{b^3-2b+2}+\frac{c}{c^3-2c+2}\leq 3$, de unde, ținând seama de relația din enunț, deducem că $\frac{a}{a^3-2a+2}=\frac{b}{b^3-2b+2}=\frac{c}{c^3-2c+2}=1$, adică, conform cu **(1)**, trebuie să avem $a=b=c=1$.		**3 p**