

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Locală, 11 februarie 2023****Clasa a VIII-a****Problema 1**

Se consideră numărul $A = \overline{a1} \cdot \overline{a9} + 16$. Arătați că \sqrt{A} este număr natural nenul.

Problema 2

Determinați numerele reale $a, b, c > 0$ pentru care
$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\ a^{2023} + b^{2023} + c^{2023} = 3 \end{cases}.$$

Problema 3

Pe perpendiculara ridicată în vârful A pe planul triunghiului ABC , în care $AB = AC = 30$ cm și $BC = 36$ cm, se consideră punctul M astfel încât $AM = 10$ cm. Fie D mijlocul segmentului $[BC]$.

- Calculați lungimile segmentelor $[MB]$ și $[MD]$.
- Dacă $[AE]$ și $[AF]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle MAB$ și respectiv $\sphericalangle MAC$, unde $E \in [MB]$ și $F \in [MC]$, atunci arătați că $EF \parallel (ABC)$.
- Calculați lungimea segmentului $[EF]$.

Problema 4

- Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc identitatea: $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$.
- Determinați $a, b, c \geq 1$ pentru care
$$\frac{a}{a^3 - 2a + 2} + \frac{b}{b^3 - 2b + 2} + \frac{c}{c^3 - 2c + 2} = 3.$$

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7. Nu se acordă puncte din oficiu.