Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

1. a) Fie numărul real pozitiv x cu proprietatea $x+\frac{1}{x}=2023$. Demonstrați că $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ este un număr natural.

   b) Demonstrați că $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\in\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right]$, pentru orice numere reale pozitive a și b.

Soluţie:

a) Avem $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=2025$ de unde obținem ...1p

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2025}=45$ sau $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=-\sqrt{2025}=-45$ ...1p

Cum $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=45\in\mathbb{N}$ ...1p

b) $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}\Leftrightarrow(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)\Leftrightarrow 0\leq(a-b)^2$, adevărat ...2p

$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}>1\Leftrightarrow a+b>\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow(a+b)^2>a^2+b^2\Leftrightarrow 2ab>0$, ceea ce este adevărat pentru că a și b sunt pozitive ...1p

Cum $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}<1\Rightarrow\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}>\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, de unde rezultă concluzia că

$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\in\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right]$ ...1p

2. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2\{x\}-[x]=\frac{1}{2023}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x și $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

   b) Determinați numerele reale $x>0$ și $y>0$ știind că $\frac{3x+3y+1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}}=2$.

Soluţie:

a) $x=k+t$, unde am notat $k=[x]\in\mathbf{Z}$ și $t=\{x\}$

Avem că $2t-k=\frac{1}{2023}$ de unde $t=\frac{2023k+1}{4046}\in[0,\,1)$ ...1p

$t\geq 0\Rightarrow k\geq 0$ și $t<1\Rightarrow k\leq 1$ și cum $k\in\mathbf{Z}$, rezultă $k\in\{0,1\}$ ...1p

Pentru $k=0$ rezultă că $t=\frac{1}{4046}$ și $x=k+t=\frac{1}{4046}$

Pentru $k=1$ rezultă că $t=\frac{1012}{2023}$ și $x=k+t=\frac{3035}{2023}$ ...1p

b) $\frac{3x+3y+1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}}=2 \Leftrightarrow 3x+3y+1=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{xy}$. Înmulțind cu 2 relația anterioară obținem

$6x+6y+2=4\sqrt{x}+4\sqrt{y}+4\sqrt{xy}$ ...1p

Grupând termenii avem $(4x-4\sqrt{x}+1)+(4y-4\sqrt{y}+1)+(2x-4\sqrt{xy}+2y)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x}-1\right)^2+\left(2\sqrt{y}-1\right)^2+2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0,\ 2\sqrt{y}-1=0,\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ ...2p

de unde rezultă $x=y=\frac{1}{4}$ ...1p

3. Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$, punctul P pe diagonala BD' astfel încât $BD'=3BP$ și centrul O al feței $BB'C'C$.
   a) Arătați că punctele A, P și O sunt coliniare.
   b) Dacă $AB=6cm$, calculați distanța de la punctul C la planul (APB).

Soluţie:

a) Fie $\{R\}=AC'\cap BD' \Rightarrow BR$ mediană în $\Delta ABC'$ ...1p

$BD'=3BP \Rightarrow BR=\frac{3}{2}BP \Rightarrow BP=\frac{2}{3}BR \Rightarrow P$ este centrul de greutate al $\Delta ABC'$ ...1p

O centrul feței $BB'C'C \Rightarrow AO$ mediană în $\Delta ABC' \Rightarrow P\in AO \Rightarrow A$, P și O sunt coliniare ...1p

b) A, P, O coliniare $\Rightarrow (APB)=(AOB)=(ABC')$ ...1p

$BCC'B'$ pătrat $\Rightarrow B'C\perp BC' \Rightarrow CO\perp BC'$ ...1p

$AB\perp(BCC')$, $CO\subset(BCC') \Rightarrow AB\perp CO$ și cum $BC'\cap AB=\{B\}$, rezultă că $CO\perp(ABC')$

și deci că distanța de la C la planul (ABC') este CO ...1p

$CO=\frac{B'C}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\,cm$ ...1p

4. a) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul *n*, există cel puțin un pătrat perfect care are *n* cifre și suma cifrelor 9. (De exemplu, 144 este pătrat perfect, are 3 cifre și suma cifrelor 9.)
   b) Determinați numerele naturale *s* cu proprietatea că, oricare ar fi *n* număr natural nenul, există cel puțin un pătrat perfect cu *n* cifre și suma cifrelor *s*.
   c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul *n*, există cel puțin un pătrat perfect **impar** care are *n* cifre și suma cifrelor 9.

prof. Andrei Eckstein

Soluţie:

a) Pentru *n* impar, $n=2k+1$, putem lua $900\ldots0=9\cdot10^{2k}=(3\cdot10^{k})^2$. 1p

Pentru *n* par, $n=2k+2$, putem lua $8100\ldots0=81\cdot10^{2k}=(9\cdot10^{k})^2$. 1p

b) Pentru $n=1$ obținem că trebuie să existe un pătrat perfect cu o singură cifră având suma cifrelor *s*. Deducem că $s\in\{0,1,4,9\}$. 1p

Cercetând lista pătratelor perfecte cu $n = 2$ cifre, nu găsim pătrate perfecte cu suma cifrelor 0, 1 sau 4. În schimb, pentru $s = 9$ am văzut deja la a) că există pătrat perfect cu n cifre și suma cifrelor s. Așadar, singurul număr nu proprietatea din enunț este $s = 9$. 1p

c) Pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ putem lua $9 = 3^2$, $81 = 9^2$, $441 = 21^2$, respectiv $2601 = 51^2$. 1p
Pentru $n > 3$, impar, putem lua $400 \ldots 0400 \ldots 01 = (200 \ldots 01)^2 = (2 \cdot 10^k + 1)^2$.
Într-adevăr, $(2 \cdot 10^k + 1)^2 = 4 \cdot 10^{2k} + 4 \cdot 10^k + 1$ are $2k + 1$ cifre. 1p
Pentru $n > 4$, par, putem lua $2500 \ldots 0100 \ldots 01 = (500 \ldots 01)^2 = (5 \cdot 10^k + 1)^2$.
Într-adevăr, $(5 \cdot 10^k + 1)^2 = 25 \cdot 10^{2k} + 10 \cdot 10^k + 1$ are $2k + 2$ cifre. 1p