Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

Clasa a VI -a
Barem de corectare și notare

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

Subiectul 1 (7 puncte)

Notăm cu $d(N)$ numărul divizorilor numărului $N = 2^x \cdot 5^y$, cu x, y numere natural nenule. Se ştie că $d(N)$ = 48 şi $d(25 \cdot N)$ este egal cu media aritmetică dintre $d(N)$ şi $d(8 \cdot N)$. Aflaţi N.

Gazeta Matematică nr. 11/2022

Soluţie.

$d(N) = d(2^x \cdot 5^y) = (x + 1) \cdot (y + 1)$ = 48. .... 1p
$d(25 \cdot N) = d(25 \cdot 2^x \cdot 5^y) = d(2^x \cdot 5^{y+2}) = (x + 1) \cdot (y + 3)$ 1p
$d(8 \cdot N) = d(8 \cdot 2^x \cdot 5^y) = d(2^{x+3} \cdot 5^y) = (x + 4) \cdot (y + 1)$ 1p
$(x + 1) \cdot (y + 3) = \frac{(x+1)\cdot(y+1)+(x+4)\cdot(y+1)}{2}$ 1p
Se efectuează calculele, se obţine o relaţie echivalentă cu $4(x + 1) = 3(y + 1)$ 1p
Se obţine soluţia $x = 5, y = 7$ 1p
$N = 2^5 \cdot 5^7 = 2^5 \cdot 5^5 \cdot 5^2 = 10^5 \cdot 25 = 2500000$ 1p

Subiectul 2 (7 puncte)

Fie a, b şi c trei numere naturale prime şi distincte, astfel ca $4a + 6b + 9c = 105$.
a) Determinaţi valorile numerelor a, b şi c.
b) Dacă n este un număr natural impar, atunci arătaţi că numărul $2^{n+c} - 2^{n+b} + 2^{n+a}$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte, unde a, b şi c sunt numerele determinate la punctul a).

Soluţie.

a) $a \vdots 3 \Rightarrow a = 3$ 1p
$2b + 3c = 31, 3c \leq 31 \Rightarrow c \in \{2, 3, 5, 7\}$ 1p
c impar, c$\neq a \Rightarrow c \in \{5,7\}$ 1p
$c = 5 \Rightarrow b = 8$ compus
$c = 7 \Rightarrow b = 5$ 1p
b) n =2k+1 $\Rightarrow 2^{n+c} - 2^{n+b} + 2^{n+a} = 2^{2k+8} - 2^{2k+6} + 2^{2k+4}$ 1p
= $2^{2k+4}(2^4 - 2^2 + 1) = (2^{k+2})^2 \cdot 13 = (2^{k+2})^2 \cdot (2^2 + 3^2) =$ 1p
= $(2^{k+3})^2$+$(2^{k+2} \cdot 3)^2$ 1p

Subiectul 3 (7 puncte)
În jurul punctului O se consideră 9 unghiuri: $\measuredangle A_0OA_1 = x^0$, $\measuredangle A_1OA_2 = (2x+1)^0$, $\measuredangle A_2OA_3 = (3x+2)^0$, ..., $\measuredangle A_7OA_8 = (8x+7)^0$ și $\measuredangle A_8OA_0 = (9x-n)^0$, unde x și n sunt numere naturale nenule. Determinați măsurile celor 9 unghiuri.

Gazeta Matematică. nr. 12/2019

Soluţie.
Deoarece suma măsurilor în jurul unui punct este $360^0 \Rightarrow$
$x^0 + (2x+1)^0 + (3x+2)^0 + \cdots + (8x+7)^0 + (9x-n)^0 = 360^0 \Rightarrow$
$x^0 + (2x+1)^0 + (3x+2)^0 + \cdots + (8x+7)^0 \leq 360^0 \Rightarrow 36 \cdot x < 332 \Rightarrow \ x \leq 9$ 2p
$[x \cdot (1+2+3+\cdots \cdot 9)]^0 + (28-n)^0 = 360^0$.
$(45 \cdot x)^0 + (28-n)^0 = 360^0 \ \Rightarrow$ 1p
$(45 \cdot x)^0 - n = 332^0$ $, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 45 \cdot x - 332 > 0 \Rightarrow \ x \geq 8, \ n \in \mathbb{N}^*$ 1p
$x \geq 8, x < 10, x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in \{8, 9\}$ 1p
Cazul 1. $x = 8 \Rightarrow n = 28 \Rightarrow$ măsurile unghiurilor sunt: $\{8°, 17°, 26°, 35°, 44°, 53°, 62°, 71°, 44°\}$;
Cazul 2. $x = 9 \Rightarrow n = 73 \Rightarrow$ măsurile unghiurilor sunt: $\{9°, 19°, 29°, 39°, 49°, 59°, 69°, 79°, 8°\}$;
Problema are soluțiile: $\{8°, 17°, 26°, 35°, 44°, 53°, 62°, 71°, 44°\}$ și
$\{9°, 19°, 29°, 39°, 49°, 59°, 69°, 79°, 8°\}$. …………………..…………………………………….. 2p

Subiectul 4 (7 puncte)

Mai mulți copii (cel puțin 5) stau aranjați în cerc. Ei pasează între ei o minge. Inițial mingea e la Alex care o transmite la al patrulea copil spre stânga. În continuare, fiecare copil, după ce primește mingea, o transmite mai departe celui de-al patrulea copil din stânga sa. (Dacă etichetăm cei *n* copii cu 1, 2, …, *n*, Alex fiind etichetat cu 1, atunci copilul cu eticheta *k* îi pasează celui cu eticheta $k+4$ dacă $k+4 \leq n$, respectiv celui cu eticheta $k+4-n$ dacă $k+4 > n$.) Știind că mingea se reîntoarce la Alex după efectuarea a 7 pase (și nu a mai trecut pe la el între timp), aflați numărul copiilor. Determinați toate posibilitățile și justificați răspunsul.

Andrei Eckstein

Soluţie.

Numărul de pase care se efectuează până când mingea se întoarce pentru prima oară la Alex depinde de *n* în felul următor:

- dacă $n = 4m$, cu $m \in \mathbb{N}$, atunci mingea, pornind de la Alex, ajunge succesiv la copii etichetați 5, 9, …, $4(m-1)+1$, 1 (Alex), astfel că se întoarce la Alex după *m* pase. Așadar, o primă posibilitate este $n = 28$. 2p
- dacă $n = 4m+1$, cu $m \in \mathbb{N}$, atunci mingea, pornind de la Alex, ajunge succesiv la copii etichetați 5, 9, …, $4(m-1)+1$, 4, 8, 12, …, $4m$, 3, 7, 11, …, $4(m-1)+3$, 2, 6, 10, …, $4(m-1)+2$, 1 (Alex), astfel că se întoarce la Alex după *n* pase. Obținem $n = 7$, care însă nu este de forma $4m+1$.
- dacă $n = 4m+2$, cu $m \in \mathbb{N}$, atunci mingea, pornind de la Alex, ajunge succesiv la copii etichetați 5, 9, …, $4(m-1)+1$, 3, 7, 11, …, $4(m-1)+3$, 1 (Alex), astfel că se întoarce la Alex după $2m+1$ pase. Așadar, o a doua posibilitate este $n = 14$. 2p

-
- dacă $n = 4m + 3$, cu $m \in \mathbb{N}$, atunci mingea, pornind de la Alex, ajunge succesiv la copii etichetați 5, 9, …, $4(m-1)+1$, 2, 6, 10, …, $4m+2$, 3, 7, 11, …, $4(m-1)+3$, 4, 8, 12, …, $4m$, 1 (Alex), astfel că se întoarce la Alex după n pase. Așadar, o a treia posibilitate este $n = 7$, care este de forma $4m+3$, deci convine. 2p

În concluzie, putem avea 7, 14 sau 28 de copii. 1p

-