Inspectoratul Școlar Județean Timiș   Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

Clasa a XI-a
Barem de corectare și notare

1. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{C}*$ oarecare și $V(a,b,c)=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$ determinantul Vandermonde asociat.

   Exprimați în funcție de $V(a,b,c)$ determinanții $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & b+c & a^2\\ 1 & c+a & b^2\\ 1 & a+b & c^2\end{vmatrix}$ și $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ca\\ 1 & c & ab\end{vmatrix}$.

   b) Calculați determinantul Δ de mai jos, scriind rezultatul sub formă de produs:

$$\Delta=\begin{vmatrix}b+c & c+a & a+b\\ a & b & c\\ \dfrac{a^2}{b+c} & \dfrac{b^2}{c+a} & \dfrac{c^2}{a+b}\end{vmatrix}$$

Soluţie:

a) $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & b+c & a^2\\ 1 & c+a & b^2\\ 1 & a+b & c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & b+c+a-a & a^2\\ 1 & c+a+b-b & b^2\\ 1 & a+b+c-c & c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a+b+c & a^2\\ 1 & a+b+c & b^2\\ 1 & a+b+c & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -a & a^2\\ 1 & -b & b^2\\ 1 & -c & c^2\end{vmatrix}=$

$=-V(a,b,c)$ ……………………………………………………………………………2p

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ca\\ 1 & c & ab\end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\cdot\begin{vmatrix}a & a^2 & abc\\ b & b^2 & abc\\ c & c^2 & abc\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=$$

$=V(a,b,c)$ ……………………………………………………………………………....2p

b) Scoate factor comun de pe fiecare coloană și obține:

$\Delta=(b+c)(c+a)(a+b)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{a}{b+c} & \frac{b}{c+a} & \frac{c}{a+b}\\ \frac{a^2}{(b+c)^2} & \frac{b^2}{(c+a)^2} & \frac{c^2}{(a+b)^2}\end{vmatrix}$ – determinant de tip Vandermonde………2p

Obține $\Delta=(b\vdash c)(c+a)(a\vdash b)\left(\frac{b}{c+a}-\frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{c}{a+b}-\frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{c}{a+b}-\frac{b}{c+a}\right)$ ………………………1p

2. Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ și $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\in M_n(\mathbb{R})$ matricea cu elementele

$$a_{ij}=\begin{cases}1-n, & dac\breve{a}\ \ i=j,\\ 1, & dac\breve{a}\ \ i\neq j.\end{cases}$$

   Calculați A^m pentru $m\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie:
$A = U_n - nI_n$, unde $u_{ij} = 1,\ (\forall) i,j,\ 1 \le i,j \le n.$
Deduce $U_n^m = n^{m-1} U_n \quad,\ (\forall) m \in \mathbb{N}^*$ ………………………………………………………2p
Cum $U_n I_n = I_n U_n$, atunci
$A^m = (U_n - nI_n)^m = (-1)^m \cdot n^m\, I_n + n^{m-1} \cdot U_n \cdot \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \cdot C_n^k$……………………….3p
Arată că $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \cdot C_n^k = (-1)^m$ ……………………………………………………….1p
Deduce $A^m = (-1)^m (n^m I_n - n^{m-1} U_n)$ ……………………………………………………...1p

3. Calculați limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[7]{1+3x}}{\sqrt[4]{1+4x} + x - \sqrt[6]{1+x}}.$$

Soluţie:

Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[7]{1+3x}}{\sqrt[4]{1+4x} + x - \sqrt[6]{1+x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \sqrt[7]{1+3x} + 1}{\sqrt[4]{1+4}x - 1 + x + 1 - \sqrt[6]{1+7c}} =$ ……………………………………….2p

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{-3x}{1+\sqrt[7]{1+3}x + \cdots + \sqrt[7]{(1+3x)^6}}}{\frac{4x}{\sqrt[4]{(1+4x)^3} + \sqrt[4]{(1+4x)^2} + \sqrt[4]{1+4x} + 1} + x + \frac{-x}{1+\sqrt[6]{1+x} + \cdots + \sqrt[6]{(1+x)^5}}} =$$ ……………………………………………3p

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{7}}{\frac{4}{4} + 1 - \frac{1}{6}} = \frac{3}{77}.$$ ………………………………………………………………………………..2p

4. Fie $a > 0$ un număr real pozitiv oarecare și considerăm șirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1 = a$ și $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2}$ pentru orice $n \ge 1$.
   a) Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\ge1}$ și, în caz de convergență, calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
   b) Demonstrați că șirul $(nx_n)_{n\ge1}$ e convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Soluţie:

a) $x_1 > 0 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{1+x_1^2} > 0$, apoi prin inducție $x_n > 0,\ (\forall) n \ge 1$ …………………………1p

<u>Monotonia</u>: $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{1+nx_n^2} - x_n = -\frac{nx_n^3}{1\vdash nx_n^2} < 0,\ (\forall) n \ge 1$ ………………………..1p

Cum $(x_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător și mărginit inferior, atunci este convergent. ………1p

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l,\quad l \ge 0$
Presupunem că $l \ne 0$, atunci trecem la limită în relația de recurență, se obține $l = 0$ absurd, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ……………………………………………………………………1p

b) Fie $y_n = nx_n, n \geq 1$.

Avem $y_1 = x_1$, $y_2 = 2x_2 = \frac{2x_1}{1+x_1^2} \leq 1$.

Demonstrăm prin inducție că $y_n \leq 1$, $(\forall)n \geq 2$.

Din $y_n = nx_n \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{n}$, $x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{n+1}$. Înlocuind în relația de recurență se obține:

$y_{n+1} = \frac{(n+1)y_n}{y_n^2+n}$. Atunci $y_{n+1} - 1 = \frac{(1-y_n)(y_n-n)}{y_n^2+n} \leq 0 \Longrightarrow y_n \leq 1$, $(\forall)n \geq 2$

Apoi $y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1)y_n}{y_n^2+n} - y_n = \frac{y_n(1-y_n^2)}{y_n^2+n} \geq 0$, $(\forall)n \geq 2, deci\ (y_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

Șirul este mărginit superior și monoton crescător, deci este convergent. ……………….2p

Fie $l = \lim_{n\to\infty} y_n \in [0,\infty)$. Avem $y_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Aplicăm **Stoltz** – **Cesaro** :

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1+nx_n^2}{x_n}-\frac{1}{x_n}} -= \frac{1}{l}$. Deci $l = \frac{1}{l} \Rightarrow l = 1$ ………………………………..1p