Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

Clasa a V-a
Barem de corectare și notare

1. a) *Mai multe numere naturale consecutive sunt scrise în ordine crescătoare. Știind că diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre ele este 2023, iar suma primelor 7 numere este 2023, determinați câte dintre aceste numere se împart exact la 10.*

Soluţie:

a) Numerele sunt: $a, a+1, a+2, \dots, a+2023$, unde $a \in \mathbb{N}$ 1p

$a+(a+1)+(a+2)+\ \dots .+(a+6)=2023 \Rightarrow a=286$ 1p

Cel mai mare număr este $286+2023=2309$. 1p

De la 286 la 2309 au ultima cifră 0 numerele: 290, 300, 310, 320, 330, ..., 2300, în total fiind

$230-29+1=202$ numere care se împart exact la 10. ....1p

b) Care este cel mai mic număr natural de forma $\overline{2023a_1a_2 \dots a_n2023}$ *care are suma cifrelor egală cu 2023.*

Soluţie:

b) $a_1+a_2+\cdots+a_n=2023-2\cdot(2+0+2+3)=2009$ 1p

Pentru ca numărul să fie cel mai mic, el trebuie să aibă cât mai puține cifre, deci trebuie să aibă cât mai multe cifre de 9. Cum 2009 împărțit la 9 dă câtul 223 și restul 2, deduce că numărul conține o cifră 2 și 223 cifre 9. ....1p

Numărul cerut este $20232\underbrace{999\dots .9}_{223\ cifre}2023$. 1p

2. a) Determinați numărul natural $\overline{ab}$ *știind că* $\overline{1ab}=(a+b-1)^2$.

Soluţie:

Cum $\overline{1ab}=(a+b-1)^2$ deduce că $\overline{1ab}=(a+b-1)^2$ este pătrat perfect deci, poate fi 121, 144, 169 sau 196. ....1p

Analizează fiecare caz și obține $\overline{1ab}=(a+b-1)^2$ =196, deci $\overline{ab}$ =96 ....2p

b) Calculați suma tuturor numerelor naturale de trei cifre pentru care, suprimând cifra sutelor se obține un număr de 6 ori mai mic.

Soluţie:

$\overline{szu}=6\cdot\overline{zu}$ 1p

$100s+\overline{zu}=6\cdot\overline{zu} \Rightarrow 100s=5\cdot\overline{zu} \Rightarrow 20s=\overline{zu}$ 1p

Analizează fiecare situație posibilă:

1. Dacă $s=1$ atunci $\overline{zu}=20$, deci $\overline{szu}=120$
2. Dacă $s=2$ atunci $\overline{zu}=40$, deci $\overline{szu}=240$
3. Dacă $s=3$ atunci $\overline{zu}=60$, deci $\overline{szu}=360$

4. Dacă $s = 4$ atunci $\overline{zu} = 80$, deci $\overline{szu} = 480$ 1p

Calculează suma numerelor și obține 1200. ……………………......1p

3. Fie numerele $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2023}$ *și*

$$b = (63^5 - 3^{10})^{10} : (7^{35} : 49^{15} - 2023^0)^{10} : 81^{25}.$$

a) Determinați restul împărțirii numărului a *la 4;*

Soluție:

$a = 1 + 2 + 2^2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 2^{2021})$ 1p

$\Rightarrow a = 3 + 4 \cdot (1 + 2 + \cdots + 2^{2021})$ 1p

Restul împărțirii numărului a la 4 este 3 ....1p

b) Determinați numărul natural x *pentru care* $a + b = 4^x$.

Soluție:

$a = 2^{2024} - 1$ 1p

$b = (3^{10} \cdot 7^5 - 3^{10})^{10} : (7^5 - 1)^{10} : 3^{100}$ 1p

$b = 3^{100} \cdot (7^5 - 1)^{10} : (7^5 - 1)^{10} : 3^{100} \Rightarrow b = 1$ 1p

$a + b = 4^x \Rightarrow 2^{2024} = 4^x \Rightarrow x = 1012$ 1p

4. Câte dintre numerele naturale mai mici decât 2023 au în scrierea lor în baza 10 și cifra 1 și cifra 2 și cifra 3?

Soluție:

Sunt 6 numere de trei cifre: 123, 132, 213, 231, 312, 321. ....1p

Numerele de patru cifre care sunt mai mici decât 2023 pot avea prima cifră 1 sau 2.

Cu prima cifră 2 avem un singur număr, 2013. Cifra sutelor trebuie să fie 0, iar 2031 este prea mare. 1p

Cu prima cifră 1 și cifra a doua 0 avem două numere: 1023 și 1032.

Tot câte două numere vom avea și dacă cifra sutelor este 1, 4, 5, 6, 7, 8 sau 9. În aceste 8 cazuri obținem în total 16 numere. 1p

Numerele care încep cu 12 îl au pe 3 fie ca cifra zecilor (10 numere) fie ca cifra unităților (10 numere) numai că numărul 1233 a fost considerat la ambele categorii, deci în realitate sunt 19 numere care încep cu grupul 12. La fel, sunt 19 numere care încep cu grupul 13. .... 3p

În total, sunt 6+1+16+19+19=61 de numere cu proprietatea din enunț. 1p