Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, judeţul Timiş
15 Februarie 2023

clasa a 9-a

1. a) Demonstraţi că pentru orice $x, y > 0$, cu proprietatea că $x \cdot y = 1$, are loc inegalitatea $(1+x)(1+y) \geq 4$.
b) Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi orice $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, cu proprietatea că $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, are loc inegalitatea

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n .$$

2. a) Notând cu $\lfloor x \rfloor$ partea întreagă a unui număr real x, arătaţi că

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } x \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{, dacă } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

b) Rezolvaţi ecuaţia

$$\left\lfloor \frac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 4x + 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-x^2 + 4x - 6}{x^2 - 4x + 5} \right\rfloor = 1 .$$

3. În interiorul unui triunghi oarecare ABC se consideră un punct M. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{BMC}$, $\widehat{CMA}$ şi $\widehat{AMB}$ intersectează laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ în punctele D, E, respectiv F. Arătaţi că
a) dreptele AD, BE şi CF sunt concurente într-un punct P.
b) dacă are loc egalitatea

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{BP}{PE} \cdot \frac{CP}{PF} = 8 ,$$

atunci M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

4. Fie ABC un triunghi oarecare, $t \in (0, \infty)$ un număr pozitiv, iar $M \in [BC]$, $N \in [CA]$, $P \in [AB]$, astfel încât

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = t .$$

a) Determinaţi aria triunghiului MNP în funcţie de aria triunghiului ABC şi valoarea numărului real pozitiv t.
b) Care este valoarea minimă a ariei triunghiului MNP? Pentru ce valoare a lui t se atinge această valoare minimă?

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de 3 ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte.