Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

Clasa a VII-a
Barem de corectare și notare

1.

a) Aflaţi al 2023-lea termen al şirului de mai jos:

1;3;3;3;5;5;5;5;5;7;7;7;7;7;7;7;9;9;9;9;9;9;9;9;9;...

b) Să se afle numerele raţionale p şi q care verifică următoarea egalitate :

$$p\cdot \sqrt{6+2\sqrt{5}} + q\cdot |1-\sqrt{5}| = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

Soluţie:

1

a) Numărul total de termeni dintr o secvenţă de forma 1;3;3;3;5;5;5;5;5;.....;(2*k*-1);(2*k*-1);...;(2*k*-1), unde numărul natural impar 2*k*-1 se repetă de 2*k*-1 ori (*k* număr natural nenul) este egal cu:

1+3+5+7+...+(2*k*-1)=k^2. ....2p

Cum $2\cdot 44-1=87$ şi $2\cdot 45-1=89$, al 2023-lea termen este 89. ....1p

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}+1$; $|1-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-1$; $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$

înlocuirea lor în egalitatea dată $p\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)+q\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)=\sqrt{5}+2$ 2p

prelucrarea egalităţii până la cea echivalentă cu ea, $(p+q-1)\cdot\sqrt{5}=-p+q+2$, unde numerele $p+q-1$ şi $-p+q+2$ sunt raţionale, iar $\sqrt{5}$ este număr iraţional...1p

Rezultă că $p+q-1=0$ și apoi că $-p+q+2=0$. Deduce

$q=-\frac{1}{2}$, apoi $p=\frac{3}{2}$, ambele raționale 1p

2. a). Arătaţi că nu există numere raţionale de forma $\sqrt{\overline{b0b0b0b0b}}$, unde numărul de sub radical este un număr natural scris în baza 10, iar *b* este o cifră nenulă.

b)Arătaţi că există o infinitate de numere raţionale de forma $\sqrt{2^m+2^n+2^p}$, unde *m*, *n* și *p* sunt numere naturale.

Soluţie: a). Dacă $b\in\{2;3;7;8\}$ atunci numărul de sub radical nu este pătrat perfect, deci numărul $\sqrt{\overline{b0b0b0b0b}}$ nu este raţional...1p

Dacă $b=5$ atunci numărul $\overline{b0b0b0b0b}$ este divizibil cu 5, dar nu este divizibil cu 25, $\overline{b0b0b0b0b}$ nu este pătrat perfect, deci $\sqrt{\overline{b0b0b0b0b}}$ nu este raţional.

Dacă $b=6$ atunci numărul $\overline{b0b0b0b0b}$ este divizibil cu 2, dar nu şi cu 4, $\overline{b0b0b0b0b}$ nu este pătrat perfect, deci $\sqrt{\overline{b0b0b0b0b}}$ nu este raţional.............................1p

Dacă $b\in\{1;4;9\}$ atunci folosind scrierea $\overline{b0b0b0b0b}=b\cdot\overline{101010101}$, faptul că 1, 4

și 9 sunt pătrate perfecte, dar și că numărul 101010101 nu este pătrat perfect rezultă că $\sqrt{\overline{b0b0b0b0b}}$ nu este număr raţional. 1p
Verifică faptul că numărul 101010101 nu este pătrat perfect. 1p

b). Găsirea a trei puteri ale lui 2 care au suma egală cu un pătrat perfect, de exemplu $2^0+2^3+2^4=25=5^2$ sau $2^0+2^2+2^2=9=3^2$…………………. 1p
Ideea transformării sumei de sub radical în produs în vederea scrierii ca un pătrat perfect a numărului de sub radical sau a scoaterii factorilor de sub radical, de exemplu, $2^m+2^n+2^p=2^m\cdot(2^0+2^{n-m}+2^{p-m})$, în cazul $m\leq n, m\leq p$ ……………………..1p
Scrierea unei familii infinite de soluții, de exemplu *m* = 2*c*, *n* = 2*c*+3 şi *p* = 2*c*+4, unde *c* este un număr natural arbitrar. ……………………………………………………….……1p

3. Două cercuri secante, cu centrele în punctele O_1 și O_2, au lungimile $6\pi\ cm$, respectiv $12\pi\ cm$. Distanţa dintre centrele lor este egală cu 4 *cm*. Punctele comune ale celor două cercuri sunt *A* şi *B*. Se notează cu [*MN*] și [*PQ*] diametrele paralele cu dreapta *AB* ale cercului mic, respectiv cercului mare, astfel încât punctele *M* și *Q* să fie de aceeaşi parte a dreptei O_1O_2.

a) Calculaţi perimetrul patrulaterului *MNPQ.*
b) Calculaţi aria patrulaterului cu vârfurile în punctele *A, B, P* şi *Q*.

prof. Gabriela Bușe

Soluţie: a) Aflarea razelor (3 *cm*, 6 *cm*) şi justificarea faptului că patrulaterul *MNPQ* este trapez (isoscel) 1p
O_1O_2 este perpendiculară pe dreapta *AB*, deci $[O_1O_2]$ este înălţime a trapezului *MNPQ*
Calcularea lungimii laturilor neparalele ale trapezului *MNPQ*, de câte 5 *cm* fiecare şi finalizarea calculului: perimetrul trapezului *MNPQ* este 28 *cm*.......................................2p
b) Patrulaterul cu vârfurile *A, B, P* şi *Q* este trapez şi înălţimea sa, de exemplu O_2R, este egală cu distanţa dintre O_2 şi mijlocul *R* al segmentului *AB*
Dacă se notează cu *x* distanţa O_1R atunci putem folosi teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice O_1RB şi O_2RB; se obţin două ecuaţii cu necunoscuta *x* 1p
Aflarea numărului $x=\frac{11}{8}$, deci distanţa $O_1R=\frac{11}{8}$ *cm* sau 1,375 *cm* 1p
Calcularea înălţimii trapezului $\frac{11}{8}$ *cm* + 4 *cm* = $\frac{43}{8}$ *cm* sau 5,375 *cm*
Calcularea lungimii bazei mici $AB=2\,RB=2\cdot\frac{\sqrt{455}}{8}$ *cm* $=\frac{\sqrt{455}}{4}$ *cm* 1p
Calcularea ariei trapezului $\frac{43}{64}\cdot(48+\sqrt{455})\ cm^2$..1p

4. Fie *ABCD* un patrulater convex, astfel încât ∡A < 60° , *O* punctul de intersecție a diagonalelor, *OB* ≡ *OD* și 3·*OC* = *OA*. Arătați că patrulaterul *ABCD* are cel mult un unghi drept.

Soluţie: Fie $P\in(OA)$ cu proprietatea *OP* = *OC*. Cum *OB* = *OD,* rezultă că patrulaterul *BCDP* este paralelogram. 2p
Folosim metoda reducerii la absurd.
Dacă $\sphericalangle BCD$ ar fi 90° atunci paralelogramul *BCDP* ar fi dreptunghi. Cum unghiurile *ADC* și *ABC* sunt mai mari decât unghiurile *PDC*, respectiv *PBC,* rezultă că $\sphericalangle ABC$ este obtuz și $\sphericalangle ADC$ este tot obtuz.
Cum unghiul *A* este ascuţit, înseamnă că patrulaterul *ABCD* are, în acest caz, un singur unghi drept. 2p

Dacă unghiurile ADC şi ABC ar fi drepte atunci triunghiurile ABC şi ADC ar fi dreptunghice. Cum $[BP]$ şi $[DP]$ sunt mediane corespunzătoare ipotenuzei vom avea $BP = DP = \frac{AC}{2}$.

Mai avem că $CD = BP$ şi $PD = BC$, dar și că $PC = \frac{AC}{2}$. Atunci triunghiurile BCP și CPD ar fi echilaterale, deci unghiul BCD ar avea 120°.

Atunci suma unghiurilor patrulaterului $ABCD$ ar fi mai mică decât 360°, contradicţie. 3p