Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiş
15.02.2023

Clasa a 12-a
Barem de corectare și notare

1. *Fie* $G_1 = G_2 = (-1,1)$ *şi operaţiile* $"*","\circ"$ *definite astfel:*

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}, \forall x, y \in G_1 \text{ şi } x \circ y = \left(\frac{\sqrt[2013]{x} + \sqrt[2013]{y}}{1+\sqrt[2013]{xy}} \right)^{2013}, \forall x, y \in G_2.$$

a) Arătaţi că $(G_1,*)$ *şi* $(G_2,\circ)$ *sunt grupuri abeliene;*

b) Stabiliţi un izomorfism între grupurile considerate mai sus.

Soluţie:

a) Demonstrează că $(G_1,*)$ este grup...2p

Demonstrează că $(G_2,*)$ este grup...2p

b) Găseşte funcţia care realizează izomorfismul...1p

Demonstrează că funcţia este izomorfism...2p

2. *Se consideră funcţia* $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\quad , x = 0 \end{cases}$. *Demonstraţi că funcţia* f *admite primitive pe* R.

Soluţie:

Consideră funcţia $h: R \to R, h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$

Demonstrează că funcţia h este primitivabilă pe R 2p

Consideră funcţia $g: R \to R, g(x) = \begin{cases} (e^x - 1)\sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \qquad\qquad x = 0 \end{cases}$

Cum $|g(x) - g(0)| = |e^x - 1| \left|\sin\frac{1}{x}\right| \to 0$, rezultă că funcţia g este continuă în 0..........................1p

Dar funcţia g este continuă pe R^* (operaţii cu restricţii de funcţii elementare)...........................1p

Atunci funcţia g este primitivabilă pe R 1p

Obţine că funcţia $f = g + h$ este primitivabilă pe R 2p

3. *Se consideră funcţia* $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), x \geq -\sqrt{3} \\ x+m-\frac{\pi}{3} \qquad ,x<-\sqrt{3} \end{cases}, m \in R$.

a) Aflaţi valorile parametrului real m *pentru care funcţia* f *admite primitive pe* R*;*

b) Calculaţi $\int f(x)dx, x \in \left[-\sqrt{3}, +\infty\right)$

Soluţie:

a) Obţine $l_s\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3} + m - \frac{\pi}{3}$ 1p

Obţine $l_d\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ 1p

Obţine $m = \sqrt{3}$ 1p

b) Obţine o primitivă de forma

$$F: R \to R, F(x) = \begin{cases} x\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \ln\left(1+x^2\right) + C_1, x \in \left[-\sqrt{3}, -1\right] \\ x\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \ln\left(1+x^2\right) + C_2, x \in (-1,1) \\ x\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \ln\left(1+x^2\right) + C_3, x \in [1, +\infty) \end{cases}$$ 2p

Obţine primitiva...1p

$$F: R \to R, F(x) = \begin{cases} x\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \ln\left(1+x^2\right) - \ln 4 + C, x \in \left[-\sqrt{3} -1\right] \cup [1, +\infty) \\ x\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \ln\left(1+x^2\right) + C, x \in (-1,1) \end{cases}$$

Verifică condiţiile din definiţia primitivei...1p

4. *Fie* $(S,\cdot)$ *un semigrup cu proprietatea că* $x^3 = x$ *şi* $x^2y^2 = y^2x^2$ *pentru orice* $x, y \in S$.

Arătaţi că semigrupul S *este comutativ.*

(Se numeşte semigrup o pereche $(S,\cdot)$ *cu* S *nevidă şi legea de compoziţie* $"\cdot"$ *asociativă).*

(G.M. nr 10/2022)

Soluţie:

Notează cu $a = xy, b = yx, \forall x, y \in S$.

Atunci:

$xy = x^3y^3 = xx^2yy^2 = xy^2x^2y = xyyxxy \Rightarrow a = aba \Rightarrow ab = (ab)^2$ 1p

$yx = y^3x^3 = yy^2x^2x = yx^2y^2x = yxxyyx \Rightarrow b = bab \Rightarrow ba = (ba)^2$ 1p

Acum

$ab = a^3 b = a^2 ab = a^2 (ab)^2 = (ab)^2 a^2 = (ab) a^2 = abaa = a^2$ 1p

$ba = b^3 a = b^2 ba = b^2 (ba)^2 = (ba)^2 b^2 = (ba) b^2 = bab^2 = b^2$ 1p

$a^2 b^2 = b^2 a^2 \Rightarrow abba = baab \Rightarrow ab^2 a = ba^2 b$ 1p

$b^2 a = b(ba) = b^3 = b$

$a^2 b = a(ab) = a^3 = a$ 1p

$ab = ba \Rightarrow a^2 = b^2$

Dar $ba = b^2 \Rightarrow b^2 a = b^3 \Rightarrow a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ 1p