Inspectoratul Școlar Județean Timiș   Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

Clasa a 9-a
Barem de corectare și notare

1. a) Demonstrați că pentru orice $x, y > 0$, dacă $x \cdot y = 1$ atunci $(1+x)(1+y) \geq 4$.
   b) Demonstrați că pentru orice $a_i > 0,\ i = \overline{1,n}, \forall n \in N^*$, dacă $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ atunci $(1+a_1) \cdot (1+a_2) \cdot \ldots \cdot (1+a_n) \geq 2^n$.

Soluţie:

a) $(1+x)(1+y) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{(1+x)}{2} \cdot \frac{(1+y)}{2} \geq 1$ și $\frac{(1+x)}{2} \cdot \frac{(1+y)}{2} \geq \sqrt{1 \cdot x} \cdot \sqrt{1 \cdot y} = \sqrt{xy} = 1$ **2p**

b) Din inegalitatea mediilor $1 + a_i \geq 2\sqrt{1 \cdot a_i} = 2\sqrt{a_i}$ pentru orice $a_i > 0,\ i = \overline{1,n}, \forall n \in N^*$..**2p**
Înmulțind membru cu membru inegalitățile de mai sus se obține că
$(1+a_1) \cdot (1+a_2) \cdot \ldots \cdot (1+a_n) \geq 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot 2\sqrt{a_n} = 2^n \cdot \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n} = 2^n$ **3p**

2. a) Să se arate că $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.
   b) Să se rezolve ecuația $\left[\frac{2x^2-8x+11}{x^2-4x+5}\right] + \left[\frac{-x^2+4x-6}{x^2-4x+5}\right] = 1$.

Soluţie:

a) Dacă $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = x - x = 0$ ………………………………………**1p**

Dacă $x \notin \mathbb{Z}, [x] = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k < x < k+1 \Rightarrow -k-1 < -x < -k \Rightarrow [-x] = -k-1$
deci $[x] + [-x] = -k - 1 + k = -1$ ………………………………………………………**1p**

b) Ecuația se transformă în următoarele ecuații echivalente:

$\left[\frac{1}{x^2-4x+5} + 2\right] + \left[\frac{-1}{x^2-4x+5} - 1\right] = 1$ ………………………………………………**1p**

$\left[\frac{1}{x^2-4x+5}\right] + 2 + \left[\frac{-1}{x^2-4x+5}\right] - 1 = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{x^2-4x+5}\right] + \left[\frac{-1}{x^2-4x+5}\right] = 0$ …………………**2p**

Dacă notăm $a = \frac{1}{x^2-4x+5} = \frac{1}{(x-2)^2+1} \in (0,1]$, deducem din a) că
dacă $a \in (0,1)$ atunci $[a]+[-a] = -1$ adică ecuația nu are soluții ……………………… **1p**
dacă $a = 1$ atunci ecuația este verificată, deci $(x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ………... ……**1p**

3. În interiorul triunghiului ABC se consideră punctul M. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BMC, \sphericalangle CMA, \sphericalangle AMB$ intersectează laturile BC, CA, AB în punctele D, E respectiv F. Arătați că:
   a) dreptele AD, BE și CF sunt concurente într-un punct P.
   b) dacă $\frac{PA}{PD} \cdot \frac{PB}{PE} \cdot \frac{PC}{PF} = 8$, atunci M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

(supliment Gazeta Matematică 10/2022)

Soluție:

a) Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile ABM, BMC, AMC se obțin relațiile: $\frac{BM}{AM} = \frac{BF}{AF}$, $\frac{MC}{BM} = \frac{CD}{BD}$, respectiv $\frac{AM}{MC} = \frac{AE}{CE}$ ………………….…….…………………………..……**1p**

Înmulțind relațiile de mai sus membru cu membru se obține: $1 = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CD}{BD}$ și din teorema lui Ceva se obține concurența dreptelor AD, BE și CF. ……………………………..………..……**1p**

b) Din teorema lui Menelaus în triunghiurile ABE, ABD, AFC pentru transversalele FC, din nou FC și respectiv BE , se obțin relațiile $\frac{BP}{PE} \cdot \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DC}{CB} = 1$ respectiv $\frac{CP}{PF} \cdot \frac{FB}{BA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1$ ...**3p**

Înmulțind relațiile de mai sus membru cu membru și utilizând $\frac{PA}{PD} \cdot \frac{PB}{PE} \cdot \frac{PC}{PF} = 8$, se obține: $8 \cdot \frac{AE}{CA} \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{FB}{BA} = 1 \Leftrightarrow 8 = \frac{AE+EC}{AE} \cdot \frac{BD+DC}{DC} \cdot \frac{BF+F}{BF} \Leftrightarrow 8 = (1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot (1 + a_3)$ unde se notează $a_1 = \frac{EC}{AE}$, $a_2 = \frac{BD}{DC}$, $a_3 = \frac{FA}{BF}$ și $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1$ (din a)) **1p**

Din inegalitatea demonstrată la exercițiul 1b) , egalitatea are loc pentru $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ceea ce înseamnă că D, E, F sunt mijloacele laturilor BC, AC, AB . Cum MD, ME, MF sunt și bisectoare și mediane în triunghiurile BMC, CMA, AMB rezultă că triunghiurile sunt isoscele, deci $MA = MB = MC$, adică M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. **1p**

4. *Fie ABC un triunghi oarecare, $t \in (0, \infty)$ un număr pozitiv, iar $M \in [BC]$, $N \in [CA]$, $P \in [AB]$, astfel încât*

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = t\,.$$

a) Determinaţi aria triunghiului MNP în funcţie de aria triunghiului ABC şi valoarea numărului real pozitiv t.
b) Care este valoarea minimă a ariei triunghiului MNP? Pentru ce valoare a lui t se atinge această valoare minimă?

Soluţie şi barem:

Egalităţile din enunţ sunt echivalente cu

$$\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{t}{t+1}$$

şi cu

$$\frac{MC}{BC} = \frac{NA}{CA} = \frac{PB}{AB} = \frac{1}{t+1}\,.$$

.... **1p**.

Avem atunci

$$\frac{aria[ANP]}{aria[ABC]} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{t+1} = \frac{t}{(t+1)^2}\,,$$

şi, analog

$$\frac{aria[BMP]}{aria[ABC]} = \frac{aria[CMN]}{aria[ABC]} = \frac{t}{(t+1)^2}\,.$$

.... **2p**.

Atunci

$$\frac{aria[MNP]}{aria[ABC]} = \frac{aria[ABC] - aria[ANP] - aria[BMP] - aria[CMN]}{aria[ABC]} = 1 - 3 \cdot \frac{t}{(t+1)^2} = \frac{t^2 - t + 1}{(t+1)^2}\,.$$

.... **1p**.

b) Din inegalitatea mediilor avem că $t + 1 \geq 2\sqrt{t}$ pentru orice număr real pozitiv t, cu egalitate dacă şi numai dacă $t = 1$, astfel că

$$\frac{t}{(t+1)^2} \leq \frac{1}{4} \qquad , \text{ pentru orice } t > 0,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $t = 1$. .... **1p.**

Rezultă că

$$\frac{aria[MNP]}{aria[ABC]} = 1 - 3 \cdot \frac{t}{(t+1)^2} \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\,,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $t = 1$(i.e., dacă M, N şi P sunt mijloacele laturilor) .... **2p.**