Inspectoratul Școlar Județean Timiș Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

clasa a 10-a
Barem de corectare și notare

1. a) Arătați că $\log_3 5 < \frac{3}{2}$.

   b) Determinați partea întreagă a numărului $\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3$.

G.M 5/2018

Soluţie:

a) $\log_3 5 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 5 < \log_3 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 5 < 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 25 < 27$, relație adevărată ...2p

b) Din inegalitatea mediile obținem $\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 \geq 3\sqrt[3]{\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 3} = 3$ ...2p

Demonstrăm $\log_5 7 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_5 7 < \log_5 5^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 7 < 5^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 49 < 125$, relație adevărată ...1p

Cum $\log_7 3 < \log_7 7 = 1 \Rightarrow \log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 4$ ...1p

Deci $\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 \in [3,4) \Rightarrow [\log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3] = 3$ …1p

2. a) Arătați că $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$ pentru orice $z \in \mathbf{C}^*$.

   b) Fie $z \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$. Demonstrați că $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$.

Soluţie:

a) $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3 \cdot z \cdot \frac{1}{z} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^3} = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ...2p

b) $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^3\right| \leq \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| + \left|3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \leq 2 + 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|$ ...2p

Notând $\left|z + \frac{1}{z}\right| = t \in [0, \infty)$ obținem $t^3 \leq 2 + 3t \Leftrightarrow t^3 - 3t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow t^3 + 1 - 3(t+1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^3 + 1 - 3(t+1) \leq 0 \Leftrightarrow (t+1)\left(t^2 - t - 2\right) \leq 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 (t-2) \leq 0$ ...2p

Cum $t + 1 > 0 \Rightarrow t \leq 2 \Rightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$ ...1p

3. Se consideră punctele A, B, C de afixe a, b și respectiv c, unde $a, b, c \in \mathbf{C}$. Demonstrați că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie:

Metoda 1

$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = bc + ac - ab - c^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 = (b-c)(c-a)$ ...2p

Trecând la modul obținem $|a-b|^2 = |b-c| \cdot |c-a|$, adică $AB^2 = BC \cdot CA$ ...2p

Procedând analog obținem $BC^2 = CA \cdot AB$ și $CA^2 = AB \cdot BC$ ...1p

Avem $\dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow AB^3 = BC^3 \Rightarrow AB = BC$ ...1p

și $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB^3 = AC^3 \Rightarrow AB = AC$, deoarece $AB, BC, AC > 0$. Deci ΔABC echilateral ...1p

Metoda 2

ΔABC echilateral $\Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta BCA \Leftrightarrow \dfrac{b-a}{b-c} = \dfrac{c-b}{c-a} \Leftrightarrow$ ...5p

$\Leftrightarrow bc - ab - ac + a^2 = bc - b^2 - c^2 + bc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ ...2p

4. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc spre exterior triunghiurile asemenea $KBC \sim LCA \sim MAB$. Arătați că triunghiurile ABC și KLM au același centru de greutate.

Soluţie:

Fie $a, b, c, k, l, m \in \mathbf{C}$ afixele punctelor A, B, C, K, L și respectiv M.

$KBC \sim LCA \sim MAB \Leftrightarrow \dfrac{k-b}{c-b} = \dfrac{l-c}{a-c} = \dfrac{m-a}{b-a} = \lambda \in \mathbf{C}^*$ ...3p

Obținem $k = \lambda(c-b) + b,\ l = \lambda(a-c) + c,\ m = \lambda(b-a) + a$ ...2p

de unde avem $k + l + m = \lambda(c - b + a - c + b - a) + a + b + c \Rightarrow k + l + m = a + b + c$ ...1p

Deci ABC și KLM au același centru de greutate. ...1p