Varianta 2
Barem

Olimpiada națională de matematică

Etapa locală, județul Teleorman, 25 februarie 2023

Clasa a VIII – a

1.

$1+2ab \le 1+2ab+c^2+d^2$ => $\frac{1+2ab}{1+c^2+2ab+d^2} \le \frac{1}{1}$ ……………………………………………..1p

=> $\frac{1+2ab}{2+c^2+2ab+d^2} \le \frac{1}{1+1}$……………..……………….2p

Analog $\frac{1+2bc}{2+a^2+2bc+d^2} \le \frac{1}{2}$

$\frac{1+2cd}{2+a^2+2cd+b^2} \le \frac{1}{2}$.

$\frac{1+2da}{2+b^2+2ad+c} \le \frac{1}{2}$. ………………………….2p

Si adunând cel patru relații obținem

$$\frac{1+2ab}{2+c^2+2ab+d^2}+\frac{1+2bc}{2+a^2+2bc+d^2}+\frac{1+2cd}{2+a^2+2cd+b^2}\frac{1+2da}{2+b^2+2ad+c} \le 2$$

Finalizare ……………………………………………………………2p

2.a) $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ ⇔ $2\sqrt{xy} \le x+y$ ⇔ $0 \le x-2\sqrt{xy}+y$ ⇔ $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \ge 0$ 2p

b) $\sqrt{d \cdot a \cdot b - a \cdot c} = \sqrt{a \cdot (d \cdot b - c)} \le \frac{a+db-c}{2}$ ($m_g \le m_a$)

$\sqrt{d \cdot b \cdot c - a \cdot b} = \sqrt{b \cdot (d \cdot c - a)} \le \frac{b+dc-a}{2}$

$\sqrt{d \cdot a \cdot c - b \cdot c} = \sqrt{c \cdot (d \cdot a - b)} \le \frac{c+da-b}{2}$ 2p

+____

$\sqrt{d \cdot a \cdot b - a \cdot c}+\sqrt{d \cdot b \cdot c - a \cdot b}+\sqrt{d \cdot a \cdot c - b \cdot c} \le \frac{a+db-c+b+dc-a+c+da-b}{2}$,..........1p

$3d \le \frac{db+dc+da}{2}=\frac{d(a+b+c)}{2}=\frac{d \cdot 6}{2} = 3d$

$3d \le 3d$ 1p

Egalitatea are loc pentru a=db-c

b=dc-a

c=da-b

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

⇨ a=b=c=d=2 ....1p

3.a) Fie $DM \perp AC$, $M \in AC$, $DM \subset (DAC)$ și $MN \perp BC$, $N \in BC$ (după îndoire).

Conform teoremei celor trei perpendiculare avem $DN \perp BC$, deci distanța cerută este DN **1p**
Din $\Delta\ DMC$ rezultă $DM=2$ **1p**
$MN=3$ **1p**
$DN^2 = DM^2 + MN^2 \Rightarrow DN = \sqrt{13}$ cm **1p**
b)
$BN = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **2p**
$BD^2 = DN^2 + NB^2$
$BD = \frac{2\sqrt{30}}{3}$ cm **1p**

4. a) desen 1p

$A_{ABCD} = 144\sqrt{3}cm^2$ 1p

b) QC=$12\sqrt{2}$cm 2p

d(Q,BC)=QB 1p

QB=12cm 2p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro