BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. **(2p) a)** Descompuneți în factori primi 2023.
(5p) b) Determinați numerele prime *a* și *b* care verifică relația $2023a+14b=10353$

Claudia Marchitan, Suceava

***Soluție*. a)** $2023=7\cdot 17^2$

b) $2023a+14b=10353 \,/ :7 \Leftrightarrow \underset{\vdots 17}{289}a+2b=\underset{\vdots 17}{1479} \Rightarrow 2b \vdots 17 \Rightarrow b \vdots 17$, dar b prim $\Rightarrow b=17$

Atunci $289a+2\cdot 17=1479 \Rightarrow 289a+34=1479 \Rightarrow 289a=1445 \Rightarrow a=5$ prim

Barem.

a) $2023=7\cdot 17^2$	**2p**
b) $2023a+14b=10353 \,/ :7 \Leftrightarrow \underset{\vdots 17}{289}a+2b=\underset{\vdots 17}{1479} \Rightarrow 2b \vdots 17 \Rightarrow b \vdots 17$, dar b prim $\Rightarrow b=17$	**3p**
$289a+2\cdot 17=1479 \Rightarrow 289a+34=1479 \Rightarrow 289a=1445 \Rightarrow a=5$ prim	**2p**

2. Ana și Vlad sunt dornici de aventură. Ei vor să găsească comoara ascunsă în una din camerele castelului. Toate camerele sunt închise, iar pe fiecare ușă este scris un număr (nu există uși care să aibă același număr). Au aflat că fiecărui număr îi este atribuit un cod de patru cifre astfel: prima cifră este restul împărțirii numărului la 2, a doua cifră este restul împărțirii numărului la 3, a treia cifră este restul împărțirii numărului la 5, iar a patra cifră este restul împărțirii numărului la 7.
(2p) a) Aflați codul de intrare în camera comorii, știind că pe ușă este scris numărul 2023.
(5p) b) Aflați câte camere are castelul, dacă numerele scrise pe uși sunt mai mici decât 6150 și toate au codul 1234, cu excepția celei în care se află comoara.

Dorina Cionca, Suceava

***Soluție.* a)** Cum $2023:2=1011$ rest 1, $2023:3=674$ rest 1, $2023:5=404$ rest 3 și $2023:7=289$ rest 0, camera 2023 are codul de acces 1130.

b) Fie n numărul natural scris pe ușa unei camere în care nu se află comoara, cu $n<6150$. Cum codul de acces în camera este 1234, avem: $n=2c_1+1$, $n=3c_2+2$, $n=5c_3+3$ și $n=7c_4+4$. Adunând 157 la toate egalitățile obținem: $n+157=2c_1+158=2(c_1+79)\in M_2$,
$n+157=3c_2+159=3(c_2+53)\in M_3$, $n+157=5c_3+160=5(c_3+32)\in M_5$ și
$n+157=7c_4+161=7(c_4+23)\in M_7$ care ne conduc la $n+157\in M_2\cap M_3\cap M_5\cap M_7 \Rightarrow$
$\Rightarrow n+157\in M_{[2,3,5,7]} \Rightarrow n+157\in M_{210} \Rightarrow n+157\in\{210,420,630,...\} \Rightarrow n\in\{53,263,473,...\}$, deci n este de forma $n=53+210\cdot k$, cu $k\in\mathbb{N}$. Dar $n<6150$ și astfel obținem $k\in\{0,1,2,...,29\}$ de unde rezultă că sunt 30 de camere cu codul de acces 1234 și încă o cameră cu comoara. Prin urmare, castelul are 31 de camere.

Barem.

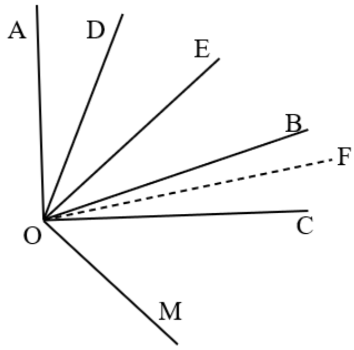
a) Cum $2023:2=1011$ rest 1, $2023:3=674$ rest 1, $2023:5=404$ rest 3 și $2023:7=289$ rest 0, camera 2023 are codul de acces 1130	**2p**
b) Scrie $n=2c_1+1$, $n=3c_2+2$, $n=5c_3+3$ și $n=7c_4+4$	**1p**
Determină $n\in\{53,263,473,...\}$	**2p**
Găsește 30 de camere cu codul de acces 1234	**1p**
Finalizează castelul are 31 de camere.	**1p**

3. Se consideră unghiurile adiacente și complementare *AOB* și *BOC*, punctele *D*, *E* în interiorul unghiului *AOB* astfel încât $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle DOE \equiv \sphericalangle EOB$, *OF* bisectoarea unghiului *BOC* și $\sphericalangle DOF = 56°$.

(4p) a) Determinați măsurile unghiurilor *AOB* și *BOC*.

(3p) b) Dacă $OM \perp OE$ astfel încât punctul *C* să fie în interiorul unghiului *BOM*, arătați că semidreapta *OF* este bisectoarea unghiului *DOM*.

Gabriela Sascău, Rădăuți



Soluție.

a) Unghiurile *AOB* și *BOC* adiacente și complementare $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 90°$.
Notăm $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOE = \sphericalangle EOB = x$
OF bisectoarea unghiului *BOC* $\Rightarrow \sphericalangle BOF = \sphericalangle FOC = y$
$\sphericalangle DOF = \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOB + \sphericalangle BOF = x + x + y = 2x + y$
Atunci avem $3x + 2y = 90°$ și $2x + y = 56°$ de unde vom obține $x = 22°$ și $y = 12°$.
$\sphericalangle AOB = 3x = 3 \cdot 22° = 66°$ și $\sphericalangle BOC = 2y = 2 \cdot 12° = 24°$

b) $OM \perp OE \Rightarrow \sphericalangle EOM = 90° \Rightarrow \sphericalangle EOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COM = 90° \Rightarrow 22° + 24° + \sphericalangle COM = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle COM = 44°$
Avem $\sphericalangle MOF = \sphericalangle COM + \sphericalangle COF = 44° + 12° = 56°$ și $\sphericalangle DOF = 56°$, atunci $\sphericalangle MOF = \sphericalangle DOF$.
Din $\sphericalangle MOF = \sphericalangle DOF$ și $OF \subset Int(\sphericalangle DOM) \Rightarrow$ *OF* este bisectoarea unghiului *DOM*

Barem.

a) Figura	**1p**
unghiurile *AOB* și *BOC* adiacente și complementare $\Rightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 90°$ $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOE = \sphericalangle EOB = x$ *OF* bisectoarea unghiului *BOC* $\Rightarrow \sphericalangle BOF = \sphericalangle FOC = y$ $\sphericalangle DOF = \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOB + \sphericalangle BOF = x + x + y = 2x + y$ $3x + 2y = 90°$ și $2x + y = 56°$	**1p**
Determină $x = 22°$ și $y = 12°$	**1p**
Află $\sphericalangle AOB = 3x = 3 \cdot 22° = 66°$ și $\sphericalangle BOC = 2y = 2 \cdot 12° = 24°$	**1p**
b) Arată că $\sphericalangle COM = 44°$	**1p**
Arată că $\sphericalangle MOF = \sphericalangle DOF = 56°$, iar $OF \subset Int(\sphericalangle DOM) \Rightarrow$ *OF* este bisectoarea unghiului *DOM*	**2p**

4. **(7p)** Fie șapte unghiuri în jurul unui punct, având măsurile exprimate prin numere naturale nenule care dau același rest prin împărțirea la 15. Demonstrați că printre acestea există două unghiuri de măsuri egale.

Gazeta Matematică Nr.9/2022

Soluție. Notând cu $n_1°, n_2°, n_3°, ..., n_7°$ măsurile celor șapte unghiuri în jurul unui punct, cu $n_1, n_2, n_3, ..., n_7 \in \mathbb{N}^*$ avem: $n_1° + n_2° + n_3° + ... + n_7° = 360° \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_7 = 360$ (1)
Dar $n_1 = 15 \cdot c_1 + r$, $n_2 = 15 \cdot c_2 + r$, ..., $n_7 = 15 \cdot c_7 + r$, cu $r \in \{0, 1, 2, ..., 14\}$, $c_1, c_2, c_3, ..., c_7 \in \mathbb{N}$ pe care înlocuindu-le în relația (1) obținem: $\underbrace{15 \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_7)}_{\vdots 15} + 7r = \underset{\vdots 15}{360} \Rightarrow \underset{\vdots 15}{7r} \Rightarrow r \vdots 15$, dar $r \in \{0, 1, 2, ..., 14\}$, atunci $r = 0$. Cum $n_1, n_2, n_3, ..., n_7 \in \mathbb{N}^*$ și $r = 0$, deducem că $c_1, c_2, c_3, ..., c_7 \in \mathbb{N}^*$ și $c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_7 = 24$.
Dacă toate cele 7 unghiuri ar fi diferite, atunci toate cele 7 câturi ar fi nenule și diferite între ele.

Cum suma celor mai mici 7 numere naturale nenule este $1+2+3+...+7=28>24 \Rightarrow$ măcar două dintre cele 7 câturi sunt egale, deci măcar două dintre cele 7 unghiuri sunt de măsuri egale.

<u>Barem.</u>

$n_1{}^\circ+n_2{}^\circ+n_3{}^\circ+...+n_7{}^\circ=360^\circ \Rightarrow n_1+n_2+n_3+...+n_7=360$	**1p**
$n_1=15\cdot c_1+r$, $n_2=15\cdot c_2+r$, ..., $n_7=15\cdot c_7+r$, cu $r\in\{0,1,2,...,14\}$, $c_1,c_2,c_3,...,c_7\in\mathbb{N}$	**1p**
Din $\underbrace{15\cdot(c_1+c_2+c_3+...+c_7)}_{\vdots 15}+7r=\underset{\vdots 15}{360} \Rightarrow \underset{\vdots 15}{7r} \Rightarrow r\,\vdots\,15$, dar $r\in\{0,1,2,...,14\}$, atunci $r=0$.	**2p**
$c_1,c_2,c_3,...,c_7\in\mathbb{N}^*$ și $c_1+c_2+c_3+...+c_7=24$	**1p**
Dacă toate cele 7 unghiuri ar fi diferite, atunci toate cele 7 câturi ar fi nenule și diferite între ele. Cum suma celor mai mici 7 numere naturale nenule este $1+2+3+...+7=28>24 \Rightarrow$ măcar două dintre cele 7 câturi sunt egale, deci măcar două dintre cele 7 unghiuri sunt de măsuri egale.	**2p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.