OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
18 februarie 2023
CLASA a XI-a

1. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ dat de $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \sqrt{1+(n+2)a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 1$.

(3p) b) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

2. **(7p)** Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+8}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+12}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\ldots+\dfrac{1}{n+2}\right)^n$.

3. **(7p)** Dacă a și b sunt numere complexe distincte și nenule, să se determine matricele $A \in M_3(\mathbb{C})$, astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$, unde n este număr natural nenul.

4. **(7p)** Fie $n \geq 2$ număr natural, M o mulțime cu n elemente și $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1}$ submulțimile nevide ale lui M, într-o ordine oarecare. Considerăm matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2^n-1}}$, unde $a_{ij} = |S_i \cap S_j|$, $\forall i, j = \overline{1, 2^n-1}$. Arătați că matricea A este singulară.

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.