OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2023
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a VIII-a

1. Fie numerele reale *a* și *b* astfel încât: $a^2+b^2-8a\sqrt{3}-6b\sqrt{2}+66=0$.

a) **(3p)** Aflați numerele reale a și b.

b) **(4p)** Comparaţi numerele reale *c* și *d*, unde $c=\frac{[a]-[b]}{[-a]-[-b]}+\frac{2[-b]^2}{5a}$, iar $d=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Prin $[x]$ se înțelege partea întreagă a numărului real *x*.

Profesor, Brutaru Tamara

<u>Soluție:</u>

a) $a^2+b^2-8a\sqrt{3}-6b\sqrt{2}+66=0 \Leftrightarrow \left(a-\sqrt{48}\right)^2+\left(b-\sqrt{18}\right)^2=0$, de unde $a=4\sqrt{3}, b=3\sqrt{2}$.

b) $[a]=6, [b]=4, [-a]=-7, [-b]=-5$. Calculând *c* obținem:

$c=\frac{[a]-[b]}{[-a]-[-b]}+\frac{2[-b]^2}{5a}=\frac{6-4}{-7+5}+\frac{2\cdot 25}{5\cdot 4\sqrt{3}}=-1+\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{5\sqrt{3}-6}{6}$, iar $d=\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{3+3\sqrt{2}}{6}$.

Cum $5\sqrt{3}-6<3$ şi $3+3\sqrt{2}>3$, avem $c<d$.

<u>Barem:</u>

a) $a^2+b^2-8a\sqrt{3}-6b\sqrt{2}+66=0 \Leftrightarrow \left(a-\sqrt{48}\right)^2+\left(b-\sqrt{18}\right)^2=0$	2 p
$a=4\sqrt{3}, b=3\sqrt{2}$	1 p
b) $[a]=6, [b]=4, [-a]=-7, [-b]=-5$	1 p
$c=\frac{[a]-[b]}{[-a]-[-b]}+\frac{2[-b]^2}{5a}=\frac{6-4}{-7+5}+\frac{2\cdot 25}{5\cdot 4\sqrt{3}}=-1+\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{5\sqrt{3}-6}{6}$	1 p
$d=\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{3+3\sqrt{2}}{6}$, $5\sqrt{3}-6<3$ şi $3+3\sqrt{2}>3$, $c<d$	2 p

2. a) **(2p)** Dacă a, b > 0, demonstrați că $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$.

b) **(5p)** Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive și x + y + z = 2023, arătați că:

$$\frac{x}{x+2023}+\frac{y}{y+2023}+\frac{z}{z+2023}<1.$$

Profesor, Popa Ana Marcela

<u>Soluție:</u>

a) Dacă a, b > 0, $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, egalitatea are loc dacă a = b.

b) Folosim inegalitatea de la punctul a. Dacă a, b > 0, atunci $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$, de unde $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$ **(1)** egalitatea are loc dacă a = b. Scriind relația **(1)** pentru a = x și b = 2023 obținem $\frac{2023x}{x+2023} \le \frac{x+2023}{4}$ **(2).** Scriind relația (1) pentru a = y și b = 2023 obținem $\frac{2023y}{y+2023} \le \frac{y+2023}{4}$ **(3).** Scriind relația **(1)** pentru a = z și b = 2023 obținem $\frac{2023z}{z+2023} \le \frac{z+2023}{4}$ **(4).**

Adunând **(2)**, **(3)** și **(4)** rezultă $\frac{2023x}{x+2023}+\frac{2023y}{y+2023}+\frac{2023z}{z+2023} \le \frac{2023\cdot 3+x+y+z}{4}$.

Cum x + y + z = 2023 avem $\frac{2023x}{x+2023}+\frac{2023y}{y+2023}+\frac{2023z}{z+2023} \le \frac{2023\cdot 4}{4}$, împărtim prin 2023 și obținem

$$\frac{x}{x+2023}+\frac{y}{y+2023}+\frac{z}{z+2023} \le 1.$$

Egalitatea nu poate avea loc, deoarece x + y + z = 2023 , deci $\frac{x}{x+2023}+\frac{y}{y+2023}+\frac{z}{z+2023}<1$.

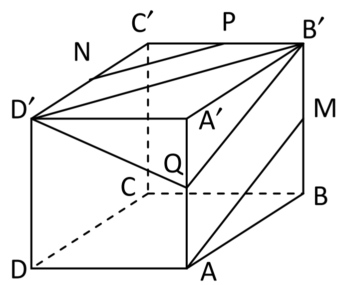
<u>Barem:</u>

a) Dacă a, b > 0, $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, egalitatea are loc dacă a = b.	2 p
b) Dacă a, b > 0, atunci $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$, de unde $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$,	1 p
a = x și b = 2023 obținem $\frac{2023x}{x+2023} \le \frac{x+2023}{4}$, a = y și b = 2023 obținem $\frac{2023y}{y+2023} \le \frac{y+2023}{4}$, a = z și b = 2023 obținem $\frac{2023z}{z+2023} \le \frac{z+2023}{4}$,	1 p
$\frac{2023x}{x+2023}+\frac{2023y}{y+2023}+\frac{2023z}{z+2023} \le \frac{2023\cdot 3+x+y+z}{4}$.	1 p
Cum x + y + z = 2023 avem $\frac{2023x}{x+2023}+\frac{2023y}{y+2023}+\frac{2023z}{z+2023} \le \frac{2023\cdot 4}{4}$,	1 p
$\frac{x}{x+2023}+\frac{y}{y+2023}+\frac{z}{z+2023} \le 1$. Egalitatea nu poate avea loc, deoarece x + y + z = 2023 , deci $\frac{x}{x+2023}+\frac{y}{y+2023}+\frac{z}{z+2023}<1$.	1 p

3.(7p) În cubul ABCDA'B'C'D' punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor BB', C'D' și respectiv C'B'. Calculați sinusul unghiului format de dreptele AM și NP.

Profesor, Sascău Gabriela

Soluție:



Fie Q mijlocul segmentului AA′. Cum QA = MB′ și QA//MB′⇒ AMB′Q paralelogram, deci AM//B′Q.
NP este linie mijlocie în triunghiul B′C′D′⇒NP//D′B′.
Din NP//D′B′ și AM//B′Q⇒ $\sphericalangle(AM, NP) \equiv \sphericalangle(B'Q, B'D') \equiv \sphericalangle D'B'Q$.
Se demonstrează că triunghiurile D′A′Q și B′A′Q sunt congruente deci D′Q = B′Q⇒ΔQB′D′ este isoscel ⇒ QO′⊥B′D′, unde O′ este mijlocul segmentului D′B′.
Dacă notăm cu *a* muchia cubului, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic A′B′Q obținem B′Q $= \frac{a\sqrt{5}}{2}$ și în triunghiul O′B′Q obținem O′Q $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\sin \sphericalangle(AM, NP) = \sin \sphericalangle QB'D' = \frac{O'Q}{B'Q} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

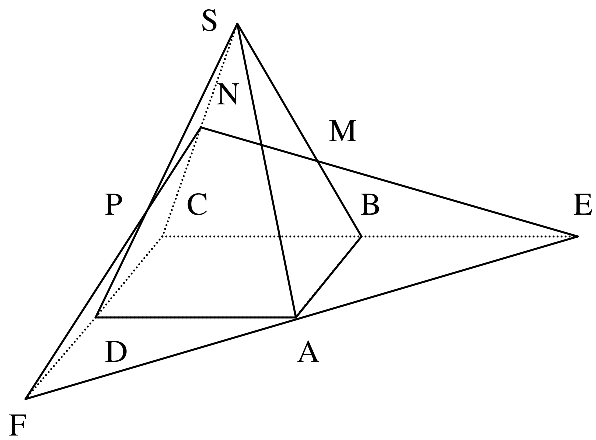
Barem:

Fie Q mijlocul segmentului AA′. Cum QA = MB′ și QA//MB′⇒ AMB′Q paralelogram, deci AM//B′Q.	1 p
NP este linie mijlocie în triunghiul B′C′D′⇒NP//D′B′	1 p
Din NP//D′B′ și AM//B′Q ⇒ $\sphericalangle(AM, NP) \equiv \sphericalangle(B'Q, B'D') \equiv \sphericalangle D'B'Q$	1 p
Se demonstrează că triunghiurile D′A′Q și B′A′Q sunt congruente deci D′Q = B′Q⇒ΔQB′D′ este isoscel ⇒ QO′⊥B′D′, unde O′ este mijlocul segmentului D′B′	2 p
Dacă notăm cu *a* muchia cubului, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic A′B′Q obținem B′Q $= \frac{a\sqrt{5}}{2}$ și în triunghiul O′B′Q obținem O′Q $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$	1 p
$\sin \sphericalangle(AM, NP) = \sin \sphericalangle QB'D' = \frac{O'Q}{B'Q} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$	1 p

4. (**7p**) O piramidă SABCD are baza paralelogram. Pe segmentele SB, SC și SD luăm punctele M, N, respectiv P astfel încât SM = 2MB, SN = NC și SP = 2PD. Arătați că punctele A, M, N, P sunt coplanare.

Gazeta Matemarică Nr.9/2022

<u>Soluție:</u>



Dreptele NP și NM taie planul bazei în punctele E și respectiv F. Vom arăta că punctele E, A, F sunt coliniare, deci dreptele NP și NM sunt incluse în planul (NFE) și A∈ (NFE), deci punctele A, M, N, P sunt coplanare.

Avem NP ∩ DC = {F} și din teorema lui Menelaus în ΔSDC avem $\frac{SN}{CN}\cdot\frac{CF}{DF}\cdot\frac{DP}{SP}=1,$ de unde obținem $\frac{CF}{DF}=2$ (**1**). Avem NM ∩ BC = {E} și din teorema lui Menelaus în ΔSBC avem $\frac{SN}{CN}\cdot\frac{CE}{BE}\cdot\frac{BM}{SM}=1,$ de unde obținem $\frac{CE}{BE}=2$ **(2).** Din **(1)** și **(2)** conform Teoremei reciproce a lui Thales în triunghiul CEF obținem BD // EF.

Fie AC ∩ BD = {O} și din ABCD paralelogram O este mijlocul lui AC, din (1) D este mijlocul lui CF, deci OD este linie mijlocie în triunghiul ACF, prin urmare DO // AF și rezultă BD // AF.

Din BD // EF, BD // AF și F ∉ BD rezultă că punctele E, A, F sunt coliniare, deci dreptele NP și NM sunt incluse în planul (NFE) și A∈ (NFE), deci punctele A, M, N, P sunt coplanare.

<u>Barem:</u>

Avem NP ∩ DC = {F} și din teorema lui Menelaus în ΔSDC avem $\frac{SN}{CN}\cdot\frac{CF}{DF}\cdot\frac{DP}{SP}=1,$ de unde obținem $\frac{CF}{DF}=2$ **(1).** Avem NM ∩ BC = {E} și din teorema lui Menelaus în ΔSBC avem $\frac{SN}{CN}\cdot\frac{CE}{BE}\cdot\frac{BM}{SM}=1,$ de unde obținem $\frac{CE}{BE}=2$ **(2).**	2 p
Din **(1)** și **(2)** conform Teoremei reciproce a lui Thales în triunghiul CEF obținem BD // EF.	1 p
Fie AC ∩ BD = {O} și din ABCD paralelogram O este mijlocul lui AC, din **(1)** D este mijlocul lui CF, deci OD este linie mijlocie în triunghiul ACF, prin urmare DO // AF și rezultă BD // AF.	2 p
Din BD // EF, BD // AF și F ∉ BD rezultă că punctele E, A, F sunt coliniare, deci dreptele NP și NM sunt incluse în planul (NFE) și A∈ (NFE), deci punctele A, M, N, P sunt coplanare.	2 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.