OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2023
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a X-a

1. Fie $a,b,c\in(1,\infty)$ și $x=\log_{bc}a, y=\log_{ca}b, z=\log_{ab}c$.

a) (3p) Arătați că $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=2$;

b) (4p) Demonstrați că $a^{(x+1)(y-z)}\cdot b^{(y+1)(z-x)}\cdot c^{(z+1)(x-y)}=1$.

Supliment Gazeta Matematică 10/2022

Soluție: a) Avem $\sum_{cyc}\frac{1}{x+1}=\sum_{cyc}\frac{1}{\log_{bc}a+1}=\sum_{cyc}\frac{1}{\log_{bc}a+\log_{bc}(bc)}=\sum_{cyc}\frac{1}{\log_{bc}(abc)}=\sum_{cyc}\log_{abc}(bc)=$
$=\log_{abc}\left(a^2b^2c^2\right)=2$.

b) Avem $a^{(x+1)(y-z)}=\left(a^{(\log_{bc}a+1)}\right)^{y-z}=\left(a^{\log_{bc}(abc)}\right)^{y-z}=\left((abc)^{\log_{bc}a}\right)^{y-z}=(abc)^{x(y-z)}$. În mod analog deducem $b^{(y+1)(z-x)}=(abc)^{y(z-x)}$, respectiv $c^{(z+1)(x-y)}=(abc)^{z(x-y)}$.

De aici rezultă că $a^{(x+1)(y-z)}\cdot b^{(y+1)(z-x)}\cdot c^{(z+1)(x-y)}=(abc)^{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)}=(abc)^0=1$.

Barem:

a) Demonstrează cerința	3p
b) Demonstrează $a^{(x+1)(y-z)}=(abc)^{x(y-z)}$ și analoagele	2p
Finalizare $a^{(x+1)(y-z)}\cdot b^{(y+1)(z-x)}\cdot c^{(z+1)(x-y)}=(abc)^{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)}=(abc)^0=1$	2p

2. Spunem că o funcție $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ are proprietatea ”*P*” dacă verifică următoarea relație:
$f(x+y)=f(x)+f(y)+1-xy,\forall x,y\in\mathbb{Q}$.

a) (3p) Determinați $a,b,c\in\mathbb{Q}$ pentru care funcția $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, g(x)=f(x)+ax^2+bx+c$ este funcție aditivă (*adică* $g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{Q}$), unde *f* este o funcție cu proprietatea ”*P*”.

b) (4p) Determinați funcțiile *f* cu proprietatea ”*P*” care verifică condiția $f(1)=-\frac{3}{2}$.

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluție. a) Din condiția $g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{Q}$ rezultă
$f(x+y)+a(x+y)^2+b(x+y)+c=f(x)+ax^2+bx+c+f(y)+ay^2+by+c\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1-xy+2axy=c,\forall x,y\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow c=1,a=\frac{1}{2},b\in\mathbb{Q}$.

b) Conform punctului a) funcțiile $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2+bx+1,b\in\mathbb{Q}$ satisfac ecuația funcțională Cauchy și atunci există $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât $g(x)=mx,\forall x\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}x^2+(m-b)x-1,\forall x\in\mathbb{Q}$. Din condiția $f(1)=-\frac{3}{2}$ rezultă $m-b=0$ și atunci funcția cerută este $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, f(x)=-\frac{1}{2}x^2-1$.

Barem.

a) Deduce $c=1,a=\frac{1}{2},b\in\mathbb{Q}$	3p
b) Demonstrează $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+(m-b)x-1,\forall x\in\mathbb{Q}$	3p
Determinarea funcției $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, f(x)=-\frac{1}{2}x^2-1$	1p

3. Se consideră numerele complexe $a,b,c\in\mathbb{C}$ astfel ca $|a|=|b|=|c|=1$.

a) (3p) Dacă *a*,*b*,*c* sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, să se demonstreze că
$ab+bc+ca+2(a+b+c)=0;$

b) (4p) Dacă $ab+bc+ca+2(a+b+c)=0$, să se arate că *a,b,c* sunt distincte două câte două şi sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. a) Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o rădăcină de ordin trei a unității, adică $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$. Se pot considera $a, a\varepsilon, a\varepsilon^2$ cele trei afixe ale vârfurilor unui triunghi echilateral, caz în care

$ab+bc+ca+2(a+b+c)=a^2\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)+2a\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)=0$.

b) Dacă presupunem, de exemplu, că $b=c$, relaţia $ab+bc+ca+2(a+b+c)=0$ se scrie şi

$2a(b+1)=-b(b+4)$, de unde

$2|b+1|=|b+4| \Rightarrow 4|b+1|^2=|b+4|^2 \Leftrightarrow 4(b+1)\left(\bar{b}+1\right)=(b+4)\left(\bar{b}+4\right) \Leftrightarrow |b|^2=4$, contradicție.

Conjugând relaţia ipotezei $ab+bc+ca+2(a+b+c)=0$, rezultă

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0 \Leftrightarrow a+b+c+2(ab+bc+ac)=0$, de unde se obține $a+b+c=0$.

Utilizând relaţia lui Sylvester deducem că afixul ortocentrului triunghiului nedegenerat determinat de *a, b* şi *c* coincide cu afixul centrului cercului circumscris aceluiaşi triunghi, deci triunghiul este echilateral.

Barem.

a) Demonstrarea cerinței	3p
b) Arată că numerele sunt distincte……………………………………………………..	2p
Demonstrează că triunghiul este echilateral………………………………………………….	2p

4. a) (3p) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{1-x^2}{x}$ este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty,0)$ și respectiv $(0,\infty)$, dar nu este monotonă pe $\mathbb{R}^*$.

b) (4p) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$x^2+\frac{1}{2^{\sqrt{2^{|x|}-1}}}=2^{\sqrt{2^{|x|}-1}}-\frac{x^2}{x^2+1}.$$

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluție. a) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*, x_1 \neq x_2$. Calculăm raportul de variație al funcției:

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1-x_2^2}{x_2}-\frac{1-x_1^2}{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{x_1-x_1x_2^2-x_2+x_2x_1^2}{x_1x_2(x_2-x_1)}=\frac{(x_2-x_1)(-1-x_1x_2)}{x_1x_2(x_2-x_1)}=-\frac{1+x_1x_2}{x_1x_2}<0$, pentru orice x_1, x_2 aparținând intervalului $(-\infty,0)$ sau intervalului $(0,\infty)$, deci *f* este strict descrescătoare pe fiecare dintre aceste intervale. Pentru a arăta că funcția nu este monotonă pe domeniul de definiție este suficient să considerăm numerele $-2<-1<\frac{1}{2}$ și obținem $f(-2)=\frac{3}{2}=f\left(\frac{1}{2}\right), f(-1)=0$, deci

$f(-2)>f(-1)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Adunăm 1 în ambii membri ai ecuației și obținem

$x^2+1+\frac{1}{2^{\sqrt{2^{|x|}-1}}}=2^{\sqrt{2^{|x|}-1}}+\frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)=f\left(2^{\sqrt{2^{|x|}-1}}\right)$.

Deoarece funcția *f* este funcție injectivă pe $(0,\infty)$, deducem că ecuația este echivalentă cu

$x^2+1=2^{\sqrt{2^{|x|}-1}} \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+1\right)=\sqrt{2^{|x|}-1} \Leftrightarrow \log_2\left(t^2+1\right)=\sqrt{2^t-1}$, unde am notat $t=|x|, t\in[0,\infty)$.

Funcția $g:[0,\infty)\to[0,\infty), g(t)=\log_2\left(t^2+1\right)$ este funcție inversabilă, $g^{-1}(t)=\sqrt{2^t-1}$. Ecuația $g(t)=g^{-1}(t) \Leftrightarrow g(t)=t \Leftrightarrow \log_2\left(t^2+1\right)=t \Leftrightarrow t^2+1=2^t$, cu soluțiile naturale 0 și 1. În concluzie, mulțimea soluțiilor ecuației este $\{-1,0,1\}$.

Barem.

a) Demonstrează că *f* este strict descrescătoare pe intervalele menționate………………….	2p
Demonstrează că *f* nu este monotonă pe $\mathbb{R}^*$ ……………………………………………………	1p
b) Obține $f\left(x^2+1\right)=f\left(2^{\sqrt{2^{\lvert x\rvert}-1}}\right)$ ……………………………....................................……	1p
Deduce ecuația echivalentă $\log_2\left(t^2+1\right)=\sqrt{2^t-1}$, $t\geq 0$ …………………………………………	1p
Rezolvă ecuația și găsește mulțimea soluțiilor întregi………………………………………….	2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.