OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

18 februarie 2023

CLASA a X-a

1. Fie $a,b,c\in(1,\infty)$ și $x=\log_{bc}a, y=\log_{ca}b, z=\log_{ab}c$.

a) (3p) Arătați că $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=2$;

b) (4p) Demonstrați că $a^{(x+1)(y-z)}\cdot b^{(y+1)(z-x)}\cdot c^{(z+1)(x-y)}=1$.

2. Spunem că o funcție $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ are proprietatea ”*P*” dacă verifică următoarea relație: $f(x+y)=f(x)+f(y)+1-xy, \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

a) (3p) Determinați $a,b,c\in\mathbb{Q}$ pentru care funcția $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, g(x)=f(x)+ax^2+bx+c$ este funcție aditivă (*adică* $g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x,y\in\mathbb{Q}$), unde *f* este o funcție cu proprietatea ”*P*”.

b) (4p) Determinați funcțiile *f* cu proprietatea ”*P*” care verifică condiția $f(1)=-\frac{3}{2}$.

3. Se consideră numerele complexe $a,b,c\in\mathbb{C}$ astfel ca $|a|=|b|=|c|=1$.

a) (3p) Dacă *a,b,c* sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, să se demonstreze că $ab+bc+ca+2(a+b+c)=0$;

b) (4p) Dacă $ab+bc+ca+2(a+b+c)=0$, să se arate că *a,b,c* sunt distincte două câte două și sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

4. a) (3p) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1-x^2}{x}$ este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty,0)$ și respectiv $(0,\infty)$, dar nu este monotonă pe $\mathbb{R}^*$.

b) (4p) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$x^2+\frac{1}{2^{\sqrt{2^{|x|}-1}}}=2^{\sqrt{2^{|x|}-1}}-\frac{x^2}{x^2+1}.$$

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.