OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2023
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XII-a

1. a) (3p) Arătați că grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $((0,+\infty),\cdot)$ sunt izomorfe.

b) (4p) Arătați că grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

Gazeta Matematică

Soluție: **a)** De exemplu, funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=2^x$ este bijectivă și verifică egalitatea $f(x+y)=2^{x+y}=2^x\cdot 2^y=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, adică f este un izomorfism de grupuri.

b) Dacă, prin absurd, grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ ar fi izomorfe, atunci ar exista o funcție bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ cu proprietatea că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\geq 0$, deci $\mathrm{Im}(f)\subseteq[0,+\infty)$, adică f nu este surjectivă, absurd!

Barem.

a) Dă exemplu de un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $((0,+\infty),\cdot)$	3 p
b) Folosește metoda reducerii la absurd	2 p
Obține contradicția	2 p

2. (7p) Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există două elemente $a,b\in G$ asfel încât $ab=b^3a$ și $ba=a^3b$. Demonstrați că $a^nb^n=ab$, pentru orice număr natural impar n.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Folosind succesiv egalitățile din ipoteză, avem: $ba=a^3b=a^2ab=a^2b^3a$.
Simplificând egalitatea $ba=a^2b^3a$, la dreapta, mai întîi cu a, apoi cu b, obținem $a^2b^2=e$, unde e este elementul neutru din grupul $(G,\cdot)$.

Vom demonstra prin inducție că, pentru orice număr natural m, avem $a^{2m+1}b^{2m+1}=ab$, (1). Într-adevăr, pentru $m=0$ avem egalitatea evidentă $a^1b^1=ab$. Dacă egalitatea (1) este adevărată pentru valoarea $m=k\in\mathbb{N}$, avem $a^{2k+1}b^{2k+1}=ab$, iar de aici rezultă $aa^{2k+1}b^{2k+1}b=a^2b^2$, adică $a^{2k+2}b^{2k+2}=e$. Compunând, din nou, la dreapta cu a și la stânga cu b, obținem $a^{2k+3}b^{2k+3}=ab$, adică egalitatea (1) este adevărată pentru valoarea $m=k+1$. Cu aceasta inducția este completă.

Barem.

Obține egalitatea $a^2b^2=e$	3 p
Demonstrează prin inducție egalitatea (1)	4 p

3. a) (2p) Calculați $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,\quad x\in\mathbb{R}$.

b) (5p) Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care au proprietatea că admit o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}\cdot F(x)+\operatorname{arctg} x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Mihai Piticari și *Vladimir Cerbu*, Câmpulung Moldovenesc

Soluție. **a)** Cu substituția $t=\operatorname{arctg} x$, $\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$, obținem imediat $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$.

b) Cum F este o primitivă a lui f, deducem că F este derivabilă și $F'=f$. Scriind egalitatea din ipoteză sub forma $\frac{f(x)\cdot(x^2+1)-F(x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$, obținem $\left(\frac{F(x)}{x^2+1}\right)'=\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Ținând cont de punctul a), rezultă că există $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{F(x)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+k$, adică $F(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+k(x^2+1)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Prin derivare obținem funcțiile căutate: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}^2 x+\operatorname{arctg} x+2kx$, unde k este o constantă reală oarecare.

Barem.

a) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$	2 p
b) Deduce că F este derivabilă și $F'=f$	1 p
$\frac{F(x)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+k$, $k\in\mathbb{R}$	2 p
Finalizare	2 p

4. (7p) Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, considerăm $I_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1}\frac{1}{(x^2+1)(x^6+1)}\mathrm{d}x$. Arătați că $\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{\pi}{4}$.

Vasile Roșca, Rădăuți

Soluție: Avem $I_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1}\frac{x^6+1-x^6}{(x^2+1)(x^6+1)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1}\frac{x^6}{(x^2+1)(x^6+1)}\mathrm{d}x$.

Notând $J_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1}\frac{x^6}{(x^2+1)(x^6+1)}\mathrm{d}x$, rezultă $I_n+J_n=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, (1).

Avem $J_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^6}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. Cu schimbarea de variabilă $t=\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, obținem

$$J_n=-\int_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}\frac{1}{(1+t^2)(1+t^6)}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1}\frac{1}{(x^2+1)(x^6+1)}\mathrm{d}x=I_n.$$

Înlocuind $J_n = I_n$ în relația (1), obținem $I_n = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, (2).

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n+1) = \frac{\pi}{2}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1} = 0$, din relația (2) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$

Barem.

Obține relația (1)	2 p
Demonstrează $J_n = I_n$	3 p
Finalizare	2 p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.