BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a V-a

1. **a) (3p)** Arătaţi că numărul $x = 2010^3 - 2010^2 \cdot 2009 - 2010 \cdot 2008 - 420$ este pătrat perfect.

Profesor, Șlincu Gabriela

b) (4p) Scrieți numărul $a = 2023^{2024}$ ca sumă de 2023 numere naturale consecutive.

Profesor, Larionescu Corina

Soluție:

a) $x = 2010^2 (2010 - 2009) - 2010 \cdot 2008 - 420 = 2010 (2010 - 2008) - 420 = 4020 - 420 = 3600 = 60^2$.

b) $a = 2023^{2024} = 2023^{2023} \cdot 2023 = \underbrace{2023^{2023} + 2023^{2023} + ... + 2023^{2023}}_{2023 termeni} =$

$= (2023^{2023} - 1011) + (2023^{2023} - 1010) + ... + (2023^{2023} - 1) + 2023^{2023} + (2023^{2023} + 1) + ...+ (2023^{2023} + 1010) + (2023^{2023} + 1011)$, deci a este sumă de 2023 numere naturale consecutive.

Barem:

a) $x = 2010^2 (2010 - 2009) - 2010 \cdot 2008 - 420$	1p
$= 2010 (2010 - 2008) - 420 = 4020 - 420 = 3600$	1p
$3600 = 60^2$	1p
b) $a = 2023^{2024} = 2023^{2023} \cdot 2023 = \underbrace{2023^{2023} + 2023^{2023} + ... + 2023^{2023}}_{2023 termeni}$	1p
$a = \underbrace{2023^{2023} + 2023^{2023} + ... + 2023^{2023}}_{2023 termeni} + 0 + 1 + 2 + 3 + ... + 1011 - 1 - 2 - 3 - ..... - 1011$	2p
$a = (2023^{2023} - 1011) + (2023^{2023} - 1010) + ... + (2023^{2023} - 1) + 2023^{2023} + (2023^{2023} + 1) + ...+ (2023^{2023} + 1010) + (2023^{2023} + 1011)$	1p

2. Se știe că a este un număr natural de cel mult 4 cifre, care împărțit la 2023 dă restul un număr natural de două cifre.
a) (3p) Aflați suma celor mai mici 56 de valori pe care le poate lua a.
b) (4p) Aflați câte valori naturale poate lua a astfel încât restul împărțirii la 2023 să fie un număr natural pătrat perfect.

Profesor, Sascău Gabriela

Soluție:

a) $a : 2023 = c$ rest $\overline{xy}$. Din teorema împărțirii cu rest avem: $a = 2023 \cdot c + \overline{xy}$.
Cele mai mici valori ale lui a se obțin pentru c = 0.
$a \in \{10, 11, 12, ..., 99\}$, deci suma căutată este S = 10 + 11 + … + 65 = 2100.
b) $2023 \cdot c + \overline{xy} \leq 9999$, adică $c \leq 4$, deci c poate lua 5 valori.
$\overline{xy}$ este pătrat perfect, deci $\overline{xy} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$, adică $\overline{xy}$ ia 6 valori, deci a poate lua $5 \cdot 6 = 30$ valori.

Barem:

a) $a = 2023 \cdot c + \overline{xy}$	1p
Determină cele mai mici 56 valori ale lui *a*	1p
Calculează suma S = 10 + 11 + … + 65 = 2100	1p
b) $2023 \cdot c + \overline{xy} \leq 9999$, adică $c \leq 4$, deci c are 5 valori	2p
$\overline{xy}$ este pătrat perfect, deci $\overline{xy} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$, adică $\overline{xy}$ ia 6 valori	1p
a poate lua $5 \cdot 6 = 30$ valori	1p

3. **a)** **(2p)** Transformați în baza 10 numărul $11111001111_{(2)}$.

b) **(5p)** Determinați numărul de forma $\overline{abc}$ ale cărui cifre verifică relația:

$$4\left(2^{2a} \cdot 5^a + \overline{bb}\right) = 11111001111_{(2)} - 3 \cdot 2^c.$$

Profesor, Alexandru Elena

Soluție:

a) $11111001111_{(2)} = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1999$.

b) Relația devine: $4 \cdot 20^a + 44b + 3 \cdot 2^c = 1999$.

$4 \cdot 20^a$ și $44b$ sunt numere pare, 1999 este număr impar, de unde rezultă că $3 \cdot 2^c$ este număr impar, ceea ce înseamnă că $c = 0$.

Deci $4 \cdot 20^a + 44b = 1996$ și împărțind relația prin 4 obținem că $20^a + 11b = 499$. Cum $20^a \leq 499$, avem că *a* poate lua valorile 0, 1 sau 2.

$a = 0$, nu corespunde.

Dacă $a = 1$, avem $11b = 479$ – fals.

Dacă $a = 2$, avem $11b = 99$ și $b = 9$.

Numărul căutat este 290.

Barem:

a) $11111001111_{(2)} = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1$	1p
Finalizare: a = 1999	1p
b) $4(2^{2a} \cdot 5^a + \overline{bb}) = 4 \cdot 20^a + 44b$	1p
$4 \cdot 20^a + 44b + 3 \cdot 2^c = 1999$	1p
Determinarea cifrei $c = 0$	1p
$20^a \leq 499$, avem că *a* poate lua valorile 0, 1 sau 2	1p
Determinarea numărului $\overline{abc} = 290$	1p

4. Paginile unei cărți sunt numerotate de la 1 la 336. Din această carte se rup la întâmplare 111 foi.

a) **(3p)** Arătați că suma numerelor de pe foile rămase nu se împarte exact la 10.
b) **(4p)** Arătați că produsul numerelor de pe foile rămase se împarte exact la 3.

Gazeta Matematică Nr.11/2022

<u>Soluție:</u>
a) Cartea are 336 de pagini deci 168 foi, din care se rup 111 foi. Rămân 57 foi, numerotate fiecare cu două numere naturale consecutive. Cum suma a două numere naturale consecutive este un număr impar, avem că suma numerelor de pe foile rămase este un număr impar, prin urmare nu se împarte exact la 10.
b) Cartea are 336:3 = 112 pagini numerotate cu numere ce se împart exact la 3. După ruperea celor 111 foi, rămâne cel puțin o foaie ce conține un număr ce se împarte la 3. Deci produsul de pe foile rămase se împarte exact la 3.

<u>Barem</u>

a) Cartea are 336 de pagini deci 168 foi din care se rup 111 foi. Rămân 57 foi, numerotate fiecare cu două numere consecutive	1p
Suma a două numere naturale consecutive este un număr impar	1p
Suma numerelor de pe foile rămase este un număr impar, prin urmare nu se împarte exact la 10	1p
b) Cartea are 112 pagini numerotate cu numere ce se împart exact la 3	1p
După ruperea celor 111 foi, rămâne cel puțin o foaie ce conține un număr ce se împarte la 3	2p
Produsul de pe foile rămase se împarte exact la 3	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.