BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VII–a

1. a) (2p) Arătați că: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\cdot n}$, pentru orice n număr natural, $n \geq 2$.

b) (5p) Determinaţi partea întreagă a numărului rațional: $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{2023^2}$.

Tamara Brutaru, Suceava

Soluție:

a) $n-1 < n \Leftrightarrow (n-1)\cdot n < n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\cdot n}$, pentru orice n număr natural, $n \geq 2$.

b) Aplicând punctul a) pentru n = 2, n = 3, n = 4,…, n = 2023 obținem: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3\cdot 4}$;…; $\frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022\cdot 2023}$. Adunând inegalitățile se obţine: $S < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{2022\cdot 2023}$. Cum $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{2022\cdot 2023} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} = 1 - \frac{1}{2023} < 1 \Rightarrow S < 1$. Deoarece toți termenii sumei S sunt pozitivi avem $S > 0$. Deci, $0 < S < 1 \Rightarrow [S] = 0$.

Barem:

$\boldsymbol{a})\ n-1 < n \Leftrightarrow (n-1)\cdot n < n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\cdot n}$, pentru orice n număr natural, $n \geq 2$.	**2p**
b) $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3\cdot 4}$;…; $\frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022\cdot 2023}$	**1p**
$S < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{2022\cdot 2023}$	**1p**
$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{2022\cdot 2023} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} = 1 - \frac{1}{2023} < 1$	**1p**
$S > 0$ deoarece termenii sumei S sunt pozitivi, deci $0 < S < 1$	**1p**
$[S] = 0$	**1p**

2. (7p) Aflați numărul natural $\overline{ab}$ din egalitatea:

$$\overline{ab}^{\,2} = \overline{(a+1)(b-1)}^{\,2} - \overline{(a-1)(b+1)}^{\,2}.$$

Gazeta Matematică Nr.6-7-8/2022

Soluție:

$\overline{(a+1)(b-1)} = 10\cdot(a+1) + b - 1 = 10a + b + 9 = \overline{ab} + 9$.

$\overline{(a-1)(b+1)} = 10\cdot(a-1) + b + 1 = 10a + b - 9 = \overline{ab} - 9$.

$\overline{(a+1)(b-1)}^{\,2} - \overline{(a-1)(b+1)}^{\,2} = (\overline{ab}+9)^2 - (\overline{ab}-9)^2 =$

$= [(\overline{ab}+9) - (\overline{ab}-9)]\cdot[(\overline{ab}+9) + (\overline{ab}-9)] = 18\cdot 2\overline{ab} = 36\overline{ab}$

Egalitatea dată devine: $\overline{ab}^{\,2} = 36\cdot\overline{ab} \Leftrightarrow \overline{ab} = 36$.

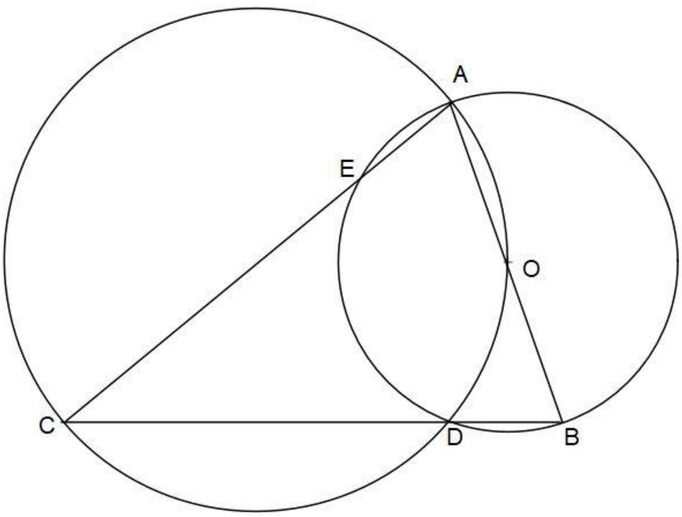
Barem:

$\overline{(a+1)(b-1)} = 10\cdot(a+1)+b-1 = 10a+b+9 = \overline{ab}+9.$	**1p**
$\overline{(a-1)(b+1)} = 10\cdot(a-1)+b+1 = 10a+b-9 = \overline{ab}-9$	**1p**
$\overline{(a+1)(b-1)}^{\mathbf{2}} - \overline{(a-1)(b+1)}^{\mathbf{2}} = \left(\overline{ab}+9\right)^{\mathbf{2}} - \left(\overline{ab}-9\right)^{\mathbf{2}} =$ $= \left[\left(\overline{ab}+9\right)-\left(\overline{ab}-9\right)\right]\cdot\left[\left(\overline{ab}+9\right)+\left(\overline{ab}-9\right)\right]$	**2p**
$= 18\cdot 2\overline{ab} = 36\overline{ab}$	**1p**
$\overline{ab}^{\mathbf{2}} = 36\cdot\overline{ab}$	**1p**
$\overline{ab} = 36$	**1p**

3. **(7p)** Cercurile de centru *O* și rază *r*, respectiv de centru *Q* și rază *R*, cu *R>r*, se intersectează în punctele *A* și *D*. Punctele *A, B, D, E* se află pe cercul de centru *O* și rază *r,* iar punctele *A, O, D, C* se află pe cercul de centru *Q* și rază *R*, astfel încât $E \in AC, D \in BC$ și $O \in AB$. Să se arate că dreptele *AD*, *BE* și *CO* sunt concurente.

Dorina Cionca, Suceava

***Soluție*:**



O∈AB, deci *AB* diametru ⟹ *∢ADB=90°* ⟹ *AD* înălțime în Δ*ABC*

AB diametru ⟹ *∢AEB=90°* ⟹ *BE* înălțime în Δ*ABC*

Cum *C, D, B* coliniare și ∢ADB=90° ⟹ *∢ADC=90°* ⟹ AC diametru ⟹ ∢AOC=90° ⟹ *CO* înălțime în Δ*ABC*

Înălțimile triunghiului Δ*ABC* sunt concurente, deci *AD*∩ *BE*∩*CO = {H}*.

Barem:

Figura	**1p**
O∈AB, deci *AB* diametru ⟹ *∢ADB=90°* ⟹ *AD* înălțime în Δ*ABC*	**1p**
AB diametru ⟹ *∢AEB=90°* ⟹ *BE* înălțime în Δ*ABC*	**1p**
C, D, B coliniare și ∢ADB=90° ⟹ ∢ADC=90° ⟹ AC diametru	**1p**
AC diametru ⟹ ∢AOC=90° ⟹ CO înălțime în ΔABC	**2p**
Înălțimile triunghiului Δ*ABC* sunt concurente, deci $AD \cap BE \cap CO = \{H\}$	**1p**

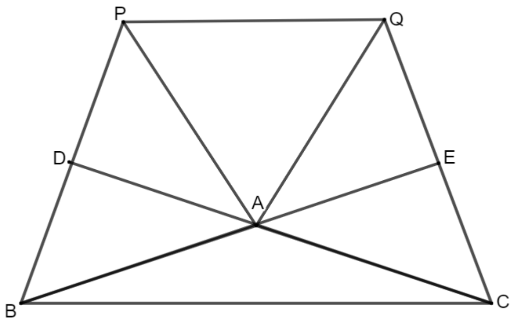
4. În triunghiul ABC isoscel cu baza BC, măsura unghiului BAC este de $135°$ și înălțimile din B și C intersectează laturile AC, respectiv AB, în D, respectiv E. Punctele P și Q sunt simetricele punctelor B, respectiv C față de D, respectiv E.

(5p) a) Demonstrați că patrulaterul $BCQP$ este trapez isoscel.

(2p) b) Dacă $BD = 2\sqrt{3}$ cm, determinați lungimea razei cercului circumscris trapezului $BCQP$.

Claudia Marchitan, Suceava

***Soluție*:**



a) ΔABC isoscel cu baza BC $\Rightarrow AB = AC$ (1) și

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \dfrac{180° - 135°}{2} = \dfrac{45°}{2}$

$BD \perp AC,\ D \in AC \Rightarrow \Delta ABD$ dreptunghic în D.

Dar $\sphericalangle BAD = 180° - \sphericalangle BAC = 180° - 135° = 45°$, deci ΔABD dreptunghic în D și isoscel $\Rightarrow AD = BD$ și $\sphericalangle ABD = 45°$

Analog obținem că $AE = CE$ și $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ACE = 45°$

Cum P simetricul lui B față de $D \Rightarrow D$ mijlocul lui BP $\Rightarrow$ $BD = DP = \dfrac{BP}{2}$.

$AD \perp BP$ și D mijlocul lui BP $\Rightarrow AD$ mediatoarea segmentului BP $\Rightarrow AB = AP$ (2) $\Rightarrow \Delta ABP$ isoscel cu baza BP $\Rightarrow \sphericalangle APB = \sphericalangle ABP = 45°$ și apoi $\sphericalangle BAP = 90°$.

Analog obținem $CE = EQ = \dfrac{CQ}{2}$, $AC = AQ$, (3) $\sphericalangle AQC = \sphericalangle ACQ = 45°$, $\sphericalangle CAQ = 90°$.

$\sphericalangle PAQ = 360° - (\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAQ + \sphericalangle PAB) = 360° - (135° + 90° + 90°) = 45°$

Din (1), (2), (3) avem $AP = AQ \Rightarrow \Delta APQ$ isoscel cu baza PQ $\Rightarrow \sphericalangle APQ = \sphericalangle AQP = \dfrac{180° - 45°}{2} = \dfrac{135°}{2}$.

$\sphericalangle CBP + \sphericalangle BPQ = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ABP + \sphericalangle BPA + \sphericalangle APQ = \dfrac{45°}{2} + 45° + 45° + \dfrac{135°}{2} = 180°$

Cum dreptele BC și PQ formează cu secanta BP perechea de unghiuri $\sphericalangle CBP$, $\sphericalangle BPQ$ care sunt interne de aceeași parte a secantei suplementare $\Rightarrow BC \parallel PQ \Rightarrow BCQP$ trapez.

Cum $\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ABP = \dfrac{45°}{2} + 45° = \dfrac{135°}{2}$ și analog $\sphericalangle BCQ = \dfrac{135°}{2} \Rightarrow \sphericalangle CBP = \sphericalangle BCQ \Rightarrow BCQP$ trapez isoscel.

b) Din punctul a) $AB = AC = AP = AC \Rightarrow$ punctul A este centrul cercului circumscris trapezului isoscel $BCQP$ și raza sa este $r = AB = AC = AP = AC$.

În ΔABD dreptunghic în D și isoscel, $AD = BD = 2\sqrt{3}$, conform teoremei lui Pitagora avem $AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$ cm, deci $r = 2\sqrt{6}$ cm.

Barem.

a) Arată că ΔABD dreptunghic în D și isoscel $\Rightarrow AD = BD$ și $\sphericalangle ABD = 45°$	**1p**
Arată că $AB = AP$, $\sphericalangle APB = 45°$ și $\sphericalangle BAP = 90°$	**1p**
Arată că $\sphericalangle APQ = \sphericalangle AQP = \dfrac{180° - 45°}{2} = \dfrac{135°}{2}$	**1p**
Arată că perechea de unghiuri $\sphericalangle CBP$, $\sphericalangle BPQ$ interne de aceeași parte a secantei sunt suplementare $\Rightarrow BC \parallel PQ \Rightarrow BCQP$ trapez	**1p**
Arată că $\sphericalangle CBP = \sphericalangle BCQ = \dfrac{135°}{2} \Rightarrow BCQP$ trapez isoscel	**1p**
b) Arată că punctul A este centrul cercului circumscris trapezului $BCQP$ și raza sa este $r = 2\sqrt{6}$ cm	**2p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.