BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a XI-a

1. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ dat de $a_1=1$ și $a_{n+1}=\sqrt{1+(n+2)a_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) a) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$.

(3p) b) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

Supliment Gazeta Matematică Nr.11/2022

***Soluție*. a)** Din $a_1=1$ și relația de recurență găsim $a_2=2$, $a_3=3$ și apoi demonstrăm prin inducție că $a_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $\frac{a_n}{n}=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$.

b) Observăm că $\frac{a_n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\sqrt[n]{x_n}$, unde $x_n=\frac{n^n}{n!}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ și apoi aplicând criteriul radical rezultă că:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=e$.

Barem.

a) Demonstrează prin inducție că $a_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.	**3p**
Obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$.	**1p**
b) Observă că $\frac{a_n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\sqrt[n]{x_n}$, unde $x_n=\frac{n^n}{n!}$ și arată că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=e$	**2p**
Aplică criteriul radical și deduce că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.	**1p**

2. (7p) Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+8}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+12}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\ldots+\frac{1}{n+2}\right)^n$.

Dan Popescu, Suceava

***Soluție*.** Șirul căruia i se cere limita este $x_n=\left(\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+4k}}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Deoarece $\frac{n}{n+2}=\frac{n}{\sqrt{n^2+4n+4}}\leq\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+4k}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+8}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, calculul se plasează în cazul ”1^∞”, adică $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$, unde $y_n=n\left(\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+4k}}-1\right)$. Obținem $y_n=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+4k}}-1\right)$, iar prin efectuare calculelor și raționalizare găsim $y_n=-\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{4k}{\left(n+\sqrt{n^2+4k}\right)\sqrt{n^2+4k}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci

$$\frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)}=\frac{4\sum_{k=2}^{n+1}k}{\left(n+\sqrt{n^2+4n+4}\right)\sqrt{n^2+4n+4}}\le -y_n\le\frac{4\sum_{k=2}^{n+1}k}{\left(n+\sqrt{n^2+8}\right)\sqrt{n^2+8}}=\frac{2\left(n^2+3n\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+8}\right)\sqrt{n^2+8}},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}(-y_n)=1$ și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{e}$.

Barem.

Arată că limita cerută se găsește în cazul ”1^∞”	**2p**
Deduce că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$, unde $y_n=-\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{4k}{\left(n+\sqrt{n^2+4k}\right)\sqrt{n^2+4k}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$	**2p**
Arată că $\frac{2\left(n^2+3n\right)}{2(n+1)(n+2)}\le -y_n\le\frac{2\left(n^2+3n\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+8}\right)\sqrt{n^2+8}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$	**2p**
Obține că $\lim\limits_{n\to\infty}(-y_n)=1$ și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{e}$	**1p**

3. (7p) Dacă a și b sunt numere complexe distincte și nenule, să se determine matricele $A\in M_3(\mathbb{C})$, astfel încât $A^n=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\-b&0&a\end{pmatrix}$, unde n este număr natural nenul.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Evident, A comută cu $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\-b&0&a\end{pmatrix}$, condiție care valorificată arată că A este de forma $A=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\z&0&x\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$, iar prin inducție matematică , se obține $A^n=\begin{pmatrix}x^n&0&0\\0&y^n&0\\nx^{n-1}z&0&x^n\end{pmatrix}\in M_3$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci, dacă α este o rădăcină de ordin $n\in\mathbb{N}^*$ a numărului complex a, β este o rădăcină de ordin $n\in\mathbb{N}^*$ a numărului complex b, soluția ecuației matriceale este:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\-\frac{b}{na}\cdot\alpha&0&\alpha\end{pmatrix}\in M_3.$$

Barem.

Arată că A este de forma $A=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\z&0&x\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$	**3p**
Demonstrează prin inducție matematică faptul că $A^n=\begin{pmatrix}x^n&0&0\\0&y^n&0\\nx^{n-1}z&0&x^n\end{pmatrix}\in M_3$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.	**2p**

Obține soluția ecuației matriceale de forma $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ -\frac{b}{na}\cdot\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, unde α este o rădăcină de ordin n a numărului complex *a*, iar β este o rădăcină de ordin n a numărului complex *b*.	**2p**

4. (7p) Fie $n \geq 2$ număr natural, *M* o mulțime cu *n* elemente și $S_1, S_2, ..., S_{2^n-1}$ submulțimile nevide ale lui *M*, într-o ordine oarecare. Considerăm matricea $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,2^n-1}}$, unde $a_{ij}=\left|S_i \cap S_j\right|$, $\forall i, j=\overline{1,2^n-1}$. Arătați că matricea *A* este singulară.

Marius Marchitan, Suceava

<u>Soluție</u>. Notăm cu $\Delta=\det(A)$. Fie $a\in M$ fixat, iar $p,q,r\in\left\{1,2,...,2^n-1\right\}$ astfel încât $S_p=\{a\}$, $S_q=M\setminus\{a\}$ și $S_r=M$. Considerăm un $i\in\left\{1,2,...,2^n-1\right\}$ oarecare. Atunci $a_{ip}=\left|S_i\cap S_p\right|$. Cum $\left|S_p\right|=1$, rezultă că $a_{ip}\in\{0,1\}$.

Dacă $a_{ip}=0$, atunci $S_i\cap S_p=\varnothing$, deci $a\notin S_i$. Deducem că $S_i\cap S_q=S_i\cap S_r$, adică $a_{iq}=a_{ir}$. Obținem $a_{ip}+a_{iq}=a_{ir}$ (1).

Dacă $a_{ip}=1$, atunci $S_i\cap S_p=\{a\}$, deci $a\in S_i$. Deducem că $S_i\cap S_r=\left(S_i\cap S_q\right)\cup\{a\}$ și atunci $a_{ir}=a_{iq}+1$. Obținem $a_{ip}+a_{iq}=a_{ir}$ (2).

Din (1) și (2) deducem că $a_{ip}+a_{iq}=a_{ir}$, $\forall i=\overline{1,2^n-1}$, adică prin adunarea elementelor coloanei *p* la elementele coloanei *q* se obțin elementele coloanei *r*. Atunci determinantul Δ' obținut prin adunarea coloanei *p* a lui Δ la coloana *q* este egal, pe de o parte cu Δ și pe de altă parte cu 0, având două coloane identice. Rezultă $\Delta=0$, deci matricea *A* este singulară.

<u>Barem.</u>

Arată că $a_{ip}\in\{0,1\}, \forall i=\overline{1,2^n-1}$, unde *p* corespunde unei submulțimi $S_p=\{a\}$, iar $a\in M$ fixat	**2p**
Arată că $a_{ip}+a_{iq}=a_{ir}$, $\forall i=\overline{1,2^n-1}$, unde $S_q=M\setminus\{a\}$ și $S_r=M$	**3p**
Deduce $\Delta=0$ și matricea *A* singulară	**2p**
<u>Observație</u>: Se pot acorda 2 puncte pentru tratarea unui caz particular (spre exemplu $n=2$ și o alegere oarecare a mulțimii M, respectiv a submulțimilor sale nevide într-o ordine oarecare).	

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.