OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2023
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a IX-a

1. (7p) Demonstrați că ecuația $x^2 + px + q = 0$ nu are soluții raționale dacă p și q sunt numere întregi impare.

Gazeta Matematică

Soluție: Prin reducere la absurd, presupunem că ecuația admite o soluție rațională $x = \frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $(m,n) = 1$. Atunci $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + p \cdot \frac{m}{n} + q = 0$, deci $m^2 + pmn + qn^2 = 0$, $\quad (1)$.

Scriind relația (1) sub forma $m^2 = -n(pm + qn)$, deducem că $n \mid m^2$ și cum $(m,n) = 1$, rezultă $n = 1$. Relația (1) devine $m(m+p) = -q$ și cum q este impar rezultă că m și $m+p$ sunt impare, adică p este număr par, absurd!

Barem.

Folosește metoda reducerii la absurd și obține relația (1)	2 p
Obține $n = 1$	2 p
Obține contradicția	3 p

2. (7p) Dacă numerele reale a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi ABC și verifică egalitatea $a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) - bc(b+c) + ca(c+a)$, demomnstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Niculina Mihaela Moisuc, Rădăuți

Soluție: Egalitatea din ipoteză se scrie $a^3 + (b+c)(b^2 - bc + c^2) + bc(b+c) - a^2b - ab^2 - ac^2 - a^2c = 0$ sau $(b+c)(b^2+c^2) - a(b^2+c^2) - a^2(b+c-a) = 0$. Deducem că $(b+c-a)(b^2+c^2-a^2) = 0$, $\quad (1)$.

Cum $b + c > a$, rezultă $b + c - a \neq 0$, iar din relația (1) obținem $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, adică $b^2 + c^2 = a^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic.

Barem.

Obține relația (1)	4 p
Finalizare	3 p

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale definite prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n^{\,2} - 3n + 4}$ și $b_n = [a_n]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. ($[\alpha]$ *reprezintă partea întreagă a numărului real* α).

a) (2p) Arătați că $2^{n+1} > 4n - 5$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) (5p) Arătați că $b_1 + b_2 + ... + b_{10} = 2046$.

Octavian Rezuș, Vatra Dornei

Soluție.

a) Vom demonstra inegalitatea cerută prin metoda inducției matematice. Considerăm predicatul $P(n)$: $2^{n+1} > 4n - 5$, $n \in \mathbb{N}$. Propozițiile $P(0)$: $2^1 > -5$, $P(1)$: $2^2 > -1$, $P(2)$: $2^3 > 3$ și $P(3)$: $2^4 > 7$ sunt evident adevărate. Presupunem că propoziția $P(k)$ este adevărată și demonstrăm că propoziția $P(k+1)$ este adevărată, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Din $P(k)$ avem $2^{k+1} > 4k - 5$. Înmulțind cu 2 rezultă $2 \cdot 2^{k+1} > 2(4k - 5)$, adică $2^{k+2} > 8k - 10$, (1). Vom demonstra că, pentru orice $k \geq 3$ avem $8k - 10 > 4k - 1$, (2). Într-adevăr, $(2) \Leftrightarrow 4k > 9 \Leftrightarrow k > \frac{9}{4}$, evident adevărată pentru orice $k \geq 3$. Din (1) și (2) rezultă $2^{k+2} > 4k - 1$, adică $P(k+1)$ este adevărată. În concluzie, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Avem $a_2 = 2\sqrt{5}$, $a_2 = 6\sqrt{2}$. Prin inducție probăm imediat că $a_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Apoi, prin ridicare la pătrat, relația de recurență devine $a_{n+1}^{2} = 4a_n^{\,2} - 12n + 16$, egalitate ce poate fi scrisă sub forma $a_{n+1}^{2} - 4n = 4\left(a_n^{\,2} - 4(n-1)\right)$, adică $x_{n+1} = 4x_n$, unde $x_n = a_n^{\,2} - 4(n-1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Altfel spus, șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică cu rația 4. Cum $x_1 = 4$, deducem că $x_n = 4^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n^{\,2} = x_n + 4(n-1)$ și $a_n \geq 0$, rezultă $a_n = \sqrt{4^n + 4n - 4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Folosind punctul a), avem că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile: $(2^n)^2 = 4^n \leq 4^n + 4n - 4 = 4^n + 4n - 5 + 1 < 4^n + 2^{n+1} + 1 = (2^n + 1)^2$, de unde rezultă $2^n \leq a_n < 2^n + 1$. Atunci $b_n = [a_n] = 2^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică cu rația 2.

În concluzie, avem $b_1 + b_2 + ... + b_{10} = 2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2(1024 - 1) = 2046$.

Barem.

a) Demonstrează că $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ și $P(3)$ sunt adevărate	1 p
Demonstrează $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$	1 p
b) Demonstrează că $a_n = \sqrt{4^n + 4n - 4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$	2 p
Demonstrează că $b_n = [a_n] = 2^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$	2 p
Finalizare	1 p

4. (7p) Fie O intersecția diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$, M un punct de pe latura (AB) și N un punct de pe latura (CD). Să se arate că punctele O, M și N sunt coliniare dacă și numai dacă $AM \cdot DN \cdot OB \cdot OC = BM \cdot CN \cdot OA \cdot OD$.

***

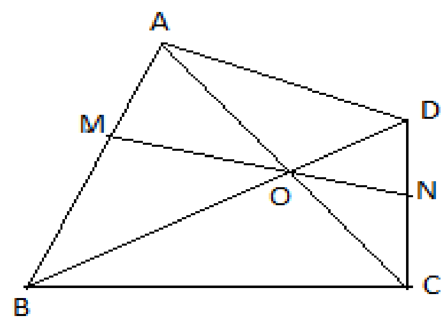
Soluție. Dacă notăm $\frac{AM}{BM} = a$, $\frac{DN}{CN} = b$, $\frac{OB}{OD} = c$, $\frac{OC}{OA} = d$, atunci:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{b+1}\overrightarrow{OD} + \frac{b}{b+1}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OD} = -\frac{1}{c}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC} = -d\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{ON} = -\frac{bd}{b+1}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{c(b+1)}\overrightarrow{OB}$$



Punctele O, M și N sunt coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{a+1}}{-\frac{bd}{b+1}} = \frac{\frac{a}{a+1}}{-\frac{1}{c(b+1)}} \Leftrightarrow \frac{1}{bd} = ac \Leftrightarrow abcd = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AM \cdot DN \cdot OB \cdot OC = BM \cdot CN \cdot OA \cdot OD$.

Barem.

Demonstrează că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{OB}$	2 p
Demonstrează că $\overrightarrow{ON} = -\frac{bd}{b+1}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{c(b+1)}\overrightarrow{OB}$	2 p
Finalizare	3 p

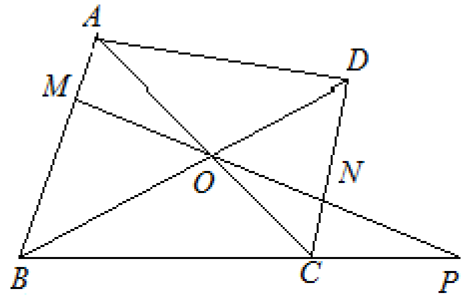
A doua soluție: Observăm că $AM \cdot DN \cdot OB \cdot OC = BM \cdot CN \cdot OA \cdot OD \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} \cdot \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \cdot \frac{DN}{CN}$, (1).

I. Să presupunem că O, M și N sunt coliniare.

Dacă $MN \parallel BC$, atunci din teorema lui Thales obținem $\frac{BM}{AM} = \frac{OC}{OA}$ și $\frac{DN}{CN} = \frac{OD}{OB}$, deci $\frac{BM}{AM} \cdot \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \cdot \frac{DN}{CN} = 1$.

Dacă $MN \nparallel BC$, fie $\{P\} = MN \cap BC$. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiurile ABC și DBC cu transversala PM și obținem:

$$\frac{PC}{PB} \cdot \frac{BM}{AM} \cdot \frac{OA}{OC} = 1 \text{ și } \frac{PC}{PB} \cdot \frac{OB}{OD} \cdot \frac{DN}{CN} = 1.$$



Comparând aceste două relații deducem că are loc și relația (1).

II. Să presupunem că are loc relația (1).

Dacă $ON \parallel BC$, atunci din teorema lui Thales obținem $\frac{DN}{CN} = \frac{OD}{OB}$ și din (1) rezultă că $\frac{BM}{AM} = \frac{OC}{OA}$. Aplicând reciproca teoremei lui Thales în triunghiul ABC, obținem $OM \parallel BC$.

Cum $ON \parallel BC$ și $OM \parallel BC$ deducem că punctele O, M și N sunt coliniare.

Dacă $ON \nparallel BC$, fie $\{P\} = ON \cap BC$. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul DBC cu transversala $P - N - O$ și obținem $\frac{PC}{PB} \cdot \frac{OB}{OD} \cdot \frac{DN}{CN} = 1$. Folosind relația (1) rezultă $\frac{PC}{PB} \cdot \frac{BM}{AM} \cdot \frac{OA}{OC} = 1$. Conform reciprocei teoremei lui Menelaus rezultă că punctele P, O, M sunt coliniare. Deoarece $N \in OP$ deducem că punctele O, M și N sunt coliniare.

Barem.

Scrie cerința sub forma (1)	1 p
Demonstrează implicația directă (**I.**)	3 p
Demonstrează implicația reciprocă (**II.**)_	3 p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.