Olimpiada naţională de matematică

etapa locală, 11.02.2023

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Arătaţi că, pentru orice număr întreg n, numărul $n^5 - 16n$ este multiplu de 15.

Problema 2.

Fie x și y două numere reale astfel încât $x + 1 = 4y$.

a) Demonstrați că dacă $x \in [-1,3]$, atunci $y \in [0,1]$.

b) Arătați că dacă $x \in [-1,3]$, atunci

$$\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10} = \sqrt{17}$$

Problema 3.

În vârfurile dreptunghiului $ABCD$ se construiesc dreptele AA', BB', CC' și DD', perpendiculare pe planul dreptunghiului. Punctele A', B', C' și D' sunt de aceeaşi parte a planului dreptunghiului, astfel încât $AA'=DD'$, $BB'=CC'$ şi $BB'=2AA'$.

a) Demonstrați că punctele A', B', C' şi D' sunt vârfurile unui dreptunghi.

b) Dacă M este punctul de intersecţie a dreptelor AB şi $A'B'$, iar N este punctul de intersecţie a dreptelor CD şi $C'D'$, determinaţi intersecţia planelor $(BB'N)$, $(CC'M)$ şi $(AA'D')$.

Problema 4.

Se consideră punctul A exterior planului triunghiului echilateral BCD de latură 4 cm, astfel încât $AB = AC = AD = \sqrt{6}$ cm.

a) Dacă M este mijlocul segmentului CD, determinaţi raportul dintre aria triunghiului ABC şi aria triunghiului ABM.

b) Determinaţi poziţia punctului P, situat pe segmentul CD, astfel încât aria triunghiului ABP să fie minimă.

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.
Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

SUCCES!