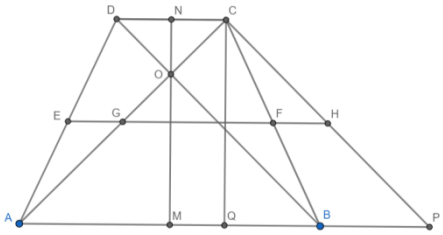
Olimpiada naţională de matematică
etapa locală, 11.02.2023
Clasa a VII-a

Problema 1.		**7puncte**
Se dau numerele: $$a = 2\sqrt{6}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) + 3\left\|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right\|$$ $$b = 2\left\|3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\right\| - 3\sqrt{\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)^2} + 1$$ a) Arătați că numărul $a < 0$. b) Arătați că $b = 1 - \sqrt{2}$. c) Calculați $(a-b)^{2021}$.		
***prof. Hotca Ana**, Şcoala Gimnazială Nr.3 Negreşti-Oaş*		
a)	$2\sqrt{6}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$ $\left\|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right\| = \left\|\sqrt{12} - \sqrt{18}\right\| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ $a = 6\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$ $a = -\sqrt{2} < 0$	1p 1p 1p
b)	$\left\|3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\right\| = \left\|\sqrt{27} - \sqrt{32}\right\| = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2} = \left\|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right\| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ $b = 2(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - 3(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) + 1$ $b = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 1$ $b = -\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$	1p 1p 1p
c)	$(a-b)^{2021} = \left[-\sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\right]^{2021} = (-\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})^{2021}$ $a = (-1)^{2021} = -1$	1p
Problema 2.		**7puncte**
Arătați că, pentru orice n număr natural are loc inegalitatea: $$\frac{8}{1^2\cdot 3^2} + \frac{16}{3^2\cdot 5^2} + \frac{24}{5^2\cdot 7^2} + \ldots + \frac{8n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2} < 1.$$		
***Gazeta Matematică**, nr. 11/2022*		
	$\frac{8}{1^2\cdot 3^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}$ $\frac{16}{3^2\cdot 5^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}$ $\frac{24}{5^2\cdot 7^2} = \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}$ …… $\frac{8n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}$ $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} =$	1p 1p 1p 1p 1p

	$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}$	1p
	$\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2} < 1$	1p
Problema 3		**7puncte**
Pe latura AB a pătratului $ABCD$ se consideră un punct E $(B \in (AE))$, astfel încât $m(\sphericalangle OEB) = 30^\circ$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Perpendiculara în O pe OE intersectează dreapta BC în F. Arătați că triunghiul EOF este isoscel și $OE = AB$.		
		(***)
	$\Delta EBO \equiv \Delta FCO$ $OB \equiv OC$, $\sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle FOC$	**1p**
	Fie $\{P\} = OE \cap BC$, $m(\sphericalangle BPE) = 60^\circ = m(\sphericalangle FPO)$	**1p**
	$m(\sphericalangle OFC) = 90^\circ - m(\sphericalangle OPF) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, iar $m(\sphericalangle OEB) = m(\sphericalangle OFC) = 30^\circ$	**1p**
	Conform cazului L.U.U. $\Delta EBO \equiv \Delta FCO$ și $OE \equiv OF$.	**1p**
	Fie $OQ \perp AB$, $Q \in AB$	**1p**
	În ΔOQE dreptunghic în Q, $OQ = \frac{1}{2}OE$	**1p**
	În ΔABC, OQ linie mijlocie, $OQ = \frac{1}{2}BC$. Deci $OE = BC = AB$.	**1p**
Problema 4		**7 puncte**
Arătați că într-un trapez isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ AB > CD)$ înălțimea este egală cu linia mijlocie dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.		
		(***)
	Se demonstrează că dacă diagonalele trapezului isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ sunt perpendiculare, atunci înălțimea este egală cu linia mijlocie. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ și EF linia mijlocie a trapezului. Fie $MN \perp AB$, $M \in [AB]$, $N \in [CD]$ și $O \in MN$. ΔAOB dreptunghic isoscel $\Rightarrow OM = \frac{AB}{2}$ ΔCOD dreptunghic isoscel $\Rightarrow ON = \frac{CD}{2}$ $MN = MO + ON = \frac{AB+CD}{2} = EF$.  	**2p**
	Se demonstrează că dacă înălțimea este egală cu linia mijlocie, atunci trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ are diagonalele perpendiculare. Se construiește $CP \parallel BD$ $(P \in AB)$ și $CQ \perp AB$ $(Q \in AB)$.	**2p**

	Se notează cu G mijlocul segmentului AC și cu H mijlocul segmentului CP $\Longrightarrow GH = \frac{AB+BP}{2} = \frac{AB+CD}{2} = CQ$ (1)	
	ΔACP este isoscel $\Longrightarrow$ înălțimea CQ este și mediană Din (1), deoarece mediana este jumătate din latura corespunzătoare $\Longrightarrow \Delta ACP$ este dreptunghic, adică $AC \perp CP$.	**2p**
	Cum $CP \parallel BD \Longrightarrow AC \perp BD$.	**1p**