Olimpiada naţională de matematică

etapa locală, 11.02.2023

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Mutasd ki, hogy az $n^5 - 16n$ szám a 15 többszöröse, bármilyen n egész szám esetén.

Problema 2.

Az x és y valós számok úgy, hogy $x + 1 = 4y$.

a) Bizonyítsd be, hogy ha $x \in [-1,3]$, akkor $y \in [0,1]$.

b) Igazold, hogy ha $x \in [-1,3]$, akkor

$$\sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10} = \sqrt{17}$$

Problema 3.

Az $ABCD$ téglalap csúcsaiban, a téglalap síkjára megszerkesztjük az AA', BB', CC' és DD' merőlegeseket. Az A', B', C' és D' pontok a sík ugyanazon az oldalán helyezkednek el úgy, hogy $AA'=DD'$, $BB'=CC'$ és $BB'=2AA'$.

a) Bizonyítsd be, hogy az A', B', C' és D' pontok egy téglalap csúcsai.

b) Ha az AB és $A'B'$ egyenesek metszéspontja M valamint a CD şi $C'D'$ egyenesek metszéspontja N, határozzátok meg a $(BB'N)$, $(CC'M)$ és $(AA'D')$ síkok metszetét.

Problema 4.

Adott a BCD egyenlő oldalú háromszög melynek oldala 4 cm. Az A pont a háromszög síkjának egy külső pontja úgy, hogy $AB = AC = AD = \sqrt{6}$ cm.

a) Ha az M pont a CD szakasz felezőpontja, határozzátok meg az ABC és ABM háromszögek területeinek arányát.

b) Határozzátok meg a CD szakasz azon P pontját melyre az ABP háromszög területe a legkisebb.

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.
Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

SUCCES!