OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17 FEBRUARIE 2023

Clasa a V-a

Problema 1. a) Se consideră numerele naturale a și b, unde:

$$a = 9^{10} : 27^3 : 3^8 - \left(2^4\right)^{10} : 4^{18} + 5, \quad b = \left(2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^1 - 2^0\right) \cdot \left(3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0\right).$$

Stabiliți dacă $4a + 15b + 69$ este cub perfect.

b) Ordonați descrescător numerele: $8^{224}, 127^{96}, 254^{84}$.

Problema 2. Determinați numerele naturale $\overline{abcde}$, cu a, b, c, d și e cifre nenule care verifică egalitatea:

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 10^e.$$

Gazeta Matematică nr. 10/2022

Problema 3. Peste 5 ani, suma vârstelor lui Ion, Victor, Matei și George va fi de 92 de ani. Aflați câți ani are fiecare, dacă Matei este mai mare decât George cu 3 ani, Ion este mai mare decât Victor cu 3 ani, iar George mai mic decât Ion cu 30 de ani.

Problema 4. Se consideră numărul natural $x = 2^{2023n+2} \cdot 5^{2023n+6} - 7$, unde n este un număr natural. Suma cifrelor lui x dă câtul 360 și restul 78 la împărțirea cu 101. Aflați ultima cifră a lui n^{2023}.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore. Se adaugă în plus 30 de minute, pentru întrebări.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17 FEBRUARIE 2023

Clasa a VI-a

Problema 1. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente complementare, iar măsurile lor sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3.
a) Aflați măsurile unghiurilor AOB și BOC.
b) Determinați măsura unghiului format de bisectoarea unghiului AOB cu semidreapta opusă bisectoarei unghiului BOC.

Problema 2. Aflați valorile numărului natural impar n, știind că mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ conține exact 674 de numere pare nedivizibile cu 3.

Gazeta Matematică nr.9/2022

Problema 3. Diferența dintre cel mai mic multiplu comun și cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b este egală cu 77. Aflați a și b știind că $a+b=49$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Calculați suma:

$$S=(n,3n+2)+(n+1,3n+5)+(n+2,3n+8)+\ldots+(n+674,3n+2024),$$

unde notația (a,b) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore. Se adaugă în plus 30 de minute, pentru întrebări.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17 FEBRUARIE 2023

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Demonstrați că numărul $x=\sqrt{2023\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2023}\right)}$ este rațional.

b) Aflați media geometrică a numerelor $a=\sqrt{13+4\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}$.

c) Demonstrați că numărul $\sqrt{2^{2023}+3}$ este irațional.

Problema 2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în B, iar $\sphericalangle ACB=30°$. Luăm punctele $F\in(BC)$, $H\in(AC)$, $L\in(AH)$, cu $BF=FC$, $AH=HC$, $AL=LH$. Fie punctul E pe latura BC astfel încât $\sphericalangle EHC=30°$. Arătați că $HE \parallel FL$.

Supliment Gazeta Matematică nr.12/2022

Problema 3. Se consideră șirul de numere reale: $a_1=\sqrt{13}$, $a_2=\sqrt{57}$, $a_3=\sqrt{911}$, $a_4=\sqrt{1315}$, ..., în care termenii aflați sub radical se obțin alipind câte două numere consecutive din șirul numerelor naturale impare, în ordine crescătoare.
a) Aflați al 25-lea termen al șirului.
b) Calculați suma $S=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{25}^2$.
c) Determinați termenii a_n din șirul dat care au proprietatea că $\left[\frac{a_n}{10}\right]=6$ (unde notația $[x]$ semnifică partea întreagă a numărului real x).

Problema 4. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $\sphericalangle B=30°$. Fie $(CD$ bisectoarea unghiului ACB, $D\in(AB)$, $AE\perp CD$, $E\in(CD)$ și F punctul de intersecție al dreptelor AE și BC. Notăm cu C' simetricul punctului C față de dreapta AF. Arătați că:
a) punctul D este centrul cercului circumscris triunghiului AFC';
b) patrulaterul $AFBC'$ este romb;
c) $BD=4DE$.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17 FEBRUARIE 2023

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Arătați că există un număr natural a pentru care $(n+2)^2 \leq n^2+5n+3<(n+3)^2$, pentru orice număr natural n, $n \geq a$.

b) Determinați numerele naturale n pentru care $\sqrt{n^2+5n+3}$ este număr rațional.

Problema 2. O foaie dreptunghiulară de hârtie $ABCD$, cu $AB=4$ cm și $\sphericalangle DCA=30°$, se îndoaie după diagonala AC, așa încât $(ABC)\perp(ACD)$.

a) Determinați distanța de la punctul D la dreapta BC.

b) Aflați lungimea segmentului BD, în figura formată după îndoire.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2022

Problema 3. a) Demonstrați că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, oricare ar fi numerele reale $a>0$ și $b>0$.

b) Fie $I=[6,\infty)$ și numărul $a=\frac{x^2-3x+84}{3y+16}+\frac{y^2-3y+84}{3x+16}$, unde $x, y>0$. Arătați că $a\in I$.

Problema 4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctul M este simetricul punctului A față de B, punctul N este piciorul perpendicularei din A pe dreapta BD', iar P este centrul pătratului $ADD'A'$. Demonstrați că punctele M, N și P sunt coliniare.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.