OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17 FEBRUARIE 2023

Clasa a V-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. a) Se consideră numerele naturale a și b, unde:

$$a = 9^{10} : 27^3 : 3^8 - \left(2^4\right)^{10} : 4^{18} + 5, \quad b = \left(2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^1 - 2^0\right)\cdot\left(3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0\right).$$

Stabiliți dacă $4a + 15b + 69$ este cub perfect.

b) Ordonați descrescător numerele: $8^{224}, 127^{96}, 254^{84}$.

prof. Iuliana Trașcă, Scornicești

Soluție și barem de corectare:

a) $a = 3^{20} : 3^9 : 3^8 - 2^{40} : 2^{36} + 5 \Rightarrow a = 16$ **1p**

$b = (16-8-4-2-1)\cdot(27-9-3-1) \Rightarrow b = 14$ **1p**

$4a + 15b + 69 = 343 = 7^3$ **1p**

b) $8^{224} = \left(2^3\right)^{224} = \left(2^3\right)^{8\cdot 28} = \left(2^8\right)^{3\cdot 28} = 256^{84} > 254^{84}$, deci $8^{224} > 254^{84}$ **1p**

$254^{84} = 2^{84}\cdot 127^{84}$, $127^{96} = 127^{12}\cdot 127^{84}$ **1p**

Deci, pentru a compara 254^{84} cu 127^{96}, este suficient să comparăm 2^{84} cu 127^{12}.

$2^{84} = \left(2^7\right)^{12} = 128^{12} > 127^{12}$, deci $254^{84} > 127^{96}$ **1p**

Ordinea descrescătoare este: 8^{224}, 254^{84}, 127^{96} **1p**

Problema 2. Determinați numerele naturale $\overline{abcde}$, cu a, b, c, d și e cifre nenule care verifică egalitatea:

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 10^e.$$

Gazeta Matematică nr. 10/2022

Soluție și barem de corectare:

Cum $1111 + 111 + 11 + 1 \le \overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d \le 9999 + 999 + 99 + 9$, rezultă că $1234 \le 10^e \le 11106$, deci $e = 4$ **2p**

Obținem $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 10\,000$, de unde $1000a + 200b + 30c + 4d = 10\,000$ **1p**

Ultima cifră a produsului $4d$ trebuie să fie 0, deci $d = 5$ (pentru că $d \ne 0$) **1p**

Obținem $1000a + 200b + 30c + 20 = 10\,000$, de unde $100a + 20b + 3c = 988$.

Deducem că ultima cifră a produsului $3c$ este 8, deci $c = 6$ **1p**

Atunci $100a + 20b + 18 = 988$, de unde reiese că $10a + 2b = 98$, deci ultima cifră a lui $2b$ este 8.

Ca urmare, fie avem $b = 4$, pentru care obținem $a = 9$, fie $b = 9$, pentru care găsim $a = 8$.

Problema are două soluții: $\overline{abcde} = 94\,654$ și $\overline{abcde} = 89\,654$ **2p**

Problema 3. Peste 5 ani, suma vârstelor lui Ion, Victor, Matei și George va fi de 92 de ani. Aflați câți ani are fiecare, dacă Matei este mai mare decât George cu 3 ani, Ion este mai mare decât Victor cu 3 ani, iar George mai mic decât Ion cu 30 de ani.

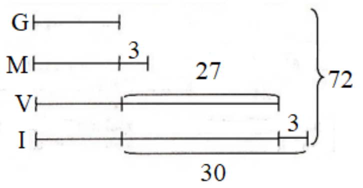
prof. Iuliana Trașcă, Scornicești

Barem:

Notăm cu I vârsta lui Ion, cu V vârsta lui Victor, cu M vârsta lui Matei și cu G vârsta lui George.

Peste 5 ani, suma vârstelor celor patru va fi $(I+5)+(V+5)+(M+5)+(G+5)=92$.

În prezent suma vârstelor lor este: $92-4\cdot 5=72$ ani **1p**

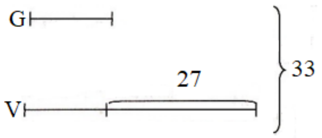


.... **1p**

$72-(3+3)=66$

$2V+2G=66 \Leftrightarrow V+G=33$ **1p**

$V-G=27$ **1p**



$33-27=6(2G)$ **1p**

$6:2=3$ ani (are George), $3+3=6$ ani (are Matei), $3+27=30$ ani (are Victor),

$30+3=33$ ani (are Ion) **2p**

Problema 4. Se consideră numărul natural $x=2^{2023n+2}\cdot 5^{2023n+6}-7$, unde n este un număr natural.

Suma cifrelor lui x dă câtul 360 și restul 78 la împărțirea cu 101. Aflați ultima cifră a lui n^{2023}.

prof. Iuliana Trașcă, Scornicești

Soluție și barem de corectare:

Suma cifrelor lui x este $360\cdot 101+78=36\ 438$ **1p**

$x=2^{2023n+2}\cdot 5^{2023n+6}-7=5^4\cdot 10^{2023n+2}-7$ **1p**

$x=625\underbrace{000...0}_{2023n+2}-7=624\underbrace{999...9}_{2023n+1}3$ **2p**

Suma cifrelor numărului x este $6+2+4+9\cdot(2023n+1)+3=24+18207n$ **1p**

$24+18207n=36438 \Rightarrow n=2$ **1p**

Restul împărțirii lui 2023 la 4 este 3, deci $u(2^{2023})=u(2^3)=8$ **1p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17 FEBRUARIE 2023

Clasa a VI-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt adiacente complementare, iar măsurile lor sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3.
a) Aflați măsurile unghiurilor *AOB* și *BOC*.
b) Determinați măsura unghiului format de bisectoarea unghiului *AOB* cu semidreapta opusă bisectoarei unghiului *BOC*.

prof. Manuela Stroie, Balș

Soluție și barem de corectare:

a) $\frac{\sphericalangle AOB}{2}=\frac{\sphericalangle BOC}{3}=\frac{\sphericalangle AOB+\sphericalangle BOC}{2+3}=\frac{90^\circ}{5}=18^\circ$ **2p**

$\sphericalangle AOB=36^\circ$, $\sphericalangle BOC=54^\circ$ **2p**

b) Fie (*OD* bisectoarea unghiului *AOB*, (*OE* bisectoarea unghiului *BOC* și (*OF* semidreapta opusă lui (*OE*.

$\sphericalangle DOE=\sphericalangle DOB+\sphericalangle BOE=\frac{1}{2}\sphericalangle AOB+\frac{1}{2}\sphericalangle BOC=\frac{1}{2}\left(\sphericalangle AOB+\sphericalangle BOC\right)=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ$ **2p**

$\sphericalangle DOF=\sphericalangle EOF-\sphericalangle DOE=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ **1p**

Problema 2. Aflați valorile numărului natural impar *n*, știind că mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ conține exact 674 de numere pare nedivizibile cu 3.

Gazeta Matematică nr.9/2022

Soluție și barem de corectare:

Numerele pare nedivizibile cu 3 sunt de forma $6k+2$ și $6k+4$, unde $k\in\mathbb{N}$ **2p**

În ordine crescătoare, al doilea astfel de număr este $6\cdot 0+4$, al patrulea este $6\cdot 1+4$, al șaselea este $6\cdot 2+4$ ș.a.m.d. – în general, al $2n$ – lea număr este $6\cdot(n-1)+4$)

Al 674-lea număr par nedivizibil cu 3 este $6\cdot 336+4=2020$ **2p**

iar al 675-lea este $6\cdot 337+2=2024$ **1p**

Rezultă că, dacă mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ conține exact 674 de numere pare nedivizibile cu 3, atunci $2020\le n<2024$, adică $n\in\{2020,2021,2022,2023\}$ **1p**

Dar *n* este impar, deci $n=2021$ sau $n=2023$ **1p**

Problema 3. Diferența dintre cel mai mic multiplu comun și cel mai mare divizor comun al numerelor naturale *a* și *b* este egală cu 77. Aflați *a* și *b* știind că $a+b=49$.

prof. Gabriela Ionică, Slatina

Soluție și barem de corectare:

Fie $d=(a,b)$. Atunci $a=d\cdot m$, $b=d\cdot n$, unde $m,n\in\mathbb{N}$, $(m,n)=1$ **1p**

Din $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$ rezultă $[a,b]=dmn$ **1p**

Relația $a+b=49$ devine $dm+dn=49$, de unde $d(m+n)=49$, deci $d\,|\,49$ **1p**

Din $[a,b]-(a,b)=77$ obținem $dmn-d=77$, de unde $d(mn-1)=77$, deci $d\,|\,77$ **1p**

Așadar $d\,|\,49$ și $d\,|\,77$, de unde rezultă că $d\in\{1,7\}$ **1p**

Dacă $d=1$, atunci $m+n=49$ și $mn=78$ și nu se obțin soluții **1p**

Dacă $d=7$, atunci $m+n=7$ și $mn=12$, de unde obținem $a=21$, $b=28$ **1p**

Problema 4. Fie *n* un număr natural nenul. Calculați suma:

$$S=(n,3n+2)+(n+1,3n+5)+(n+2,3n+8)+\ldots+(n+674,3n+2024),$$

unde notația (a,b) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor *a* și *b*.

prof. Gabriela Ionică, Slatina

Soluție și barem de corectare:

Suma are 675 de termeni, de forma $(k,3k+2)$, unde $k\in\{n,n+1,n+2,\ldots,n+674\}$ **1p**

Fie *d* cel mai mare divizor comun al numerelor *k* și $3k+2$.

Din $d\,|\,k$ și $d\,|\,(3k+2)$ rezultă că $d\,|\,(3k+2-3k)$, adică $d\,|\,2$, deci $d\in\{1,2\}$ **1p**

Mai precis, $(k,3k+2)=1$ pentru *k* impar, respectiv $(k,3k+2)=2$ pentru *k* par **1p**

Dacă *n* este impar, cei 675 de termeni ai sumei *S* sunt 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2, 1, iar suma căutată este

$S=(1+2)+(1+2)+\ldots+(1+2)\ +1=337\cdot 3+1=1012$ **2p**

Dacă *n* este par, cei 675 de termeni ai sumei *S* sunt 2, 1, 2, 1, ..., 2, 1, 2, iar suma căutată este

$S=(2+1)+(2+1)+\ldots+(2+1)\ +2=337\cdot 3+2=1013$ **2p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17 FEBRUARIE 2023

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Demonstrați că numărul $x=\sqrt{2023\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2023}\right)}$ este rațional.

b) Aflați media geometrică a numerelor $a=\sqrt{13+4\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}$.

c) Demonstrați că numărul $\sqrt{2^{2023}+3}$ este irațional.

Soluție și barem de corectare:

a) $x=2023\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2022}{2023}$ **1p**

$x=2023\cdot\frac{1}{2023}=1$, iar $\sqrt{x}=1\in\mathbb{Q}$ **1p**

b) $a=2\sqrt{3}+1$ **1p**

$b=\left|1-2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}-1$ **1p**

$m_g=\sqrt{ab}=\sqrt{11}$ **1p**

c) $2^{2023}+3=2^2\cdot 2^{2021}+3=4\cdot 2^{2021}+3$ **1p**

$2^{2023}+3$ are forma $4k+3$, deci nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{2^{2023}+3}\notin\mathbb{Q}$ **1p**

Problema 2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în B, iar $\sphericalangle ACB=30°$. Luăm punctele $F\in(BC)$, $H\in(AC)$, $L\in(AH)$, cu $BF=FC$, $AH=HC$, $AL=LH$. Fie punctul E pe latura BC astfel încât $\sphericalangle EHC=30°$. Arătați că $HE \parallel FL$.

Supliment Gazeta Matematică nr.12/2022

Soluție și barem de corectare:

$\sphericalangle ABC=30^0 \Rightarrow \sphericalangle BAC=60^0$

$AB=\frac{AC}{2}=AH \Rightarrow \Delta ABH$ isoscel, de unde ΔABH echilateral **2p**

BL mediană $\Rightarrow$ BL înălțime $\Rightarrow \sphericalangle BLH=90^0$ **1p**

$BH=\frac{AC}{2}=HC \Rightarrow \Delta BHC$ isoscel

HF mediană $\Rightarrow$ HF înălțime $\Rightarrow \sphericalangle BFH=90^0$ si $\sphericalangle HBF=30^0$ **1p**

$BFHL$ inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle FBH=\sphericalangle LFH=30^0$

$\sphericalangle EHF=60^0-30^0=30^0$ **1p**

Avem $\sphericalangle LFH\equiv\sphericalangle FHE$ alterne interne cu HF secantă $\Rightarrow LF \parallel HE$ **2p**

Problema 3. Se consideră șirul de numere reale: $a_1=\sqrt{13}$, $a_2=\sqrt{57}$, $a_3=\sqrt{911}$, $a_4=\sqrt{1315}$, ..., în care termenii aflați sub radical se obțin alipind câte două numere consecutive din șirul numerelor naturale impare, în ordine crescătoare.

a) Aflați al 25-lea termen al șirului.

b) Calculați suma $S=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{25}^2$.

c) Determinați termenii a_n din șirul dat care au proprietatea că $\left[\frac{a_n}{10}\right]=6$ (unde notația $[x]$ semnifică partea întreagă a numărului real x).

prof. Nicolae Tomescu, Corabia

Soluție și barem de corectare:

a) Dintre cele două numere care se alipesc pentru formarea termenului a_k (de exemplu 1, 5, 9, 13 etc.) primul număr are forma $4k-3$, unde $k\in\{1,2,3,\ldots\}$ **1p**

Al 25-lea număr de această formă se obține pentru $k=25$ și este 97, deci $a_{25}=\sqrt{9799}$ **1p**

b) $S=13+57+911+(1315+1719+\ldots+9799)$

$=981+(13\cdot100+15)+(17\cdot100+19)+\ldots+(97\cdot100+99)$

$=981+100\cdot(13+17+21+\ldots+97)+(15+19+23+\ldots+99)$ **1p**

de unde $S = 981 + 100\cdot1210 + 1254 = 123\,235$ **2p**

c) Fie $a_n=\sqrt{x}$, unde x este obținut prin alipirea a două numere impare consecutive, primul fiind de forma M_4+1. Din $6\le\frac{a_n}{10}<7$ rezultă $60\le\sqrt{x}<70$, deci $3600\le x<4900$ **1p**

Termenii căutați sunt $a_{10}=\sqrt{3739}$, $a_{11}=\sqrt{4143}$ și $a_{12}=\sqrt{4547}$ **1p**

Problema 4. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $\sphericalangle B=30°$. Fie $(CD$ bisectoarea unghiului ACB, $D\in(AB)$, $AE\perp CD$, $E\in(CD)$ și F punctul de intersecție al dreptelor AE și BC. Notăm cu C' simetricul punctului C față de dreapta AF. Arătați că:

a) punctul D este centrul cercului circumscris triunghiului AFC';

b) patrulaterul $AFBC'$ este romb;

c) $BD=4DE$.

prof. Manuela Stroie, Balș

Soluție și barem de corectare:

a) Avem $\sphericalangle B=30°$, deci $\sphericalangle C=60°$.

CE înălțime și bisectoare ⇒ ΔACF isoscel cu $\sphericalangle C=60^0$ ⇒ ΔACF echilateral.......................... **1p**

CE înălțime (sau bisectoare) ⇒ CE mediană ⇒ $AE=EF$. Cum $CE = C'E$ ⇒ $ACFC'$ paralelogram cu $CC'\perp AF$ ⇒ $ACFC'$ romb ⇒ $AC \parallel FC'$, de unde $FC'\perp AB$ ⇒ AM și $C'E$ înălțimi în $\Delta AC'F$ echilateral ⇒ D ortocentru $\Delta AC'F$ ⇒ D centrul cercului circumscris $\Delta AFC'$ **2p**

b) Δ $AC'F$ echilateral și AM înălțime ⇒ $FM = MC'$ **1p**

FM linie mijlocie în ΔABC ⇒ M mijlocul lui AB.

Din $AM=MB$ și $FM=MC'$ ⇒ $AFBC'$ paralelogram cu $AB\perp FC'$ ⇒ $AFBC'$ romb **1p**

c) $\sphericalangle ACD=30^0 \Rightarrow AD=\frac{CD}{2}$

ΔBDC isoscel ⇒CD=BD⇒ $AD=\frac{BD}{2}$ **1p**

$\sphericalangle DAE=30^0 \Rightarrow DE=\frac{AD}{2}=\frac{BD}{4} \Rightarrow BD=4DE$ **1p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 17 FEBRUARIE 2023

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Arătați că există un număr natural *a* pentru care $(n+2)^2 \le n^2+5n+3<(n+3)^2$, pentru orice număr natural *n*, $n \ge a$.

b) Determinați numerele naturale *n* pentru care $\sqrt{n^2+5n+3}$ este număr rațional..

Soluție și barem de corectare:

a) $(n+3)^2 = n^2+6n+9 > n^2+5n+3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ **1p**

$(n+2)^2 \le n^2+5n+3 \Rightarrow n \ge 1$ **1p**

Așadar $(n+2)^2 \le n^2+5n+3<(n+3)^2$, pentru orice $n \ge 1$, deci $a=1$ sau orice număr natural mai mare ca 1 (în particular, cea mai mică valoare posibilă este $a=1$) **1p**

b) $n=0$ nu este soluție **1p**

$n+2 \le \sqrt{n^2+5n+3} < n+3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n+2=\sqrt{n^2+5n+3}$ **2p**

$n=1$ **1p**

Problema 2. O foaie dreptunghiulară de hârtie *ABCD*, cu $AB=4$ cm și $\sphericalangle DCA=30°$, se îndoaie după diagonala *AC*, așa încât $(ABC)\perp(ACD)$.

a) Determinați distanța de la punctul *D* la dreapta *BC*.

b) Aflați lungimea segmentului *BD*, în figura formată după îndoire.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2022

Soluție și barem de corectare:

a) Fie $DM \perp AC$, $M \in AC$, $DM \subset (DAC)$ și $MN \perp BC$, $N \in BC$ (după îndoire).

Conform teoremei celor trei perpendiculare avem $DN \perp BC$, deci distanța cerută este *DN* **1p**

Din ΔDMC rezultă $DM=2$ **1p**

$MN=3$ **1p**

$DN^2=DM^2+MN^2 \Rightarrow DN=\sqrt{13}$ cm **1p**

b) $BN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **2p**

$BD^2=DN^2+NB^2 \Rightarrow BD=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$ cm **1p**

Problema 3. a) Demonstrați că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, oricare ar fi numerele reale $a>0$ și $b>0$.

b) Fie $I=[6,\infty)$ și numărul $a=\frac{x^2-3x+84}{3y+16}+\frac{y^2-3y+84}{3x+16}$, unde $x,y>0$. Demonstrați că $a\in I$.

Soluție și barem de corectare:

a) Pentru orice numere reale $a>0$ și $b>0$ avem $(a-b)^2\geq 0$, adică $a^2+b^2\geq 2ab$,

de unde, împărțind prin ab obținem $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ **2p**

b) $a\in I \Leftrightarrow a\geq 6$ **1p**

$\frac{x^2-3x+84}{3y+16}+\frac{y^2-3y+84}{3x+16}=\frac{(x-6)^2+3(3x+16)}{3y+16}+\frac{(y-6)^2+3(3y+16)}{3x+16}$ **1p**

$\frac{(x-6)^2+3(3x+16)}{3y+16}+\frac{(y-6)^2+3(3y+16)}{3x+16}\geq\frac{3\cdot(3x+16)}{3y+16}+\frac{3\cdot(3y+16)}{3x+16}$ **2p**

$\frac{3\cdot(3x+16)}{3y+16}+\frac{3\cdot(3y+16)}{3x+16}=3\left(\frac{3x+16}{3y+16}+\frac{3y+16}{3x+16}\right)\geq 6$ **1p**

Problema 4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctul *M* este simetricul punctului *A* față de *B*, punctul *N* este piciorul perpendicularei din *A* pe dreapta *BD'*, iar *P* este centrul pătratului *ADD'A'*. Demonstrați că punctele *M*, *N* și *P* sunt coliniare.

Soluție și barem de corectare:

Punctele *M*, *N*, *P* aparțin planului $(ABC'D')$ **1p**

Triunghiul *BCD'* este dreptunghic **1p**

$BN=\frac{BD'}{3}$ **1p**

$NQ\perp AB$, $Q\in AB$, $NQ\parallel AD'$ și $\Delta BNQ\sim\Delta BD'A \Rightarrow \frac{BQ}{BA}=\frac{BN}{BD'}=\frac{NQ}{AD'}=\frac{1}{3}$,

de unde rezultă că $\frac{NQ}{AP}=\frac{2}{3}$ **2p**

$\Delta MQN\sim\Delta MAP$ (L.U.L) **1p**

A, *Q*, *M* coliniare $\Rightarrow$ *P*, *N*, *M* coliniare **1p**