Olimpiada de Matematică
Etapa locală, Neamț
11.02.2023
Barem de notare și evaluare
Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Demonstrați că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, $(\forall)$ n $\in \mathbb{N}^*$.

b) Fie $A_n=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2+1}}}$, n $\in \mathbb{N}^*$.

Determinați n $\in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sqrt{7}\cdot A_n=\sqrt{2016}$.

Barem

a)Se ridică la pătrat 2n+$\sqrt{4n^2-1}$=$\frac{2n+1+2\sqrt{4n^2-1}+2n-1}{2}$ ....(1p)

Finalizare ....(1p)

b)Se obține $A_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ ....(1p)

$A_n=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2n+1-2n+1}\right)$ ....(1p)

$A_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right) => \sqrt{7}*An=\frac{\sqrt{14}}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)$ ....(1p)

Se obține $\sqrt{2n+1}-1$=24=>n=312 ....(2p)

Subiectul 2

Fie x, m, n $\in\mathbb{R}$ astfel încât |x−m|≤2 si |x−n|≤2, demonstrați că:

|x−$\frac{m+n}{2}$|≤2 și $|x^2-$ m·n|−4|m|≤4 .

Barem

Se știe că |a+b|≤|a|+|b|

$|x-\frac{m+n}{2}|=$

$\frac{1}{2}|2x-m-n|=\frac{1}{2}|(x-m)+(x-n)|\leq=\frac{1}{2}|x-m|+\frac{1}{2}|x-n|\leq\frac{1}{2}*2+\frac{1}{2}*2=2$
....(3p)

Inspectoratul Şcolar Judeţean Neamţ
Piatra Neamţ, jud. Neamţ, str. Lt. Drăghiescu, Nr. 4A
tel. 0233/214860, fax 0233/215807, e-mail: office@isjneamt.ro

$|x^2-mn|=|x^2-mx+mx-mn|=|x(x-m)+m(x-n)|\leq|x(x-m)|+|m(x-n)|$

$\leq|x|\cdot|x-m|+|m|\cdot|x-n|\leq 2|x|+2|m|=2[|x|+|m|]$ ………………………………. (2p)

$2[|x|+|m|]=2(|x-m+m|+|m|)\leq 2(|x-m|+|m|+|m|)\leq 2(2+2|m|)=4(1+|m|)$ ……(1p)

Deci $|x^2-m*n|\leq 4+4|m|$ de unde se deduce inegalitatea ………………….(1p)

Subiectul 3

Pe planul triunghiului ABC , cu laturile AB=2 , BC=$\sqrt{3}$,AC=1 se ridică perpendiculara AM=$\sqrt{2}$.

a) Arătați că MC si BC sunt perpendiculare.
b) Aflați măsura unghiului dintre MC si (ABM).

Barem

a) Conform reciprocei lui Pitagora $\triangle ABC$ este $\triangle$dreptunghic în C …….. (1p) .

Din teorema celor 3 perpendiculare se demonstrează că MC si BC sunt perpendiculare ……………………………………………………………………………(2p)

b) Construim $CP\perp AB$ cum $MA\perp(ABC)$ =>$CP\perp MA$ => $CP\perp(MAB)$, deci proiecția lui C pe (MAB) este punctul P ……………………………………………………...(1p)

De unde rezultă ca $\angle(MC, (MAB))=\angle(MC,MP)=\angle CMP$ …………………..(1p)

$\triangle MCP$ dreptunghic in P => $\sin\angle(CMP)=\frac{CP}{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$ ……………………(1p)

Deci $\angle CMP=30^\circ$ ………………………………………………………(1p)

Subiectul 4

În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu AB=$12\sqrt{3}cm$, BC=12cm și AA'=18cm se consideră un punct N pe muchia A'B' astfel încât A'N=3B'N. Determinați poziția punctului P€(AA') astfel încât pentru orice M∈(BC) triunghiul MNP să fie dreptunghic în N.

Barem

$MB\perp(ABB')$ si $MN\perp PN$ si $PNC\perp(ABB')$ => reciproca teoremei celor 3 perpendiculare =>$BN\perp PN$ ……………………………………………….(1p)

$\triangle MNP$ dreptunghic în N deci si $\triangle BNP$ dreptunghic in N , notam AP=x

A'P=|18-x|,NB=$3\sqrt{3}$,A'N=$9\sqrt{3}$

Folosind teorema lui Pitagora =>BN^2=351 ……………………………….(2p)

BP^2=432+x^2……………………………………………………………(1p)

PN^2=243+$(18-x)^2$ ……………………………………………………..(1p)

△PNB : $BP^2=PN^2+BN^2$ =>432+x^2=243+$(18-x)^2$+351 …………(1p)

Deci x=13,5cm………………………………………………………… (1p)