Olimpiada de Matematică
Etapa locală, Neamț
11.02.2023
Barem de notare și evaluare
Clasa a VI-a

Subiectul 1

a) Mulțimea numerelor naturale se împarte în submulțimi astfel: {0}; {1,2}; {3; 4; 5}; {6; 7; 8; 9}; … unde prima submulțime conține un număr, a doua submulțime conține două numere și așa mai departe. Aflați cu ce număr începe cea de-a 100-a submulțime și care este suma numerelor din cea de-a 100 submulțime?

b) Determinați mulțimea $M = \{a \in \mathbb{N} / \ a^2 + 5a - 2^{1993} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1993\}$.

Barem

a) Se calculează numărul cu care începe cea de-a 100-a submulțime: 1+2+3+…+99= 4950 (2p)
Suma numerelor din cea de-a 100 submulțime este $9999 \cdot 50$....................................... (2p)

b) $1+2+3+...+1993=1993\cdot 997$ (2p)
Relația dată devine $a(a+5)=2^{1993}+1993\cdot 997$ în care membrul stang este un număr par pentru orice *a* număr natural, iar membrul drept este număr impar. Deci relația este falsă și rezultă $M=\varnothing$.(2p)

Subiectul 2

a) Dacă numerele naturale *n, n+1, n+3* sunt prime, atunci numărul $n^{n+3}+(n+1)^n+(n+3)^{n+1}$ este număr prim?

b) Se dă suma $P=8^1+8^2+8^3+...+8^{888}$ Se numește sumă perfectă dacă se divide cu 73. Verificați dacă suma *P* este perfectă.

Barem

a) *n, n+1* fiind numere prime $\Rightarrow n=2 \Rightarrow n^{n+3}+(n+1)^n+(n+3)^{n+1}=166$ se divide cu 2, deci nu este număr prim. ………………………………………………………. (4p)

b) Asociind câte 3 termeni și scoțând factor comun se obține în fiecare paranteză $1+8+8^2=73$. Deci, suma este perfectă……………………………………….. (3p)

Subiectul 3

Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente, iar semidreptele *OX*, respectiv *OY* bisectoarele lor.

a) Dacă semidreapta *OX* este perpendiculară pe semidreapta *OC* și semidreapta *OY* este perpendiculară pe semidreapta *OA*, calculați măsurile unghiurilor date.

b) Dacă semidreptele *OX*, *OC*, respectiv *OY*, *OA* sunt în prelungire, calculați măsurile unghiurilor date.

Barem

a) Notăm $\sphericalangle AOB = 2a$ și $\sphericalangle BOC = 2b$, se obțin ecuațiile $2a+b=90^0$ și $a+2b=90^0$ cu soluția $a=30^o, b=30^o \Rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = 60^o$ (4p)

b) Raționând în mod analog obținem $\Rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = 120^o$ (3p)

Subiectul 4

Să se afle măsura unui unghi u știind că raportul dintre complementul și suplementul său este egal cu cel mai mare număr rational exprimat de fracția $\frac{\overline{2x}}{\overline{abc}}$, unde $\overline{2x}$ este număr prim care îl divide pe $\overline{abc}$, iar *x; a; b; c* sunt cifre în baza zece.

Barem

$\frac{\overline{2x}}{\overline{abc}}$ este cel mai mare număr dacă $\overline{2x}$ este cel mai mare și $\overline{abc}$ este cel mai mic. (2p)

Deci, x=9, iar $\overline{abc}$ este primul multiplu de trei cifre al lui 29, adică 116. (2p)

Măsura unghiului fiind u atunci măsura complemntului este $90^o - u$. (0,5p)

Măsura suplementului este $180^o - u$. (0,5p)

$\frac{29}{116} = \frac{1}{4}; \frac{90^o - u}{180^o - u} = \frac{1}{4}$ (2p)

$u = 60^0$

Inspectoratul Şcolar Judeţean Neamţ
Piatra Neamţ, jud. Neamţ, str. Lt. Drăghiescu, Nr. 4A
tel. 0233/214860, fax 0233/215807, e-mail: office@isjneamt.ro