Olimpiada de Matematică
Etapa locală, Neamț
11.02.2023
Barem de notare și evaluare
Clasa a VII-a

Subiectul 1

Să se găsească numerele întregi x și y pentru care are loc relația $\left||x-3|+|y-2\cdot x|\right|=3$.

Barem

1. Din $x,\ \ y\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ |x-3|\in\mathbb{N}$ și $|y-2\cdot x|\in\mathbb{N}$

Deci, $|x-3|+|y-2\cdot x|\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ \left||x-3|+|y-2\cdot x|\right|=|x-3|+|y-2\cdot x|=3$.......... (3p)

Se discută următoarele cazuri:

I. $\begin{cases}|x-3|=3\\|y-2\cdot x|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=12\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ .... (1p)

II. $\begin{cases}|x-3|=2\\|y-2\cdot x|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=11\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=5\\y=9\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ .... (1p)

III. $\begin{cases}|x-3|=1\\|y-2\cdot x|=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=10\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ .... (1p)

IV. $\begin{cases}|x-3|=0\\|y-2\cdot x|=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=9\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$ .... (1p)

Subiectul 2

a) Să se determine cifrele a și b astfel încât: $\sqrt{\overline{b7b}}=\overline{ab}$.

b) Dacă $x,y,z\in\mathbb{Q}_+$ și $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=2023$, arătați că: $\sqrt{(x^2+2023)\cdot(y^2+2023)\cdot(z^2+2023)}\in\mathbb{Q}$.

Barem

a) $\sqrt{\overline{b7b}}=\overline{ab}\ \Leftrightarrow\ \overline{b7b}=\overline{ab}^2\ \Leftrightarrow\ 100\cdot b+70+b=100\cdot a^2+20\cdot a\cdot b+b^2$

$10\cdot(10\cdot b+7-10\cdot a^2-2\cdot a\cdot b)=b\cdot(b-1)$ .... (1p)

Obținem: $\begin{cases}b\cdot(b-1)\ \vdots\ 10\\b\cdot(b-1)\ \ par\end{cases}\Rightarrow\ b=5\ \ sau\ b-1=5\ \Leftrightarrow\ b=6$ .... (1p)

Dacă $b=5\ \Rightarrow\ 2\cdot a^2+2\cdot a=11$Fals!

Dacă $b=6\ \Rightarrow\ a\cdot(5\cdot a+6)=32\ \Rightarrow$ a este o putere a lui 2. Se verifică faptul că singura valoare care convine este a=2.

Deci, a=2, b=6. .... (1p)

b)

$x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x = 2023 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2023 = x^2 + x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x = x \cdot (x+y) + z \cdot (x+y) = (x+y) \cdot (x+z)$

Analog găsim: $y^2 + 2023 = (x+y) \cdot (y+z)$ și $z^2 + 2023 = (x+z) \cdot (y+z)$......... (2p)

Avem: $\sqrt{(x^2+2023) \cdot (y^2+2023) \cdot (z^2+2023)} = \sqrt{(x+y)^2 \cdot (y+z)^2 \cdot (z+x)^2} =$
$= (x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x) \in \mathbb{Q}$ .... (2p)

Subiectul 3

Considerăm un dreptunghi ABCD. Perpendiculara AM pe BD ($M \in BD$), intersectează BC și DC în E și F. Arătați că $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$.

Barem

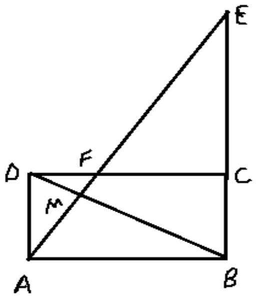
În triunghiul AEB, avem $FC \parallel AB \overset{TFA}{\Rightarrow} \triangle ABE \sim \triangle FCE \Rightarrow \frac{FC}{AB} = \frac{CE}{BE} = \frac{FE}{AE}$

Din $\frac{FC}{AB} = \frac{FE}{AE} \Rightarrow \frac{AB - FC}{AB} = \frac{AE - FE}{AE} \Rightarrow \frac{DF}{AB} = \frac{AF}{AE}$ (1)............................. (2p)

Din $\triangle ABM \sim \triangle FDM \Rightarrow \frac{FM}{AM} = \frac{DM}{BM} = \frac{FD}{AB}$ (2) .... (2p)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{FM}{AM} = \frac{AF}{AE} = \frac{AF - AM}{AM} \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AF}{AM} - 1 \;/\cdot \frac{1}{AF}$ .... (2p)

Obținem $\frac{AF}{AE} \cdot \frac{1}{AF} = \frac{AF}{AM} \cdot \frac{1}{AF} - \frac{1}{AF} \Rightarrow \frac{1}{AE} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AF} \Rightarrow \frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$...............(1 p)



Subiectul 4

Fie M un punct interior triunghiului ABC astfel încât $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ACM}$. Dacă P și Q sunt proiecțiile punctului M pe AB, respectiv AC și E mijlocul segmentului $[BC]$, să se arate că $[EP] \equiv [EQ]$.

Barem

Vom considera S mijlocul lui [BM] și R mijlocul lui [CM], obținem SERM paralelogram ……………………………………….. (1p)

$[SE] \equiv [MR] \equiv [QR]$ (1) .... (1p)

$[SP] \equiv [MS] \equiv [ER]$ (2) .... (1p)

$m(\widehat{PSE}) = m(\widehat{PSM}) + m(\widehat{ESM}) = 2 \cdot m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{ESM})$ .... (1p)

$m(\widehat{ERQ}) = m(\widehat{QRM}) + m(\widehat{ERM}) = 2 \cdot m(\widehat{ACM}) + m(\widehat{ERM})$ ....,.. (1p)

Obținem $\widehat{PSE} \equiv \widehat{ERQ}$ (3) .... (1p)

Din (1), (2) și (3) avem $\triangle PSE \equiv \triangle ERQ \Rightarrow [EP] \equiv [EQ]$. .... (1p)