OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-11 FEBRUARIE 2023

Clasa a IX-a

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Să se demonstreze că:

a) $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a} \geq a+b, \quad (\forall)\ a,b,c>0$

b) $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c, \quad (\forall)\ a,b,c>0$

***Soluție*:**

a) Inegalitatea este echivalentă cu: $\left(\frac{a^2+bc}{b+c}-a\right)+\left(\frac{b^2+ca}{c+a}-b\right) \geq 0 \iff \frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-c)(b-a)}{c+a} \geq 0 \iff$ 2p

$\iff (a-b)\left(\frac{a-c}{b+c}-\frac{b-c}{c+a}\right) \geq 0 \iff \iff (a-b)\frac{a^2-b^2}{(b+c)(c+a)} \geq 0 \iff$................................1p

$\iff \frac{(a-b)^2(a+b)}{(b+c)(c+a)} \geq 0, (\forall)\ a,b,c>0$ 1p

b) Folosind punctul a), obținem b)..3 p

Subiectul 2

Să se determine numerele reale $a_1, a_2, \dots\dots, a_n$, strict pozitive, astfel încât:

$\left(\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{2}{a_2}\right)^2+\dots\dots\dots+\left(\frac{n}{a_n}\right)^2=\frac{n(n+1)}{2}, \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}^\star$.

Soluție:

Pentru $n = 1$, avem $\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a_1 = 1 = \sqrt{1}$

Pentru $n = 2$, avem $1^2 + \left(\frac{2}{a_2}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow a_2 = \sqrt{2}$ ……………………..…….……2p

Vom arăta prin inducție că:

$P(n)$: $a_n = \sqrt{n}$, $(\forall)\, n \geq 1$

1) Etapa de verificare a fost parcursă.

2) Etapa de demonstrație:

Presupunem $P(k)$ și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată, $(\forall)\, k \geq 1$.

$P(k)$: $a_k = \sqrt{k}$

$P(k+1)$: $a_{k+1} = \sqrt{k+1}$ ……………………….…………………………….………….1p

Dar $\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{2}{a_2}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{k}{a_k}\right)^2 + \left(\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)^2 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, $(\forall)\, k \in \mathbb{N}^\star \Leftrightarrow$…..1p

$\frac{k(k+1)}{2} + \left(\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)^2 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \Leftrightarrow {a_{k+1}}^2 = k+1 \Leftrightarrow a_{k+1} = \sqrt{k+1}$ ……….......2p

Din I) și II), rezultă că $P(n)$ este adevărată, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^\star$……………………..…..1p

Subiectul 3

Se consideră $a_0 \in \mathbb{N}$ și mulțimea $M = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots.., a_n, \ldots\ldots.\}$, unde

$a_1 = \sqrt{{a_0}^2 + 1}$, $a_2 = \sqrt{{a_1}^2 + 1}, \ldots\ldots, a_n = \sqrt{{a_n}^2 + 1}, \ldots\ldots\ldots$, iar $n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că mulțimile $M \cap \mathbb{Q}$ și $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ conțin o infinitate de elemente.

Soluție:

Ridicând la pătrat relația $a_{n+1} = \sqrt{{a_n}^2 + 1}$, obținem ${a_{n+1}}^2 = {a_n}^2 + 1$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$………..1p

Adunând relațiile pentru $k \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots.., n-1\}$, obținem ${a_n}^2 = {a_0}^2 + n$. …………..…1p

Luând $n_k = 2ka_0 + k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă $a_{n_k}{}^2 = (a_0 + k)^2 \Leftrightarrow a_{n_k} = a_0 + k \in \mathbb{Q}$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, deci $M \cap \mathbb{Q}$ este infinită……………………………...…………..1p

Vom demonstra că $a_{n_k+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$, prin metoda reducerii la absurd.

Presupunem că $a_{n_k+1} \in \mathbb{Q}$. Cum $a_{n_k} = a_0 + k \Rightarrow a_{n_k} \in \mathbb{N}$, iar $a_{n_k+1} = \sqrt{a_{n_k}{}^2 + 1}$, rezultă că $a_{n_k+1} \in \mathbb{N}$ ...……………………………………..……………………….……………………1p

Ridicând la pătrat relația $a_{n_k+1} = \sqrt{a_{n_k}{}^2 + 1}$, obținem $a_{n_k+1}{}^2 = a_{n_k}{}^2 + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_{n_k+1}{}^2 - a_{n_k}{}^2 = 1 \Leftrightarrow (a_{n_k+1} - a_{n_k})(a_{n_k+1} + a_{n_k}) = 1$. ……………….……..1p

Dar $a_{n_k} \in \mathbb{N}$ și $a_{n_k+1} \in \mathbb{N}$, rezultă că $\begin{cases} a_{n_k+1} - a_{n_k} = 1 \\ a_{n_k+1} + a_{n_k} = 1 \end{cases}$. Scăzând cele două ecuații obținem $a_{n_k} = 0$. Cum $a_{n_k}{}^2 = a_0{}^2 + n_k$, obținem $a_0{}^2 + n_k = 0$, ceea ce este fals, deoarece $a_0 \geq 0$ și $k \geq 1$. Deci $a_{n_k+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$……………...…………2p

Subiectul 4

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu ortocentrul in H. Notăm cu S și T punctele de intersecție dintre semidreptele (BH respectiv (CH și cercul circumscris triunghiului ABC. Dacă $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AH}$, arătați ABC este triunghi echilateral.

(GM 11/2022)

Soluție

Din $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AH}$ rezulta că ASHT este paralelogram⇒AT || BS și AS ||CT……..2p

Din BS⊥AC și AT|| BS ⇒ AT⊥AC⇒ $[CT]$ diametru in cercul circumscris triunghiului ABC.(1) ……………………………………………………………………1p

Din CT⊥AB și AS|| CT ⇒ AS⊥AB⇒ $[BS]$ diametru in cercul circumscris triunghiului ABC.(2)…………………………………………….…………………………1p

Din relațiile (1) și (2) rezulta că BCST este dreptunghi⇒BS ∩ CT={O}, dar

BS ∩CT={H}⇒ $H = O$ ⇒ΔABC este echilateral………………….……………….3p