OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 11 februarie 2023
CLASA a VIII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1: ***Arătați că:*** $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{49}{\sqrt{600}}>48.$

Soluție:

Pentru două numere a, b strict pozitive și diferite avem: $m_g < m_a$ … (1p)

Aceasta este echivalentă cu $\sqrt{a\cdot b}<\frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{\sqrt{a\cdot b}}>2$ ……………. (2p)

Aplicăm această inegalitate si obținem:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{1+2}{\sqrt{1\cdot 2}}>2$$

$$\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{2+3}{\sqrt{2\cdot 3}}>2$$

……………………

$\frac{49}{\sqrt{600}}=\frac{24+25}{\sqrt{24\cdot 25}}>2$ ………………………………………………………….(2p)

Adunând toate relațiile obținute mai sus vom avea:

$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{49}{\sqrt{600}}>\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{de\ 24\ de\ ori}$ ……………………(1p)

$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{49}{\sqrt{600}}>48$ …………………………………….(1p)

Subiectul 2: ***Numerele întregi a și b verifică egalitatea:*** $\frac{a}{2-\sqrt{3}}+\frac{b}{2+\sqrt{3}}=6-\sqrt{3}.$

Arătați că numărul $p=\frac{5a-3b}{3a-2b}$ ***este natural.***

Soluție:

Relația dată este echivalentă cu: $2a+2b-6=(b-a-1)\sqrt{3}$ …………………………….....(2p)

Cum a și b sunt întregi vom avea că și 2a+2b-6 va fi un număr întreg ………………………. (1p)

Rezultă $(b-a-1)\sqrt{3}$ este număr întreg …………………………..……...…….…..….(1p)

Cele de mai sus ne conduc la $\begin{cases}2a+2b-6=0\\ b-a-1=0\end{cases}$ ……………………………….………. (1p)

Deci: a=1 și b=2 …………………………………………………………………….……..……. (1p)

Obținem $p=1\in\mathbf{N}$…………………………………………………………….…………...… (1p)

Subiectul 3: ***Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = \sqrt{2}cm$ și $BC = \sqrt{3}cm$. Știind că o furnică merge pe suprafața exterioară a paralelipipedului din punctul B până în punctul D', pe un drum de lungime minimă egală cu $\sqrt{11 + 2\sqrt{6}}$ cm, aflați înălțimea paralelipipedului.***

Soluție:

Lungimea minimă este diagonala BD' a dreptunghiului obținut prin desfășurarea laterală a paralelipipedului ……………………………………………………………(2p)

Dreptunghiul va avea dimensiunile $BD = (\sqrt{3} + \sqrt{2})cm$ și $DD' = h$ …..…….. (2p)

Diagonala $BD' = \sqrt{11 + 2\sqrt{6}}\ cm$ ……………………………………………. (2p)

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul BDD' vom obține $h = \sqrt{6}cm$ …... (1p)

Subiectul 4: ***Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ și $M \in (AC)$.***

a) Dacă M este mijlocul lui AC atunci calculați $cos(\sphericalangle(BM, CD))$.

b) Arătați că raportul $\frac{cos(\sphericalangle(BM,CD))}{sin(\sphericalangle(ABM))}$ are aceeași valoare pentru orice $M \in (AC)$.

(GM 11/2022)

Soluție:

a) Considerăm N mijlocul lui AD ……………………………..…..... (1p)

$\sphericalangle(BM, CD) = \sphericalangle(BM, MN) = \sphericalangle(BMN)$ ……………………..…..(1p)

$\cos(\sphericalangle(BM, CD)) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. …………………………………….…..(1p)

b) Construim $MP \parallel CD \Rightarrow \sphericalangle(BM, CD) = \sphericalangle(BM, MP) = \sphericalangle(BMP)$....(1p)

$\cos(\sphericalangle(BMP)) = \frac{\frac{MP}{2}}{BM} = \frac{MP}{2BM}$ ……………………………….…..(1p)

$\sin(\sphericalangle(ABM)) = \frac{AM\sqrt{3}}{2BM}$……………………………………….……(1p)

$\frac{\cos(\sphericalangle(BMP))}{\sin(\sphericalangle(ABM))} = \frac{\sqrt{3}}{3}$…………………………………………..…… (1p)