OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-11 FEBRUARIE 2023

Clasa a XI-a

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1.

a) Fie $A=\begin{pmatrix} lg2 & 0 \\ lg3 & -lg2 \end{pmatrix}$. Calculaţi $A^n, n\geq 1$.

b) Fie $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & lg2 \\ -lg2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculaţi B^{2023}.

Soluţie:

a) $Tr(A)=0$ *și aplicând teorema lui Hamilton – Cayley* $\Rightarrow A^2=-\det A\cdot I_2$.........*1p*

$detA=-lg^2 2;\ A^2=lg^2 2\cdot I_2;\ A^3=lg^2 2\cdot A,\quad A^4=lg^4 2\cdot I_2$...............................*1p*

Demonstraţia prin inducţie matematică: $A^n=\begin{cases} lg^{n-1}2\cdot A, & n\ impar \\ lg^n 2\cdot I_2, & n\ par \end{cases}$, *n*≥ 1..............*1p*

b) $B=I_3+\begin{pmatrix} 0 & 0 & lg2 \\ -lg2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=I_3+lg2\cdot C; C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$................................*1p*

$C^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^3=O_3$..*1p*

$B^n=I_3+nlg2\cdot C+\frac{n(n-1)}{2}lg^2 2\cdot C^2, n\geq 1$...*1p*

$B^{2023}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2023lg2 \\ -2023lg2 & 1 & -2023\cdot 1011lg^2 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$...*1p*

Problema 2. Fie $A,B\in M_2(\boldsymbol{C})$ astfel încât $AB-BA=A^2$. Arătaţi că $\det A=0$.

Soluţie: Presupunem, prin absurd, că detA$\neq 0$ $\Rightarrow$*A inversabilă*..................................*1p*

$AB - BA = A^2 \Rightarrow A^{-1}AB - A^{-1}BA = A^{-1}A^2 \Rightarrow B - A^{-1}BA = A$ *1p*

$Tr(B - A^{-1}BA) = Tr(A) \Rightarrow$*Tr(A)=Tr(B)-Tr(*$A^{-1}BA) = Tr(B) - Tr(B) = 0$................. *1p*

Din relaţia lui Hamilton- Cayley $\Rightarrow A^2 = -detA \cdot I_2 \Rightarrow AB - BA = -detA \cdot I_2$.............*2p*

Tr(AB-BA)=Tr($-detA \cdot I_2) \Rightarrow Tr(AB) - Tr(BA) = Tr(-detA \cdot I_2) \Rightarrow Tr(AB) - Tr(BA) = -2\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$ −*contradicţie* $\Rightarrow presupunerea\ este\ falsă \Rightarrow detA = 0$ *2p*

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, un şir de numere naturale nenule distincte. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n = cos\frac{1}{a_1} + cos\frac{1}{a_2} + \cdots + cos\frac{1}{a_n} - n$ este convergent şi că $\lim_{n\to\infty} x_n \in (-1,0)$.

Soluţie: Fie șirul $x_n = -\sum_{k=1}^{n}\left(1 - cos\frac{1}{a_k}\right) = -2\sum_{k=1}^{n} sin^2\frac{1}{2a_k} < 0$.............................*1p*

$x_{n+1} - x_n = -2sin^2\frac{1}{2a_{n+1}} < 0, n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător(1)*................*1p*

$a_n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2a_n} \leq \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, $n \geq 1$...*1p*

$0 < sinx < x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *şi* $termenii\ lui\ (a_n)_{n\geq 1}\ sunt\ numere\ naturale\ distincte,$

$pentru\ orice\ n \geq 3$ *1p*

$-x_n = 2\sum_{k=1}^{n} sin^2\frac{1}{2a_k} \leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4a_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2} < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-1)k}\right)$....................*1p*

Deci, $x_n > -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{n}\right) > -\frac{7}{8}$ $,\forall n \geq 3\ (2)$...*1p*

Din (1) şi (2) deducem că $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent;* $\lim_{n\to\infty} x_n \in (-1,0)$..................................*1p*

Problema 4. Determinaţi valorile parametrilor reali *a* şi *b* pentru care $\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^8} - \frac{b}{1-x^{12}}\right) = \frac{1}{2}$.

Soluţie:

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^8} - \frac{b}{1-x^{12}}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x^4}\left(\frac{a}{1+x^4} - \frac{b}{1+x^4+x^8}\right)$..*1p*

Dacă $\frac{a}{2} - \frac{b}{3} \neq 0$ *atunci limita ar fi infinită- nu convine*...*1p*

Deci, $\frac{a}{2}-\frac{b}{3}=0 \Leftrightarrow a=\frac{2b}{3}$ *şi limita devine* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{b}{1-x^4}\left[\frac{2}{3(1+x^4)}-\frac{1}{1+x^4+x^8}\right]$*............................2p*

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{b}{1-x^4}\cdot\frac{(1-x^4)(-2x^4-1)}{3(1+x^4)(1+x^4+x^8)}$*..1p*

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{b(-2x^4-1)}{3(1+x^4)(1+x^4+x^8)}=-\frac{b}{6}$ *..1p*

Finalizare $b=-3,\ a=-2$*...1p*