OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-11 FEBRUARIE 2023
Clasa a VII - a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Arătați că $r=\sqrt{ax+b}$ este un număr irațional pentru orice valoare a numărului natural x, unde $a=\left[2023-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2022}{2023}\right)\right]:\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2023}\right)+9$, iar $\frac{b}{\sqrt{2}}$ este egal cu media geometrică a numerelor $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ și $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$a=\left[2023-\left(1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}+\cdots+1-\frac{1}{2023}\right)\right]:\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2023}\right)+9$ $a=\left[2023-\left(1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}+\cdots+1-\frac{1}{2023}\right)\right]:\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2023}\right)+9$ $a=\left[2023-2022+\left(\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2023}\right)\right]:\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2023}\right)+9$ $a=10$	**3p**
$\frac{b}{\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$, deci $b=2$	**2p**
$r=\sqrt{10x+2}\Rightarrow U(r)=2\Rightarrow r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	**2p**

Subiectul 2

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, D mijlocul laturii AC, iar E și F picioarele înălțimilor duse din A pe BC respectiv din C pe AB. Demonstrați că dreapta DE este tangentă cercului circumscris triunghiului BEF.

ΔAEC – dreptunghic în C și D – mijlocul $AC \Rightarrow DE=DC \Rightarrow \widehat{DEC}\equiv\widehat{DCE}$	**1p**
Notând $\{H\}= AE\cap CF \Rightarrow BH\perp AC$, cu $BH\cap AC=\{M\}$	**1p**
Cum $m(\widehat{HEB})=m(\widehat{HFB})=90^0 \Rightarrow B,E,H,F\in\mathcal{C}(O,OB)$, unde O este mijlocul lui BC, deci ΔBOE – isoscel, cu $\widehat{BEO}\equiv\widehat{OBE}$	**2p**

Din ΔBMC – dreptunghic în M avem $m(\widehat{MCB}) + m(\widehat{MBC}) = 90^0$ și, cum $\widehat{MCB} \equiv \widehat{DEC}$, iar $\widehat{MBC} \equiv \widehat{OEB} \Rightarrow m(\widehat{DEO}) = 90^0$. Finalizare	**3p**

Subiectul 3

Determinați numărul perechilor (x, y), cu $x, y \in \mathbb{N}$, care sunt soluții ale ecuației:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2023}.$$

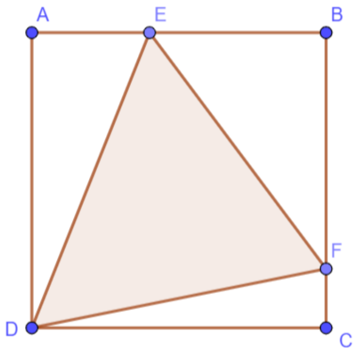
$\sqrt{x} = \sqrt{2023} - \sqrt{y} \Rightarrow x = 2023 - 2\sqrt{2023y} + y$	**2p**
Deoarece $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2023y} \in \mathbb{N}$ și, cum $2023 = 7 \cdot 17^2$, deducem $y = 7k^2$, cu $k \in \mathbb{N}$.	**2p**
În mod analog obținem $x = 7l^2$, cu $l \in \mathbb{N}$, ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2023}$ devenind $l\sqrt{7} + k\sqrt{7} = \sqrt{2023} = 17\sqrt{7}$, deci	**2p**
$l + k = 17$, adică sunt18 perechi $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ soluții ale ecuației	**1p**

Subiectul 4

Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele E, respectiv F astfel încât $\frac{AE}{BE} = \frac{2}{3}$, iar $BF = 4FC$

a) Arătați că $EF = AB$.

b) Cunoscând că aria triunghiului FEB este de $46cm^2$, aflați distanța de la punctul D la dreapta EF

a) Notând $AB = 5x$ avem $BE = 3x$, $BF = 4x$, de unde $EF = 5x = AB$	**2p**
b) Cu notațiile de mai sus obținem, $A_{BEF} = 6x^2$, de unde deducem $A_{BEF} = 46\ cm^2, deci\ 6x^2 = 46cm^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{69}}{3} cm$	**3p**
Finalizare d(D, EF)=$\frac{23\sqrt{69}}{15}$ 	**2p**