OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-11 februarie 2023
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Fie $a \in (1,4)$. Să se calculeze:

$$I=\int_1^a \frac{lnx}{x^2-ax+a}dx$$

Soluție:

Fie $x=\frac{a}{t}; dx=-\frac{a}{t^2}dt$	2p
$$I=\int_1^a \frac{lnx}{x^2-ax+a}dx=\int_a^1 \frac{lna-lnt}{\frac{a^2}{t^2}-\frac{a^2}{t}+a}\cdot\left(-\frac{a}{t^2}\right)dt=\int_1^a \frac{lna-lnt}{a-at+t^2}dt$$ $$=lna\int_1^a \frac{1}{t^2-at+a}dt-I \Rightarrow 2I=lna\int_1^a \frac{1}{t^2-at+a}dt$$	2p
$$I=\frac{lna}{2}\int_1^a \frac{1}{\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{4a-a^2}{4}}dt=$$	1p
$$=\frac{lna}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4a-a^2}}\cdot\left(arctg\frac{2a-a}{\sqrt{4a-a^2}}-arctg\frac{2-a}{\sqrt{4a-a^2}}\right)$$	1p
$$=\frac{lna}{\sqrt{4a-a^2}}\cdot\left(arctg\frac{2a-a}{\sqrt{4a-a^2}}-arctg\frac{2-a}{\sqrt{4a-a^2}}\right)$$	1p

Subiectul 2.

Să se calculeze:

$$I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{xarctgx}{1+e^{tgx}}dx$$

Soluție:

$$I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{xarctgx}{1+e^{tgx}}dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{-xarctg(-x)}{1+e^{tg(-x)}}dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{(xarctgx)e^{tgx}}{1+e^{tgx}}dx=$$	2p 2p

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{(1+e^{tgx}-1)xarctgx}{1+e^{tgx}}dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} xarctgxdx - I$ $2I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} xarctgxdx = 2\int_{0}^{\sqrt{3}} xarctgxdx$ $I = \int_{0}^{\sqrt{3}} xarctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx\Big\|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$ $= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	3p

Subiectul 3.

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea: $x^2 = e, \forall x \in G$. Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

***Soluție*:**

$x, y \in G \Rightarrow xy \in G \Rightarrow (xy)^2 = e$	2p
$x, y \in G \Rightarrow x^2 = e;\ y^2 = e$	2p
$e \cdot e = e \Rightarrow (xy)^2 = x^2y^2 \Rightarrow xyxy = xxyy \Rightarrow yxy = xyy \Rightarrow xy = yx$	3p

Subiectul 4.

Fie $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ definim $f_t : E \to E;\ f_t(x,y) = \left(x + ty + \frac{t^2}{2}; y + t\right);\ \forall (x,y) \in E$. Să se arate că $G = \{f_t \ /\ t \in \mathbb{R}\}$ este grup comutativ izomorf cu grupul comutativ $(\mathbb{R}, +)$.

***Soluție*:**

$f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'};\ f_0 = 1_E;\ f'_t = f_{-t}$	3p
Fie $F: G \to \mathbb{R}; F(f_t) = t; F$ −bijectivă.	2p
$F(f_{t+t'}) = t + t' = F(f_t) + F(f_{t'})$	2p