OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-11 FEBRUARIE 2023
Clasa a VI - a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Știind că $\frac{3}{x+3}+\frac{4}{y+4}+\frac{5}{z+5}=\frac{1}{3}$, calculați $\frac{x}{x+3}+\frac{y}{y+4}+\frac{z}{z+5}$.

Soluție:

$$\frac{x}{x+3}+\frac{y}{y+4}+\frac{z}{z+5}=\frac{x+3-3}{x+3}+\frac{y+4-4}{y+4}+\frac{z+5-5}{z+5}\quad (\boldsymbol{2p})$$

$$=1-\frac{3}{x+3}+1-\frac{4}{y+4}+1-\frac{5}{z+5}\quad (\mathbf{2p})$$

$$=3-\left(\frac{3}{x+3}+\frac{4}{y+4}+\frac{5}{z+5}\right)\quad (\boldsymbol{2p})$$

$$=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\quad (\boldsymbol{1p})$$

Subiectul 2

Se consideră numărul A= $3+3^2+3^3+\cdots+3^{2022}$.

a) Arătați că A se divide cu 156.

b) Determinați numărul perechilor (p, n) de numere naturale pentru care

$p^n=2\cdot A+3.$

Soluție:

a) $A=3+3^2+3^3+\cdots+3^{2022}$

$156=2^2\cdot 3\cdot 13\ \ (\boldsymbol{1p})$

Grupăm câte trei termeni:

$A=(3+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6)+\cdots+(3^{2020}+3^{2021}+3^{2022})$

$A=39+3^3\cdot 39+\cdots+3^{2019}\cdot 39$

$A=39(1+3^3+\cdots+3^{2019})\ \vdots\ 39\quad (\boldsymbol{1p})$

Grupăm câte doi termeni:

$A = (3 + 3^2) + (3^3 + 3^4) + \cdots + (3^{2021} + 3^{2022})$
$A = 3 \cdot 4 + 3^3 \cdot 4 + \cdots + 3^{2021} \cdot 4$

$A = 4 \cdot (3 + 3^3 + \cdots + 3^{2021}) \ \vdots\ 4 \quad (\mathbf{1p})$

$A \ \vdots\ 4,\ A \ \vdots\ 39$ și $(4, 39) = 1 \Rightarrow A \ \vdots\ 4 \cdot 39 \Rightarrow A \ \vdots\ 156 \quad (\mathbf{1p})$

b) $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2022}$

$A = \dfrac{3^{2023} - 3}{2} \quad (\mathbf{1p})$

$2A + 3 = 3^{2023} = 3^{7 \cdot 17 \cdot 17} \quad (\mathbf{1p})$

$p^n = 3^{2023} \Rightarrow$

$(p, n) \in \{(3, 2023), (3^7, 289), (3^{119}, 17), (3^{289}, 7), (3^{17}, 119), (3^{2023}, 1)\} \quad (\mathbf{1p})$

Subiectul 3

Determinați măsurile a două unghiuri <MON și <NOP neadiacente suplementare, știind că bisectoarele lor formează un unghi cu măsura $\overline{ab}$, unde a și b sunt două numere prime care verifică relația: 17·a + 15·b = 79.

***Soluție*:**

17·a + 15·b = 79, a și b sunt numere prime și 79 număr impar => unul dintre cei doi termeni este număr par **(1p)**
a = 2 și b = 3 **(1p)**

Vom nota m (<MON) = m și m (<NOP) = n => m + n = 180^0 **(1p)**

Unghiul format de bisectoarele celor două unghiuri neadiacente are măsura:

(m - n) **:** 2 = $\overline{ab}$ => (m - n) **:** 2 = 23 **(2p)**

m – n = 46^0 și m + n = 180^0 => m = 113^0 și n = 67^0 =>

m (<MON) = 113^0 și m (<NOP) = 67^0 **(2p)**

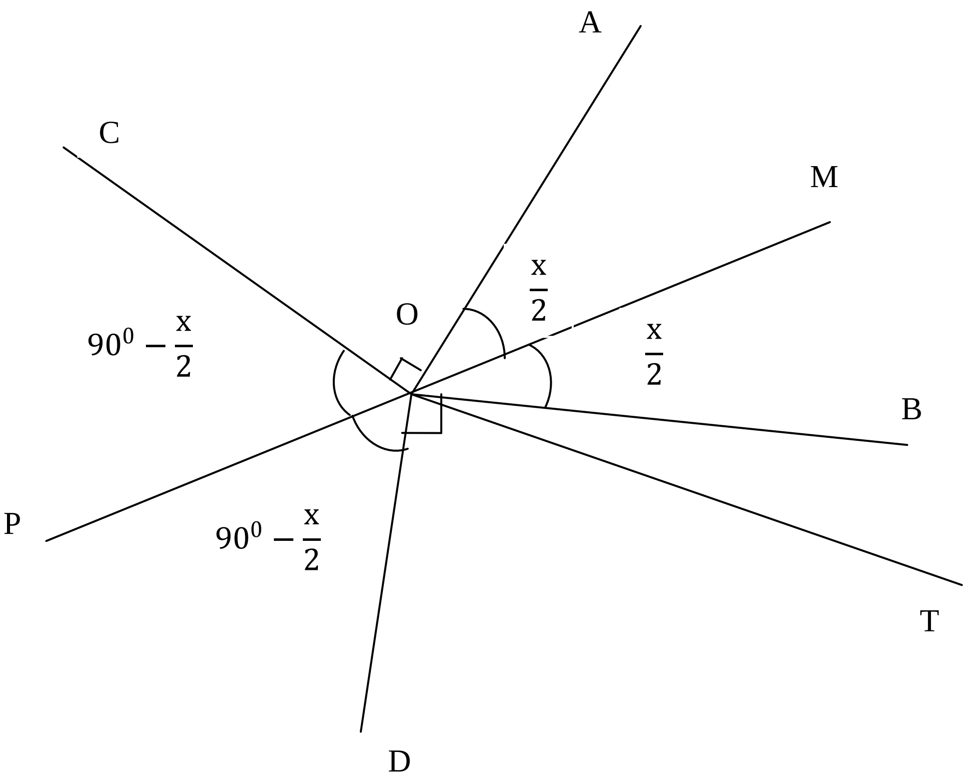
Subiectul 4

Fie unghiul ascuțit <AOB și semidreptele [OC și [OD perpendiculare pe laturile [OA, respectiv [OB, iar interioarele <AOC și <BOD să fie mulțimi disjuncte .

a) Dacă [OM, [OP sunt bisectoarele unghiurilor <AOB, respectiv <COD, arătați că punctele P, O, M sunt coliniare.

b) Dacă [OT este bisectoarea <AOD, să se arate că măsura <POT este constantă, indiferent de măsura < AOB.

Soluție:



(1p)

a) m(<AOB) = x ; 0^0<x<90^0

m(<AOC)=90^0; m (<BOD)=90^0 } => m(<COD) = 180^0 - x **(1p)**

[OM = bisectoarea <AOB => m(<AOM) = m(MOB) = $\frac{x}{2}$

[OP = bisectoarea <COD => m(<COP) = m(<POD)=90^0 - $\frac{x}{2}$ } **(1p)**

m(<POM) = m(<BOM)+m(<DOB)+m(<POD) = $\frac{x}{2}$ +90^0+90^0- $\frac{x}{2}$=180^0

=> P,O,M =coliniare **(1p)**

b) [OT = bisectoarea <AOD => m(<AOT) = m(<TOD) = $\frac{90^0+x}{2}$ **(1p)**

m(<POT) = m(<POD) +m(<DOT) = 90^0 - $\frac{x}{2}$ + 45^0 + $\frac{x}{2}$ = 135^0 = constantă **(2p)**