OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-11 FEBRUARIE 2023

Clasa a X-a

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Subiectul 1

Reprezentați în planul complex mulțimea punctelor de afix z pentru care $|z-1|=|z-2|$ și $|z-1-i|\le 2$.

Soluție:

Afixe $M(z), A(1), B(2), C(1+i)$ 1p

$MA=MB, MC\le 2$ 2p

Punctul M se află pe mediatoarea d a segmentului $[AB]$ 1p

Punctul M se află pe discul de centru C și rază 2 ....1p

Dreapta d intersectează discul în punctele P și Q

Reprezentarea coardei $[PQ]$ 2p

Subiectul 2

Se consideră funcțiile $f:(0,1)\to(2,\infty), f(x)=x+\frac{1}{x}$ și $g:(0,1)\to(4,\infty), g(x)=x+\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}$. Admitem că funcția g este bijectivă.

a) Să se arate că funcția f este bijectivă.

b) Să se calculeze $g^{-1}(\frac{34}{3})$.

Soluție:

a)injectivitate: $f(x_1)=f(x_2), x_1, x_2 \in (0,1)$ conduce la $(x_1-x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2})=0 \Rightarrow x_1=x_2$ 2p

surjectivitate: ecuația $f(x)=y\in(2,\infty)$ conduce la $x=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}\in(0,1)$ 2p

b)Avem $g(x)=\frac{34}{3}$,cu $x\in(0,1)$ și $g(\frac{1}{3})=\frac{34}{3}$ 2p

Atunci $g^{-1}(\frac{34}{3})=\frac{1}{3}$ 1p

Subiectul 3.

Dacă numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{1000} \in \mathbb{N}^*$ au proprietatea că $\frac{1}{\sqrt[3]{a_1^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{a_2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{a_3^2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{a_{1000}^2}}=30$, demonstrați că cel puțin două din cele 1000 de numere sunt egale.

Soluție:

$a_i\neq a_j, \forall i, j$ implică $k\le a_k, \ \forall k\in\{1,2,\ldots\ldots,1000\}$ 2p

$M_s\le\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}}=S$ 1p

Din inegalitatea mediilor $3n-1>3\sqrt[3]{n^2(n-1)}\Rightarrow 3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})>\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}, \ n\ge 1$

.......................2p

$S<3\left[(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{0})+(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1})+\ldots\ldots+(\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{999})\right]=30,$ fals...................................2p

Subiectul 4

a) Să se arate că $x+\frac{4}{x}\le 5$, pentru orice $x\in[1,4]$.

b) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, $a>1$ și numerele $x_1,x_2,.....,x_n\in[a,a^4]$. Să se arate că:

$$n^2\le(\log_a x_1+\log_a x_2+........+\log_a x_n)(\log_{x_1}a+\log_{x_2}a+.......+\log_{x_n}a)\le\frac{25n^2}{16}$$

Soluție*:*

a) $x\in[1,4]\Rightarrow(x-1)(x-4)\le 0\Rightarrow x^2-5x+4\le 0$

Finalizare..2p

b) $\log_a x_i+4\log_{x_i}a\le 5$,sumare...1p

$S=\sum_{i=1}^{n}\log_a x_i$; $T=\sum_{i=1}^{n}\log_{x_i}a$ și $S\cdot T\ge n^2\cdot$ cu inegalitatea mediilor.......................2p

$4\sqrt{S\cdot T}\le S+4T\le 5n\Rightarrow S\cdot T\le\frac{25n^2}{16}$ 2p