Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapa locală – Iași, 10 februarie 2023

Clasa a XII-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1.

a) Arătați că funcțiile $F,G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=arctgx$ și $G(x)=-arctg\frac{1}{x}$ sunt primitive ale aceleași funcții.

b) Calculați $\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{(x\ln x)^{2023}}{(x^2+x+1)^{2024}}\cdot\cos(2024arctgx)\,dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $F'(x)=G'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ **2p**

b) Din a) $\Rightarrow arctx+arctg\frac{1}{x}=\text{constant}=c$.

Pentru $x=1\Rightarrow 2arctg1=\frac{\pi}{2}=c\Rightarrow arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-arctgx$ ……...**1p**

Facem schimbarea de variabilă $y=\frac{1}{x}, dx=-\frac{1}{y^2}dy$ ……..**1p**

Se obține

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{(x\ln x)^{2023}}{(x^2+x+1)^{2024}}\cdot\cos(2024arctgx)\,dx=\int_{n}^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{1}{y^{2023}}\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{2023}}{\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}+1\right)^{2024}}\cdot\cos\left[2024\left(\frac{\pi}{2}-arctgy\right)\right]\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\ldots\textbf{1p}$$

$$=-\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{(\ln y)^{2023}}{y^{2023}\cdot\frac{1}{y^{4048}}\cdot(1+y+y^2)^{2024}}\cdot\frac{1}{y^2}\cdot\cos(1012\pi-2024arctgy)\,dy=\ \ldots\ldots\textbf{1p}$$

$$=-\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{y^{2023}\cdot(\ln y)^{2023}}{(1+y+y^2)^{2024}}\cdot\cos(2024arctgy)\,dy=-I\Rightarrow I=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{1p}$$

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 2. Considerăm grupurile $((0,\infty),\cdot)$ și $((-3,3),*)$, unde legea "*" este definită prin $a*b=\dfrac{9(a+b)}{9+ab}, \forall a,b\in(-3,3)$.

a) Determinați $n\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f(x)=\dfrac{x+n}{3-x}, f:((-3,3),*)\to((0,\infty),\cdot)$ să fie izomorfism de grupuri.

b) Rezolvați ecuația $x*x*x*x*x=2$.

Soluție:

a) f izomorfism $\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow n=3$ **1p**

Funcția $f(x)=\dfrac{x+3}{3-x}, f:(-3,3)\to(0,\infty)$ izomorfism **2p**

b) $x*x*x*x*x=2\Leftrightarrow f(x*x*x*x*x)=f(2)\Leftrightarrow f^5(x)=5$ **2p**

Se obține $f(x)=\sqrt[5]{5}$ **1p**

Deci $x=f^{-1}\left(\sqrt[5]{5}\right)$ și finalizează **1p**

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că dintre orice trei elemente ale sale există două care comută. Arătați că $(G,\cdot)$ este comutativ.

Soluție: Presupunem că G nu este comutativ $\Rightarrow$ există $x,y\in G,\ xy\neq yx$ **1p**

Demonstrează că $x\neq y\neq xy\neq x$ **2p**

Mulțimea $\{x,y,xy\}$ nu respectă condiția din ipoteză (dintre orice trei elemente există două care comută) **3p**

Concluzia **1p**

Problema 4. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+3}dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $(n+3)I_{n+1}+3nI_{n-1}=8,\ \forall n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_n)$.

Soluție:

a) $I_1=\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3\Big|_0^1=\frac{8}{3}-\sqrt{3}$ **1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

b) $3I_{n+1}=\int_0^1 x^n\cdot 3x\sqrt{x^2+3}dx=\int_0^1 x^n\cdot\left(\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3\right)'dx=x^n\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3\Big|_0^1-\int_0^1 nx^{n-1}\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}dx$ ….. **1p**

$3I_{n+1}=8-n\int_0^1\left(x^{n+1}+3x^{n-1}\right)\sqrt{x^2+3}dx$ …… **1p**

Se obține $3I_{n+1}=8-nI_{n+1}-3nI_{n-1}\Leftrightarrow\left(n+3\right)I_{n+1}+3nI_{n-1}=8,\ \forall n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$ **1p**

c) $\left(n+1\right)I_n=2-\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2+3}}dx$ (integrand prin părți) …… **1p**

Notăm $J_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2+3}}dx$. Se obține $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0=\lim\limits_{n\to\infty}J_n$ ……**1p**

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n\right)=2$ …….. **1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro