INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA
Str.Lacului, Nr.19, Slobozia, Ialomiţa, Tel.0243/231825,Fax:0243/23663
e-mail:secretariat@isjialomita.ro, web: http://www.isjialomita.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

-faza locală-

11 februarie 2023

CLASA a V-A

Subiecte:

1. a) Aflați câte numere naturale cuprinse între 223 și 2023 sunt divizibile cu 210.
   b) Determinați suma tuturor numerelor naturale cuprinse între 223 și 2023 care împărțite la 30 dau restul 7 și împărțite la 42 dau restul 19.

2. a) Determinați numărul natural n astfel încât $5^{n+1} + 2 \cdot 5^n + 3125 = 4000$.
   b) Aflați ultimile 4 cifre ale numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2022 \cdot 2023 + 2023$

3. Aflați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ formate din cifrele distincte și nenule a, b, c cu $b = a + c$ și $a + b + c = 10$, știind că $\overline{abc}^{\overline{abc}}$ ($\overline{abc}$ la puterea $\overline{abc}$) se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.

4. Considerăm șirul de numere naturale $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$

a) Formulați o regulă de alcătuire a termenilor șirului, astfel încât al 100-lea termen al șirului să fie 10100.

b) Cu câte zerouri se termină produsul primilor 100 de termeni ai șirului în acest caz?

(G.M., Traian Preda, București)

Timp de lucru 150 minute

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 11 februarie 2023

Barem de corectare și notare

1.	***a) Aflați câte numere naturale cuprinse între 223 și 2023 sunt divizibile cu 210.***	
	Identificarea multiplilor: primul multiplu $420 = 2 \cdot 210$, ultimul $1890 = 9 \cdot 210$	1p
	Metoda de numărare a multiplilor: (9-2+1)	1p
	Finalizare: 8 numere	1p
	b) Determinați suma tuturor numerelor naturale cuprinse între 223 și 2023 care împărțite la 30 dau restul 7 și împărțite la 42 dau restul 19.	
	Teorema împărțirii cu rest: $n = 30 \cdot c_1 + 7$, $n = 42 \cdot c_2 + 19$ $n + 23 = M_{30}$, $n + 23 = M_{42}$	1p
	Identificarea celui mai mic multiplu comun $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$	1p
	Aflarea numerelor: $n + 23 \in \{420, 630, \dots, 1890\} \xrightarrow{-23} n \in \{397,\ 607, \dots, 1867\}$	1p
	Suma este 9056	1p
2.	***a) Determinați numărul natural n astfel încât $\mathbf{5^{n+1} + 2 \cdot 5^n + 3125 = 4000}$.***	
	$5^{n+1} + 2 \cdot 5^n + 3125 = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^n + 3125 = 4000$	1p
	$5^n(5 + 2) + 3125 = 4000$	1p
	$7 \cdot 5^n = 875$	1p
	$5^n = 125 \Rightarrow n = 3$	1p
	b) Aflați ultimile 4 cifre ale numărului $\mathbf{A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2022 \cdot 2023 + 2023}$	
	$U_4(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2022 \cdot 2023) = 0000$	1p
	Motivarea zerourilor	1p
	$U_4(A) = 2023$	1p
3.	***Aflați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ formate din cifrele distincte și nenule a, b, c cu $b = a + c$ și $a + b + c = 10$, știind că $\overline{abc}^{\overline{abc}}$ ($\overline{abc}$ la puterea $\overline{abc}$) se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.***	
	Numerele de forma $\overline{abc}$, în condițiile date sunt 154, 253, 352, 451	1p
	Avem $352 = 1^3 + 2^3 + 7^3$	1p
	Celelalte numere, 154, 253, 451, nu se pot scrie ca sumă de trei cuburi	1p
	$352^{352} = 352 \cdot 352^{351}$	1p
	$(1^3 + 2^3 + 7^3) \cdot (352^{117})^3$	1p
	$(1 \cdot 352^{117})^3 + (2 \cdot 352^{117})^3 + (7 \cdot 352^{117})^3$	1p
	Deci, $\overline{abc} = 352$ unic	1p

4.	***Considerăm șirul de numere naturale $\mathbf{2, 6, 12, 20, 30, \ldots}$*** ***a)Formulați o regulă de alcătuire a termenilor șirului, astfel încât al 100-lea termen al șirului să fie 10100.***	
	$T_1 = 1 \cdot 2, T_2 = 2 \cdot 3, T_3 = 3 \cdot 4, T_4 = 4 \cdot 5, T_5 = 5 \cdot 6, \ldots, T_{100} = 100 \cdot 101 = 10100$	1p
	Regula de alcătuire a termenilor șirului este $T_k = k \cdot (k+1), k \in N^*$	1p
	b)Cu câte zerouri se termină produsul primilor 100 de termeni ai șirului în acest caz?	
	Dacă notăm cu $p = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot \ldots \cdot T_{100}$, atunci numărul de zerouri cu care se termină p este egal cu valoarea maximă a lui n pentru care $10^n \mid p \leftrightarrow (2 \cdot 5)^n \mid p \leftrightarrow 2^n \cdot 5^n \mid p$	1p
	Întrucât numărul factorilor care se divid cu 5 este mai mic decât numărul factorilor care se divid cu 2, problema revine la a afla n-maxim pentru care $5^n \mid p$	1p
	Sunt 40 factorii divizibili cu 5, $T_4, T_5, T_9, T_{10}, T_{14}, T_{15}, \ldots, T_{99}, T_{100}$, adică $5^{40} \mid p$	1p
	Dintre factorii de mai sus, 8 se divid cu $25 = 5^2$ $(T_{24}, T_{25}, T_{49}, T_{50}, T_{74}, T_{75}, T_{99}, T_{100})$	1p
	Valoarea maximă a lui n pentru care $5^n \mid p$ este 48, adică p se termină în 48 zerouri.	1p