INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA
Str.Lacului, Nr.19, Slobozia, Ialomiţa, Tel.0243/231825,Fax:0243/23663
e-mail:secretariat@isjialomita.ro, web: http://www.isjialomita.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

Clasa a VII-a

11.02.2023

1. a) Demonstrați că numărul n = $\sqrt{2+(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}$ este un număr natural.

b) Rezolvați în R ecuația:

$$\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+3}{5}+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x+2023}{2025} = 2023.$$

2. Demonstrați că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\sqrt{2022\cdot 2023}}{4045} < 1011$.

3. În dreptunghiul ABCD, punctul E este mijlocul laturii (BC), iar punctul F este mijlocul laturii (AD). Știind că AC ∩ BF = {M} și AC ∩ DE = {N}, demonstrați că:

a) [AM] ≡ [MN] ≡ [NC];

b) patrulaterul MENF este paralelogram.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu [AB] ≡ [AC]. Fie D mijlocul laturii (BC), M mijlocul segmentului (AD), N piciorul perpendicularei din D pe BM și E simetricul punctului B față de punctul M. Demonstrați că m(<ANC) = 90^0.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Nu se acordă punctaj din oficiu.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a VII-a

1.	**a)** $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$ Obs. Se va acorda punctajul indiferent de metoda folosită: formula radicalilor dubli sau pătratul unui binom.	**1p**
	$\sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \sqrt{6-2\left(\sqrt{3}+1\right)} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$	**1p**
	$\sqrt{2+\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{2+3-1} = \sqrt{4} = 2 \in N$	**1p**
	b) $\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+3}{5}+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x+2023}{2025} = 2023.$ Suma conține 2023 de fracții. 2023 = 1 + 1 + 1+.........+1 . $\left(\frac{x+1}{3}-1\right) + \left(\frac{x+2}{4}-1\right) + \left(\frac{x+3}{5}-1\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{x+2023}{2025}-1\right) = 0$	**1p**
	$\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{4}+\frac{x-2}{5}+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x-2}{2025} = 0$	**1p**
	$(x-2)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2025}\right) = 0$	**1p**
	Cum toți termenii sunt pozitivi din paranteză, rezultă factorul $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2025}\right) > 0$, deci diferit de zero Produsul va fie egal cu zero dacă x-2 = 0, deci x = 2	**1p**
2.	Folosim inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, unde a și b sunt numere reale pozitive.	**1p**

	În cazul nostru vom avea $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ pentru că a și b sunt diferite;	
	$\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{1\cdot 2} < \frac{1}{3}\cdot\frac{1+2}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$	**1p**
	$\frac{\sqrt{6}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{2\cdot 3} < \frac{1}{5}\cdot\frac{2+3}{2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$	**1p**
	$\frac{\sqrt{12}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{3\cdot 4} < \frac{1}{7}\cdot\frac{3+4}{2} = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{2} = \frac{1}{2}$	**1p**
	$\frac{\sqrt{2022\cdot 2023}}{4045} = \frac{1}{4045}\sqrt{2022\cdot 2023} < \frac{1}{4045}\cdot\frac{2022+2023}{2} = \frac{1}{4045}\cdot\frac{4045}{2} = \frac{1}{2}$	**1p**
	Obs. că numărătorii sunt de forma: 1·2, 2·3, 3·4,........, 2022·2023, deci suma conține 2022 de fracții: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2022 = 1011$	**1p**
	Deci, $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\sqrt{2022\cdot 2023}}{4045} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2022 = 1011$ $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\sqrt{2022\cdot 2023}}{4045} < 1011$	**1p**
3.	**a)** Fie AC ∩ BD = { O }. Cum ABCD este dreptunghi, diagonalele se înjumătățesc și sunt egale, deci O este mijlocul lui (BD) și al lui (AC), AO = CO = BO = DO Dar, F este mijlocul lui (AD), rezultă că AO și BF sunt mediane în triunghiul ABD.	**1p**
	AO ∩ BF = { M }, deci M este centrul de greutate al triunghiului ABD MO = 1/3AO, AM = 2/3AO	**1p**
	Analog, N este centrul de greutate al triunghiului BCD; NO= 1/3CO =1/3AO , CN= 2/3CO= 2/3AO	**1p**
	MN= MO + NO =1/3AO + 1/3CO =1/3AO + 1/3AO = 2/3AO Deci, [AM] ≡ [MN] ≡ [NC];	**1p**
	b) Cum F este mijlocul lui (AD), O este mijlocul lui (BD), rezultă că (FO) este linie mijlocie în triunghiul ABD, deci FO = AB/2	**1p**
	Cum E este mijlocul lui (BC), O este mijlocul lui (AC), rezultă că EO este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci EO = AB/2	**1p**
	Deci, FO=EO=AB/2 Din a) avem că MO = NO = 1/3AO	**1p**

	Rezultă că în patrulaterul MENF diagonalele se înjumătățesc, deci, MENF este paralelogram.	
4.	Triunghiul ABC este isoscel, AB=AC, D este mijlocul lui BC, BD = DC rezultă că AD este mediană și înălțime, deci m(<ADB) = m(<ADC) =90^0	**1p**
	M este mijlocul lui AD E este simetricul lui B față de M, deci, M este mijloc pentru (AD) și pentru (BE), adică BDEA este paralelogram	**1p**
	Rezultă că AB = DE și AE = BD = DC și AE este paralelă cu BD, punctele B, D, C sunt coliniare, adică AE este paralelă cu BC, AE este paralelă cu DC	**1p**
	Dar, AB=AC, de unde rezultă că DE=AC AE=BD=DC , AE este paralelă cu DC Rezultă că ADCE este paralelogram cu diagonalele egale Deci, ADCE va fi dreptunghi Notăm AC ∩ DE = { O }, O este mijloc pentru AC și DE Obs. Se va acorda punctajul dacă se demonstrează că DE=AC, chiar fără să demonstreze că ADCE este dreptunghi!	**1p**
	Cum DN este perpendiculară pe BM, punctele B, N, M, E sunt coliniare, deducem că DN este perpendiculară pe NE, adică triunghiul DNE este dreptunghic și cum O este mijloc pentru DE, obținem că NO este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci NO=DE/2 (teorema medianei).	**2p**
	Dar DE=AC, rezultă că NO=DE/2= AC/2 O este mijloc pentru (AC), NO este mediană în triunghiul ANC adică triunghiul ANC va fi dreptunghic (din reciproca teoremei medianei) și deci, m(<ANC) = 90^0 .	**1p**