OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

-faza locală-

11 februarie 2023

CLASA a VIII-A

Problema 1

Se consider numărul $p = \frac{\sqrt{n}+7\sqrt{2}}{\sqrt{n}-3\sqrt{2}}$, $n \in N - \{18\}$.

a) Verificați dacă pentru *n* = 128, numărul *p* este natural; (2p)

b) Aflați valorile numărului *n*, pentru care *p* este număr întreg. (5p)

Problema 2

Fie *n* un număr întreg și $16x^2y^2 + 4x^2 + 9y^2 + 2z^2 + n = 8xy + 4xz + 6yz$.

a) Pentru $n = -8$ *și* $xy = 0$, aflați numerele întregi x, y *și* z; (4p)

b) Pentru $n = 1$, aflați valorile reale ale numerelor x, y *și* z. (3p)

Problema 3

Pe planul paralelogramului $ABCD$, în care punctul O este intersecțiea diagonalelor, se ridică perpendiculara $VO = 5\sqrt{13}\,cm$. Laturile AB și AD au $25\,cm$, respective $15\,cm$, punctele M și N sunt mijloacele lor, unghiul A este ascuțit și are sinusul $\frac{4}{5}$, iar punctul P este piciorul perpendicularei din O pe dreapta VA.

a) Calculați aria triunghiului CMN; (3p)

b) Aflați distanța de la punctul V la planul (MNP). (4p)

Problema 4 Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 10\,cm$,

a) Dacă punctul M este mijlocul muchiei AA', punctul N este situat pe muchia DD' așa încât $5 \cdot ND' = 2 \cdot DD'$, punctul P este situat pe muchia BB' așa încât $4 \cdot BP = B'P$, iar punctul Q este intersecția planului (MNP) cu muchia CC', aflați CQ. (3p)

b) Arătați că punctul O, mijlocul diagonalei BD' și punctele E *și* F, centrele de greutate ale triunghiurilor $A'BD$ și $B'CD'$, sunt coliniare. (4p)

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru : 3 ore. 7 puncte fiecare subiect.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA
Str.Lacului, Nr.19, Slobozia, Ialomiţa, Tel.0243/231825,Fax:0243/23663
e-mail:secretariat@isjialomita.ro, web: http://www.isjialomita.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

-faza locală-

11. 02. 2023

CLASA a VIII-a - SOLUȚII ȘI BAREM DE EVALUARE

Problema 1

Se consider numărul $p=\frac{\sqrt{n}+7\sqrt{2}}{\sqrt{n}-3\sqrt{2}}$, $n\in N-\{18\}$.

a) Verificați dacă pentru *n* = 128, numărul *p* este natural; (2p)
b) Aflați valorile numărului *n*, pentru care *p* este număr întreg. (5p)

a	$p=\frac{8\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{8\sqrt{2}-3\sqrt{2}}$	1p
	$p=3\in N$	1p
b	$p=\frac{n+10\sqrt{2n}+42}{n-18}\in Z$	1p
	$n=2k^2, k\in N$	1p
	$p=\frac{k^2+10k+21}{k^2-9}$	1p
	$p=\frac{(k+3)(k+7)}{(k+3)(k-3)}=1+\frac{10}{k-3}$	1p
	$k\in\{1,2,4,5;\ 8;\ 13\};\ \ n\in\{2;\ 8;\ 32;\ 50;\ 128;\ 338\}$	1p

Problema 2

Fie *n* un număr întreg și $16x^2y^2+4x^2+9y^2+2z^2+n=8xy+4xz+6yz$.

a) Pentru $n=-8$ și $xy=0$, aflați numerele întregi x, y și z; (4p)
b) Pentru $n=1$, aflați valorile reale ale numerelor x, y și z. (3p)

a	Pentru $x=0$, avem $(3y-z)^2+z^2=8$ și	1p
	soluțiile (0; 0; 2), (0; 0; -2)	1p
	Pentru y=o, avem $(2x-z)^2+z^2=8$ și	1p
	Alte soluții (2; 0; 2), (-2; 0; -2)	1p
b	$(4xy-1)^2+(2x-z)^2+(3y-z)^2=0$	1p

	$z^2 = \frac{3}{2}$	1p
	Soluțiile $(\frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{2})$; $(-\frac{\sqrt{6}}{4}; -\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2})$	1p

Problema 3

Pe planul paralelogramului $ABCD$, în care punctul O este intersecțiea diagonalelor, se ridică perpendiculara $VO = 5\sqrt{13}\,cm$. Laturile AB și AD au $25\,cm$, respective $15\,cm$, punctele M și N sunt mijloacele lor, unghiul A este ascuțit și are sinusul $\frac{4}{5}$, iar punctul P este piciorul perpendicularei din O pe dreapta VA.

a) Calculați aria triunghiului CMN; (3p)

b) Aflați distanța de la punctul V la planul (MNP). (4p)

a	$A_{ABCD} = 300\ cm^2$	1p
	$A_{AMN} = \frac{300}{8}\ cm^2$ și $A_{MBC} = A_{NDC} = \frac{300}{4}\ cm^2$	1p
	$A_{CMN} = 112{,}5\ cm^2$	1p
b	Arată că $AD \perp BD$	1p
	Arată că (MNP) // (VBD)	1p
	Arată că $AD \perp (VBD)$; $AD \perp (MNP)$	1p
	d(V; (MNP)) = d(D; (MNP)) = DN = 7,5 cm^2	1p

Problema 4

Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 10\,cm$,

a) Dacă punctul M este mijlocul muchiei AA', punctul N este situat pe muchia DD' așa încât $5 \cdot ND' = 2 \cdot DD'$, punctul P este situat pe muchia BB' așa încât $4 \cdot BP = B'P$, iar punctul Q este intersecția planului (MNP) cu muchia CC', aflați CQ. (3p)

b) Arătați că punctul O, mijlocul diagonalei BD' și punctele E și F, centrele de greutate ale triunghiurilor $A'BD$ și $B'CD'$ sunt coliniare. (4p)

a	Arată că MNQP este paralelogram	1p
	Arată că trapezele MACQ și NDBP au aceeași linie mijlocie	1p
	MA+CQ=DN+BP; 5+CQ = 6+2; CQ =3 *cm*	1p

b	Arată că $AE \perp (A'BD),\ C'E \perp (A'BD),\ deci\ E \in AC'$	2p
	Analog, $AF \perp (B'CD'),\ C'F \perp (B'CD'),\ deci\ F \in AC'$	1p
	ABC´D´ este dreptunghi, deci O este mijlocul diagonalei AC´. F; O; E coliniare	1p