Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală – 25 februarie 2023 –

Clasa a VI-a

Barem de notare

1. Se consideră mulțimea $A = \{2^n - n - 1 | n \in \mathbb{N}, n \leq 100\}$

a) Să se afle numărul elementelor mulțimii A.

b) Arătați că $1013 \in A$ și $2023 \notin A$.

c) Găsiți trei valori ale lui n pentru care $2^n - n - 1$ este divizibil cu 10.

Soluție:

a)	Card A=100	1p
b)	$2^n - n - 1 = 1013 \Longrightarrow 2^n - n = 1014 \Longrightarrow n = 10$, deci $1013 \in A$	1p
	$2^n - n - 1 = 2023 \Longrightarrow 2^n - n = 2024$ $n = 10 \Longrightarrow 2^{10} - 10 = 1014$ $n = 11 \Longrightarrow 2^{11} - 11 = 2048 - 11 = 2037$ $1013 < 2023 < 2036$	2p
c)	$n \in \{0,1,7\}$	3p

2. Aflați numerele naturale nenule a și b știind că:

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] = 2023$$

Soluție:

Notăm cu $d = (a,b) \Longrightarrow a = d \cdot x,\ \ b = d \cdot y,\ \ (x,y) = 1,\ \ x,y \in \mathbb{N}^*$, iar $[a,b] = d \cdot x \cdot y$	1p
Relația din enunț devine: $d^2 \cdot x + d^2 \cdot x \cdot y^2 = 2023$ $\Longrightarrow d^2 \cdot x \cdot (1 + y^2) = 2023$	1p
$2023 = 7 \cdot 17^2$	1p
$\mathrm{d}^2 \in \{1^2, 17^2\}$	1p
Dacă $d^2 = 1 \Longrightarrow d = 1 \Longrightarrow x \cdot (1 + y^2) = 2023$ $x = 1 \Longrightarrow 1 + y^2 = 2023 \Longrightarrow y^2 = 2022 \neq pătrat\ perfect$; $x = 7 \Longrightarrow 1 + y^2 = 289 \Longrightarrow y^2 = 288 \neq pătrat\ perfect$; $x = 17 \Longrightarrow 1 + y^2 = 119 \Longrightarrow y^2 = 118 \neq pătrat\ perfect$; $x = 17^2 \Longrightarrow 1 + y^2 = 7 \Longrightarrow y^2 = 6 \neq pătrat\ perfect$; $x = 119 \Longrightarrow 1 + y^2 = 17 \Longrightarrow y^2 = 16 \Longrightarrow y = 4.$	2p

$Obținem: a = 119 \text{ și } b = 4.$ $x = 2023 \Rightarrow 1 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0, nu\ convine.$	
Dacă $d^2 = 17^2 \Rightarrow d = 17 \Rightarrow x \cdot (1 + y^2) = 7$ $x = 1 \Rightarrow 1 + y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = 6 \neq pătrat\ perfect;$ $x = 7 \Rightarrow 1 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0, nu\ convine.$	1p

3. Știind că numărul prim $\overline{ab}$ divide numărul $x = 4^{1013} + 8^{675} + 256^{253} + 2^{2023} + 64^{337}$, arătați că numărul $\overline{ba}$ divide pe $31^{4n^2+4n+1} - 18$.

Soluție:

$x = 2^{2026} + 2^{2025} + 2^{2024} + 2^{2023} + 2^{2022}$	1p
$x = 2^{2022}(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) = 2^{2022} \cdot 31$	1p
$\overline{ab} = 31 \Rightarrow \overline{ba} = 13$	1p
$31^{4n^2+4n+1} - 18 = (2 \cdot 13 + 5)^{4n^2+4n+1} - (13 + 5) =$	1p
$(M_{13} + 5)^{4n^2+4n+1} - 13 - 5 =$ $M_{13} + 5^{4n^2+4n+1} - 13 - 5 =$	1p
$M_{13} + 5\left(5^{4n^2+4n} - 1\right) =$ $M_{13} + 5\left[(5^4)^{n^2+n} - 1\right] = M_{13} + 5\left[(625)^{n^2+n} - 1\right] =$	1p
$M_{13} + 5\left[(13 \cdot 48 + 1)^{n^2+n} - 1\right] = M_{13} + 5[M_{13} + 1 - 1]$ $= M_{13} + 5 \cdot M_{13} = M_{13} \Rightarrow 13 \mid \left(31^{4n^2+4n+1} - 18\right)$	1p

4. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A, B, C, D, E, F, în această ordine, astfel încât măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}$ să fie direct proporționale cu numerele 4, 7 și 6, iar măsurile unghiurilor $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ și $\widehat{FOA}$ invers proporționale cu numerele 0,1(6), 0,(5), 5 și 0,2.

a) Determinați măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOE}, \widehat{EOF}$ și $\widehat{FOA}$

b) Dacă semidreapta OM este bisectoarea ∢AOB, $M \in \mathcal{C}(O, r)$ și semidreapta ON este bisectoarea ∢COD, $N \in \mathcal{C}(O, r)$ verificați dacă MN este diametru în $\mathcal{C}(O, r)$.

Soluție:

a)	$\frac{\widehat{AOB}}{4} = \frac{\widehat{BOC}}{7} = \frac{\widehat{COD}}{6} = k$ $\widehat{AOB} = 4k$ $\widehat{BOC} = 7k$ $\widehat{COD} = 6k$	1p
	$\frac{\widehat{COD}}{\frac{1}{0,1(6)}} = \frac{\widehat{DOE}}{\frac{1}{0,(5)}} = \frac{\widehat{EOF}}{\frac{1}{5}} = \frac{\widehat{FOA}}{\frac{1}{0,2}}$	1p

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro

	$\frac{6k}{6} = \frac{\widehat{DOE}}{\frac{9}{5}} = \frac{\widehat{EOF}}{\frac{1}{5}} = \frac{\widehat{FOA}}{5}$ $\widehat{DOE} = \frac{9k}{5}$ $\widehat{EOF} = \frac{k}{5}$ $\widehat{FOA} = 5k$	
	$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOF} + \widehat{FOA} = 360^0$ $4k + 7k + 6k + \frac{9k}{5} + \frac{k}{5} + 5k = 360^0$ $24k = 360^0$ $k = 15^0$	1p
	$\widehat{AOB} = 60^0$; $\widehat{BOC} = 105^0$; $\widehat{COD} = 90^0$; $\widehat{DOE} = 27^0$; $\widehat{EOF} = 3^0$; $\widehat{FOA} = 75^0$	1p
b)	Semidreapta OM bisectoarea ∢AOB $\Longrightarrow$∢AOM=∢MOB=30^0	1p
	Semidreapta ON este bisectoarea ∢COD $\Longrightarrow$∢CON=∢NOD=45^0	1p
	∢MOB+∢BOC+∢CON=$30^0 + 105^0 + 45^0 = 180^0 \Longrightarrow$ M, O, N coliniare $\Longrightarrow$ MN diametru.	1p

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro