# Olimpiada Naţională de Matematică

## Etapa locală – 25 februarie 2023 –

## Clasa a IX-a

## Barem de notare

**1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x]+[x+\frac{1}{3}]=[2x]$**

**(S.G.M.)**

Soluţie:

Fie $x=[x]+\{x\}$, notăm $\alpha=\{x\}\in[0,1)$ ……………………………….……..…….**1p**

$[x]+[[x]+\alpha+\frac{1}{3}]=[2[x]+2\alpha]$

$[\alpha+\frac{1}{3}]=[2\alpha]=k\in\{0,1\}$ ……………………………………………..**1p**

$k\leq \alpha+\frac{1}{3}<k+1$……………………………………………………………**1p**

$k\leq 2\alpha<k+1$………………………………………………………………..**1p**

Avem următoarele cazuri:

$k=0\Rightarrow \alpha\in[0,\frac{1}{2})$ ……………………………………………..……………. **1p**

$k=1\Rightarrow \alpha\in[\frac{2}{3},1)$……………………………………………………………... **1p**

$S=\{[x]+\alpha / \alpha\in[0,\frac{1}{2})\cup[\frac{2}{3},1)\}$…………………………………… …..…….**1p**

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
*http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro*

**2. Să se arate că dacă a, b, c>0 atunci :**

**a)** $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

**b)** $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}$

Soluţie:

a) Se aplică inegalitatea mediilor pentru numerele $\frac{a}{b}$ şi $\frac{b}{a}$ ......................**3p**

b) Notăm x=a+b, y=a+c, z=b+c………………………………………. . **1p**

a=$\frac{x+y-z}{2}$, b=$\frac{x-y+z}{2}$, c=$\frac{-x+y+z}{2}$

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}=\frac{1}{2}\left[\frac{x+y-z}{z}+\frac{x-y+z}{y}+\frac{-x+y+z}{x}\right]$…………………………......**1p**

$=\frac{1}{2}[(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})+(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})-3] \geq \frac{3}{2}$…………………………………..**2p**

**3. Fie 2n+1 numere reale mai mari decat 1 şi mai mici ca $2^n$.**

**Să se arate că există trei dintre ele care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.**

Soluţie:

Principiul cutiei

Daca repartizăm nk+1 obiecte în n cutii, atunci va exista o cutie în care se află cel puţin k+1 obiecte.........................................................................................................**2p**

Puterile lui 2 mai mici ca $2^n$ realizează o partiţie a intervalului $(1, 2^n)$........**1p**

$(1,2^n)=(1,2)\cup[2,2^2)\cup[2^2,2^3)\cup\ldots\ldots.[2^{n-1},2^n)$

Conform principiului cutiei, există un interval din cele n, ce conţine cel puţin trei elemente din cele 2n+1 numere……………………………………………………………………..**1p**

Fie a, b, c trei nr. situate în $[2^k, 2^{k+1})$, $0 \leq k \leq n-1$

$2^k \leq a < 2^{k+1}, 2^k \leq b < 2^{k+1}, 2^k \leq c < 2^{k+1}$ ……………………….……….…..**1p**

$2^{k+1} \leq a + b < 2^{k+2}$, deci c<a+b . Analog b<a+c, a<c+b ………………..…**2p**

**4. Coardele (AB) şi (CD) ale unui cerc de centru O sunt perpendiculare şi se intersectează în punctul P.**

**Arătaţi că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}= 2\,\overrightarrow{PO}$**

Soluţie:

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD}$............................. **2p**

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$...................................................**1p**

Fie M mijlocul lui[AB]$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OM}$...................................................**1p**

Fie N mijlocul lui[CD] $\Rightarrow \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{ON}$ ................................................**1p**

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{OM}+2\,\overrightarrow{ON} = 2\,\overrightarrow{OP}$....................................................**1p**

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}= 4\,\overrightarrow{PO} + 2\,\overrightarrow{OP} = 2\,\overrightarrow{PO}$......................................................**1p**