# Olimpiada Naţională de Matematică

## Etapa locală – 25 februarie 2023 –

## Clasa a XII-a

## Barem de notare

**1. Se consideră șirul** $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+ax+a}dx$, $n \geq 1, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R},\ a > 0$.

**a) Demonstrați că** $I_{n+2} + aI_{n+1} + aI_n = \frac{1}{n+1}$**, oricare ar fi** $n \geq 1$

**b) Demonstrați că:**

$$\frac{1}{(2a+1)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(2a+1)(n-1)}, \text{ oricare ar fi } n \geq 2$$

**c) Determinați** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, **știind că:**

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2023}$$

a) $I_{n+2} + aI_{n+1} + aI_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+ax+a)}{x^2+ax+a}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

.........................2p

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+ax+a}dx \leq 0$ de unde rezultă că $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător ……….……1p

De aici și din a) avem că : $\frac{1}{n+1} \leq (2a+1)I_n$ și din $(2a+1)I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow (2a+1)I_n \leq \frac{1}{n-1}$

(deoarece $n \leftarrow n-2$)

Astfel rezultă b) …………………………………………………………………………………………………. 2p

c) Din b) rezultă că $\frac{n}{(2a+1)(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{(2a+1)(n-1)}$

Conform criteriului cleștelui obținem că:

$\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2a+1}$ ..................................................................................1p

Așadar, $a=1011$ ..........................................................................................................1p

**2. Fie $(G,\cdot)$ un grup și $H_1$, $H_2$ două subgrupuri ale sale. Să se arate că dacă $H_1 \cup H_2$ este subgrup al lui $G$, atunci $H_1 \subset H_2$ sau $H_2 \subset H_1$.**

Presupunem prin metoda reducerii la absurd că $H_1 \not\subset H_2$ și $H_2 \not\subset H_1$ ..........................................1p

Atunci există $x \in H_1 \setminus H_2$ și $y \in H_2 \setminus H_1$ ....................................................................................1p

Cum $xy \in H_1 \cup H_2$ rezultă că $xy \in H_1$ sau $xy \in H_2$ ....................................................................1p

1) $xy \in H_1$ Avem $x^{-1} \in H_1$, rezultă că $x^{-1}(xy) \in H_1$, adică $y \in H_1$ - contradicție..................2p
2) $xy \in H_2$ Avem $y^{-1} \in H_2$, rezultă că $(xy)y^{-1} \in H_2$, adică $x \in H_2$ - contradicție ................2p

**3. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de compoziție ”o” dată de:**

$x \circ y = xy + 4(x+y) + 12$, $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$.

**Aflați ultimele două cifre ale numărului $1 \circ 2 \circ 3 \circ ........... \circ n$, unde $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{n} \geq 6$. (S.G.M.)**

$x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ ..........................................................................................................2p

$x_1 \circ x_2 \circ ..... \circ x_n = (x_1+4)(x_2+4).......(x_n+4) - 4$ ....................................................................2p

Cum $n \geq 6$, avem

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro

$1\circ 2\circ ....\circ n = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10.....(n+4)-4=$
$=5\cdot 6\cdot 10\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11....(n+4)-4=$
$=300\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11....(n+4)-4=$
$=\mathrm{M}_{100}-4$ ..........................................................................................2p

Deci ultimele două cifre sunt 9 și 6...........................................................................................................1p

**4. Fie** $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ **o funcție continuă cu** $\int_0^1 f(x)dx=\frac{2^{2023}-1}{2023}$**.**

**Să se arate că există** $a\in[0,1]$ **cu** $f(a)=(a+1)^{2022}$ **(G.M.)**

Definim funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-(x+1)^{2022}$, $\forall x\in[0,1]$; g este continuă ..........................2p

Atunci $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx-\frac{(x+1)^{2023}}{2023}\Big|_0^1=0$ ...........................................................................................2p

Conform Teoremei de medie, există $a\in[0,1]$, astfel încât $g(a)=0$, deci $f(a)=(a+1)^{2022}$ ..............3p

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
*http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro*