INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – 25 februarie 2023 –

Clasa a VIII-a

Barem de notare

SUBIECTUL I

Fie patru puncte necoplanare A , B , C , D astfel încât planele (ABC) și (BAD) sunt perpendiculare și BC = AC . Dacă M este mijlocul segmentului $[AD]$ și CM = BD , determinați măsura unghiului dreptelor CM și BD.

SOLUȚIE	PUNCTAJ
Figura	1p
În ΔABC , $AC = BC\ (ip)$, $construim\ CP \perp AB \Rightarrow \Delta CAP \equiv \Delta CBP (i.c) \Rightarrow AP \equiv PB (1)$	1p
$(ABD) \perp (ABC)$, $(ABD) \cap (ABC) = AB$ și $CP \perp AB \Rightarrow CP \perp (ABD)$. $Cum\ MP \subset (ABD) \Rightarrow CP \perp MP$ și deci ΔCPM este dreptunghic. În ΔABD , $AM \equiv MD (ip)$, $AP \equiv PB\ (1) \Rightarrow MP - linie\ mijlocie \Rightarrow MP \parallel BD$ și $MP = \frac{BD}{2} = a\ (not)$. $Cum\ BD = CM\ (ip) \Rightarrow CM = 2a$.	2p 1p
$\sphericalangle(BD, CM) = \sphericalangle(CM, MP) = \sphericalangle CMP$. În ΔCMP , $\sphericalangle CPM = 90^0$ avem $\cos CMP = \frac{MP}{MC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle CMP = 60^0$	1p 1p

SUBIECTUL II

a) **Numerele reale a , b și c verifică relația $a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2a - 12b - 12c = 11$. Demonstrați că $a + b + c \in \left[-6 , \frac{37}{3}\right]$.**

b) **Considerăm numerele iraționale m , n , p , q din intervalul $[0 , 1]$. Demonstrați că printre aceste numere există două cu distanța dintre ele mai mică decât $\frac{1}{3}$.**

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro

SOLUȚIE	PUNCTAJ
a) Adunăm în ambii membrii ai egalității $1^2+2^2+3^2$ Egalitatea din enunț este echivalentă cu $(a^2-2a+1)+((2b)^2-12b+3^2)+((3c)^2-12c+2^2)=25$	1p
Adică $(a-1)^2+(2b-3)^2+(3c-2)^2=5^2$. Cum pătratele sunt pozitive ,rezultă că fiecare dintre cele trei pătrate este mai mic sau egal decât 25.	1p
Din $(a-1)^2\le 25$ $rezultă$ $\|a-1\|\le 5$ $adică$ $-5\le a-1\le 5 \Rightarrow -4\le a\le 6$ Analog $(2b-3)^2\le 25$ $rezultă$ $\|2b-3\|\le 5$ $adică$ $-5\le 2b-3\le 5 \Rightarrow -1\le b\le 4$ $(3c-2)^2\le 25$ $rezultă$ $\|3c-2\|\le 5$ $adică$ $-5\le 3c-2\le 5 \Rightarrow -1\le a\le \frac{7}{3}$	1p
Din cele trei relații obținem $(-4-1-1)\le a+b+c\le 6+4+\frac{7}{3} \Rightarrow a+b+c\in \left[-6,\frac{37}{3}\right]$	1p
b) Avem $m,n,p,q \in (0,\frac{1}{3})\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right)$. Se pot lua intervale deschise deoarece numerele sunt iraționale.	1p
Conform principiului lui Dirichlet , există două dintre cele patru numere aflate în același interval din cele trei.	1p
Cum lungimea fiecărui interval este $\frac{1}{3}$, rezultă cerința.	1p

SUBIECTUL III

a) Să se arate că oricare ar fi a și b numere reale pozitive are loc relația $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.

b) Demonstrați că $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>6$

c) Fie $b\in R$ astfel încât $b=a^2+a+1$, $pentru\ orice$ $a\in R$ Arătați că $b\ge\frac{3}{4}$

SOLUTIE	PUNCTAJ
a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}\ge 2\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$	2p

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=$ $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}})+(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})+(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$. $Folosind\ relația\ de\ la\ punctul\ \ a)\ vom\ avea:$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)>2+2+2=6$	2p 1p
c) $b=a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$	2p

SUBIECTUL IV

În cubul $ABCDEFGH$ notăm cu P centrul pătratului BCGF . Dacă M este mijlocul muchiei AB și N piciorul perpendicularei dusă din D pe CM , aflați măsura unghiului CNP.

SOLUȚIE	PUNCTAJ
Figura	1p
În pătratul ABCD notăm $DN\cap BC=\{Q\}$. Avem că $\sphericalangle DCN$ este complementul unghiului $\sphericalangle MCB$ și $\sphericalangle NDC \Longrightarrow \sphericalangle MCB\equiv\sphericalangle QDC.$ $\Delta MCB\equiv\Delta QDC\ (C.U)\Longrightarrow MB\equiv QC. Cum\ M\ este\ mijlocul\ lui\ AB\ și\ AB=BC$ $\Longrightarrow Q\ este\ mijlocul\ lui\ BC$. P - mijlocul lui BG. , Q – mijlocul lui BC rezultă că PQ este linie mijlocie în triunghiul BGC $\Longrightarrow PQ \parallel GC \parallel DH.$ $Din\ CM\perp DQ$ și $CM\perp DH \Longrightarrow CM\perp(HDQ).\ Dar\ \ PN\subset(HDQ)\Longrightarrow CM\perp PN.$ În concluzie măsura unghiului CNP = 90^0 .	1p 2p 1p 1p 1p

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro