Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală
25 februarie 2023
Clasa a XII-a

Subiecte:

1. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+ax+a}dx$, $n\geq 1, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R},\ a>0$.

a) Demonstrați că $I_{n+2}+aI_{n+1}+aI_n = \frac{1}{n+1}$, **oricare ar fi** $n\geq 1$

b) Demonstrați că:

$$\frac{1}{(2a+1)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(2a+1)(n-1)}, \text{ oricare ar fi } n\geq 2$$

c) Determinați $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, **știind că:**

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2023}$$

2. Fie $(G,\cdot)$ **un grup și** H_1, H_2 **două subgrupuri ale sale. Să se arate că dacă** $H_1 \cup H_2$ **este subgrup al lui** G, **atunci** $H_1 \subset H_2$ **sau** $H_2 \subset H_1$.

3. Pe $\mathbb{R}$ **considerăm legea de compoziție "o" dată de:**

$x\circ y = xy+4(x+y)+12$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$.

Aflați ultimele două cifre ale numărului $1\circ 2\circ 3\circ \ldots\ldots\ldots\ldots \circ n$, **unde** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{n} \geq 6$. **(S.G.M.)**

4. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ **o funcție continuă cu** $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2^{2023}-1}{2023}$.

Să se arate că există $a\in[0,1]$ **cu** $f(a)=(a+1)^{2022}$ **(G.M.)**

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p

Timp de lucru 3 ore.

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro