INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală – 25 februarie 2023 –

Clasa a XI-a

Barem de notare

1. **Fie matricea** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Determinaţi $n \in N^*$ **astfel încât** $A^n + A^{n+2} = 90A$.

(S.G.M.)

Soluţie:

Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3A$ **3p**

Obţinem prin inducţie că $A^n = 3^{n-1}A, \forall n \in N^*$ **2p**

Înlocuind în relaţia $A^n + A^{n+2} = 90A$, obţinem $3^{n-1} + 3^{n+1} = 90$, ecuaţie care are soluţia naturală $n = 3$. **2p**

2. **Fie matricea** $A \in M_n(R)$ **astfel încât** $2A^3 = A + 2I_n$**, unde** $n \geq 3$**. Să se arate că** $det(A) > 0$.

Soluţie:

Dacă $A, B \in M_n(R)$ şi $AB = BA$, atunci $det(A^2 + B^2) \geq 0$ (cu demonstraţie) **2p**

Din $A(2A^2 - I_n) = 2I_n$, aplicând determinantul ambilor membrii obţinem $det(A) \cdot det(2A^2 - I_n) = 2^n \neq 0$, deci $det(A) \neq 0$. **1p**

Din $A(2A^2 + I_n) = 2(A + I_n)$, aplicând determinantul obţinem că

$det(A) \cdot det(2A^2 + I_n) = 2^n \cdot det(A + I_n)$, şi cum

$det(2A^2 + I_n) = det\left(\left(\sqrt{2}A\right)^2 + I_n^2\right) \geq 0$,

deducem că $det(A)$ şi $det(A + I_n)$ au acelaşi semn. **2p**

Din $2A^2(A + I_n) = 2A^2 + A + 2I_n$, aplicând determinantul, deducem că

$$2^n \cdot (det(A))^2 \cdot det(A+I_n) = det\left(\left(\sqrt{2}A + \frac{1}{2\sqrt{2}}I_n\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{15}{8}}I_n\right)^2\right) \geq 0,$$

de unde $det(A+I_n) \geq 0$. **1p**

Deci $det(A) \geq 0$ şi cum $det(A) \neq 0$ obţinem $det(A) > 0$. **1p**

3. **Studiaţi convergenţa şirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $x_1 = \frac{1}{10}$ şi $x_{n+1} = 2x_n - 5x_n^2, \forall n \geq 1$. Determinaţi limita şirului, în cazul în care aceasta există.**

Soluţie:

Avem $x_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{(1-5x_n)^2}{5} \leq \frac{1}{5}$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ e mărginit superior. . . **2p**

Cum $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{5} - x_n\right)$, iar $\frac{2}{5} - x_n > 0$, prin inducţie se arată că $x_n > 0, \forall n \geq 1$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ e mărginit inferior. **2p**

Din $x_{n+1} - x_n = x_n \cdot (2 - 5x_n) > 0$, deducem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi cum e şi mărginit deducem că este convergent **2p**

Trecând la limită în relaţia de recurenţă şi notând limita lui $(x_n)_{n\geq 1}$ cu l obţinem $l = 2l - 5l^2$, de unde $l = 0$ sau $l = \frac{1}{5}$, dar cum şirul este strict crescător şi $x_1 > 0$ deducem că $l = \frac{1}{5}$. **1p**

4. **A) Studiaţi convergenţa şirului $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.**

B) Ştiind că $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi^2}{6}$, calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

Soluţie:

A)Din $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ deducem că şirul este strict crescător. . . . . .… **2p**

Folosind inegalitatea $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pentru orice $k \geq 2$ obţinem că $s_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$, deci şirul este mărginit superior şi cum este şi strict crescător deducem că este convergent. . . . . ….. ……………………………………………….**2p**

B)

Avem $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} = s_{2n+1} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = s_{2n+1} - \frac{1}{4} \cdot s_n \to \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$. . . . . ……………………………… **3p**

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro