Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală – 25 februarie 2023 –

Clasa a X-a

Barem de notare

1. **a) Să se determine partea întreagă a numărului $log_2 3 + log_3 2$.**

   b) Să se compare numerele $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$ și $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$.

   Soluție:

   a) $log_2 3 + log_3 2 > 2\sqrt{log_2 3 \cdot log_3 2} = 2$ ……………………………………………………. **2p**
   Pe de altă parte $log_2 3 + log_3 2 < 2 + 1 = 3$, deci partea intreagă a numărului cerut este egală cu 2 ………………………………………………………………………………. **2p**
   b) Vom arăta că $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$ care se mai scrie $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$, adică, in urma amplificării fiecărui membru cu conjugata, $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16} > \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$, adevărat... **3p**

2. **a) Să se determine $x > 0$ dacă $x^{\sqrt{x}} \leq \left(\sqrt{x}\right)^{x}$.**

   b) Să se determine $x > 0$ dacă $x^{lg5} + 12^{lgx} = 13^{lgx}$.

Soluție:

a) dacă $x \in (0,1)$ obținem $\sqrt{x} \geq \frac{x}{2}$ cu mulțimea soluțiilor $S_1 = (0,1)$ ………………………………… **2p**

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro

dacă $x > 1$ obținem $\sqrt{x} \leq \frac{x}{2}$ cu mulțimea soluțiilor $S_2 = [4, \infty)$. Cum $x = 1$ verifică deducem că mulțimea soluțiilor este $S = (0, 1] \cup [4, \infty)$ ………………………………………………..**$2p$**

b) Cum $x^{lg5} = 5^{lgx}$ ecuația devine $5^{lgx} + 12^{lgx} = 13^{lgx}$ ……………………………………..**$1p$**

Notând $lgx = a$ obținem ecuația $5^a + 12^a = 13^a$ având soluția unică $a = 2$, de unde rezultă că $x = 100$ …………………………………………………………………………………….…**$2p$.**

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

a) Să se arate că f este inversabilă și să se determine inversa acesteia.

b) Să se determine x natural dacă $2^x - 2^{-x} = log_2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$.

Soluție:

a) Fie $y \in \mathbb{R}$. Vom arăta că există unic $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$. Notând $2^x = a$ se ajunge la soluțiile $a_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$. Cum $a > 0$ rămâne ca soluție $a = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$ care conduce la unica soluție $x = log_2\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)$. Așadar f este inversabilă și $f^{-1}(x) = log_2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$……………**$3p$**

b) Conform punctului a), ecuația devine $f(x) = f^{-1}(x)$, sau $f\big(f(x)\big) = x$. Observăm că funcția este strict crescătoare. Dacă $f(x) > x$, atunci $f\big(f(x)\big) > f(x) > x$, iar dacă $f(x) < x$, atunci $f\big(f(x)\big) < f(x) < x$. Așadar $f(x) = x$ …………………………………………………………….**$2p$**

Cum x este natural avem inductiv că $2^x \geq x + 1$. Atunci $2^x = x + 2^{-x} \geq x + 1$, deci $2^{-x} \geq 1$ de unde se obține că $x = 0$, care verifică…………………………………………………………….**$2p$**

4. Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$.

a) Arătați că dacă $z \in A$ atunci $\frac{2z-i}{2+iz} \in A$.

b) Arătați că dacă $1 + z \in A$ și $1 + z^2 \in A$, atunci $z \in A$.

Soluție:

a) Dacă $z = a + bi$ obținem $\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|2a+(2b-1)i|}{|2-b+ai|} \leq 1 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 - 4b + 1 \leq 4 - 4b + b^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1$, adevărat… . $\boldsymbol{4p}$

b) Din $|1 + z| \leq 1$ rezultă prin ridicare la pătrat că $|1 + 2z + z^2| \leq 1$ … … … … … … … … … … … … … . $\boldsymbol{1p}$

Avem $2 \geq |1 + 2z + z^2| + |1 + z^2| \geq |1 + 2z + z^2 - 1 - z^2| = 2|z|$, de unde $|z| \leq 1$ … … $\boldsymbol{2p}$

Strada Victoriei nr.132-134
Tg-Jiu, cod 210234
Telefon: 0253-227177
Fax : 0253-224750
http://isj.gj.edu.ro, e-mail :isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro