OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ GIURGIU – 11 februarie 2023

BAREM CLASA a VII-a

1. a) $\frac{1}{4}\cdot\frac{k(2k+1)+k(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)}\cdot\frac{1}{4}=\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$. 2p

b) $\frac{2^2}{1\cdot 3}=2^2\cdot\frac{1^2}{1\cdot 3}=2^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}$,

$\frac{4^2}{3\cdot 5}=2^2\cdot\frac{2^2}{3\cdot 5}=2^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$,

.

.

.

$\frac{2022^2}{2021\cdot 2023}=2^2\cdot\frac{1011^2}{2021\cdot 2023}=2^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1011}{2021}+\frac{1011}{2023}\right)=\frac{1011}{2021}+\frac{1011}{2023}$. 2p

$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+...+\frac{1010}{2019}+\frac{1010}{2021}+\frac{1011}{2021}+\frac{1011}{2023}$ 1p

$S=\underbrace{1+1+1+...+1}_{1011}+\frac{1011}{2023}=1011+\frac{1011}{2023}\Rightarrow A>1011$ 1p

$\frac{1011}{2023}<\frac{1}{2}\Rightarrow A<1011,5$

$\Rightarrow 1011<A<1011,5$. 1p

2. a) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}==\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$; 2p

b) $x_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\in\mathbb{Q}$ dacă $\sqrt{n+1}\in\mathbb{Q}$, deci n+1 este pătrat perfect. ………………………………..2p

Fie $n+1=k^2, k\in\mathbb{N}$.

Cum $1\le n\le 2023\Rightarrow 2\le n+1\le 2024\Rightarrow 2\le 2^2\le n+1\le 44^2\le 2024\Rightarrow 2^2\le k^2\le 44^2\Rightarrow k\in\overline{2,44}$.

Atunci k are 43 de valori, deci există 43 de numere naturale nenule n, pentru care x_n este număr rațional. ……………………………………………………………………………………………3p

3. a) $A_{\triangle DMN} = A_{ABCD} - \left(A_{\triangle ADM} + A_{\triangle BMN} + A_{\triangle CDN}\right) = a^2 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}\right) = a^2 - \frac{5a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$ 3p

b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, atunci CO și DN sunt mediane în $\triangle BCD$ 1p

Dar $CO \cap DN = \{P\}$, deci P este centrul de greutate al $\triangle BCD$ 1p

Deci $A_{\triangle DCP} = \frac{1}{3} A_{\triangle BCD} = \frac{a^2}{6}$ 2p

4.

a) Dacă $EB = 2ED$, atunci $ED = \frac{BD}{3}$ .... 1p.

Pentru că O este mijlocul lui (BD), DO este mediană în triunghiul ACD și

$$BD = 2DO \Rightarrow ED = \frac{2}{3} DO$$

Deci E este centrul de greutate al triunghiului ACD ....1p.

b) Fie $AE \cap CD = \{H\}$. Cum E este centrul de greutate al triunghiului ACD $\Rightarrow AH$ este mediană $\Rightarrow H$ mijlocul lui (CD) 2p

Din $\Delta ADH \equiv \Delta FCH$ (cazul U.L.U.)$\Rightarrow$ $AD = CF$, dar $AD = BC \Rightarrow FC = BC$ 1p

În ΔBDF : DC și OF - mediane

și $DC \cap OF = \{G\} \Rightarrow G$ este centrul de greutate al ΔBDF 1p

$\Rightarrow \frac{OG}{OF} = \frac{1}{3}$ 1p