OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală -11.02.2023

CLASA a VIII-a

Solutii si bareme

1. **Se considera piramida patrulatera VABCD cu varful V si cu toate muchiile congruente. Pe muchia laterala VA se alege punctul M astfel incat $\frac{VM}{VA}=\frac{2}{3}$, iar pe muchia laterala VD se alege punctul N astfel incat $\frac{ND}{VD}=\frac{1}{3}$. Calculati masura unghiului determinat de MN cu BC.**

Soluție:

Pentru un desen corect 1p
Cum toate muchiile sunt egale, $\Delta\, VBC$ este echilateral....................................1p
Din $\frac{ND}{VD}=\frac{1}{3}$, rezulta $\frac{VN}{VD}=\frac{2}{3}=\frac{VM}{VA}$. 1p
Aplicand Reciproca Teoremei lui Thales avem ca MN∥AD.............................1p
Dar AD∥ BC, atunci MN∥ BC...1p
∢(VB,MN)=∢(VB,BC)=$\sphericalangle\, VBC = 60°$...2p

2. **Se considera prisma dreapta ABCA'B'C' cu baza triunghi echilateral ABC, in care AB= 6 cm, AA'=9 cm. Punctul P apartine segmentului AC astfel incat PA=PC si M este un punct pe muchia BB'. Determinati valoarea raportului $\frac{MB}{BB'}$, stiind ca aria ΔAMC este $9\sqrt{7}$ cm^2 .**

Soluție:

Pentru un desen corect 1p
Fie MB=x.
ΔAMC este isoscel si P este mijlocul lui AC, BP=$3\sqrt{3}$cm.......................................1p
In Δ MBP dreptunghic, aplic Teorema lui Pitagora de unde, MP=$\sqrt{x^2+27}$............1p
$A_{\Delta AMC}=\frac{AC\cdot MP}{2}$ 1p

Str. Dr. Ion Munteanu, Nr. 3,Giurgiu
Cod poștal, 080474
Tel: 0246/ 214255
Fax: 0246/ 214255
www.isjgiurgiu.ro
E-mail: isjgiurgiu@yahoo.com

De unde x=6..2p
Atunci $\frac{MB}{BB'}=\frac{2}{3}$...1p

3. **Dacă numerele reale nenule a și b au același semn și verifică relația**

$$a+2022\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{2023}{b}$$ **, arătați că ab este număr natural pătrat perfect.**

Soluție:

Relația din enunț se scrie $a+2022\cdot\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{2023}{b}$, deci $a+2022\cdot\frac{\sqrt{ab}}{|b|}=\frac{2023}{b}$ $(*)$ 1p

Pentru $a>0$ și $b>0$ avem $ab>0$, $|b|=b$ iar relația devine

$ab+2022\sqrt{ab}-2023=0$.

....1p

Cu notația $x=\sqrt{ab}>0$ obținem ecuația de gradul doi

$x^2+2022x-2023=0$, pe care o scriem

$(x^2-1)+2022(x-1)=0$, $(x-1)(x+1)+2022(x-1)=0$,

$(x-1)(x+2023)$=0

Rezultă $x_1=1>0$ și $x_2=-2023<0$ care nu convine.

Din $x_1=1$ avem $\sqrt{ab}=1$, deci $ab=1^2=1$ natural pătrat perfect.....................................2p

Pentru cazul $a<0$ și $b<0$ avem $ab>0$ și $|b|=-b$ iar relația $(*)$ devine

$ab-2022\sqrt{ab}-2023=0$.

Cu notația $x=\sqrt{ab}$ rezultă ecuația $x^2-2022x-2023=0$ pe care o scriem :

Str. Dr. Ion Munteanu, Nr. 3,Giurgiu
Cod poștal, 080474
Tel: 0246/ 214255
Fax: 0246/ 214255
www.isjgiurgiu.ro
E-mail: isjgiurgiu@yahoo.com

$x^2 + x - 2023x - 2023 = 0$; $x(x+1) - 2023(x+1) = 0$; $(x-2023)(x+1) = 0$

Rezultă $x_1 = 2023 > 0$ și $x_2 = -1 < 0$ care nu convine.

Din $x_1 = 2023$ avem $\sqrt{ab} = 2023$, deci $ab = 2023^2$ număr natural pătrat perfect........2p

Astfel $ab \in \{1 ; 2023^2\} \subset \mathbf{N}$
....1p

4. Se consideră numerele reale

$$\boldsymbol{a = \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 + \cdots + \sqrt{2}^{2006}} \text{ **și** } \boldsymbol{b = 2^{1002} + 2^{1001} + \cdots + 2 + 1.}$$

Demonstrați că raportul numerelor b și a este o fracție subunitară.

<u>Solutie</u>:

$b = 2^{1002} + 2^{1001} + \cdots + 2 + 1 / \cdot 2$, *rezultă*

$2b = 2^{1003} + 2^{1002} + \cdots + 2^2 + 2$, *de unde, făcând diferența* $2b - b$, *obținem:*

$b = 2^{1003} - 1$...*2p*

Analog vom proceda și cu numărul real a *și, vom obține:*

$\sqrt{2}a - a = \sqrt{2}^{2007} - \sqrt{2}$, *rezultă* $a(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}^{2006} - 1\right) = \sqrt{2}(2^{1003} - 1)$.......*2p*

Rezultă

$a = \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)b$, *de unde se obține:* $\frac{b}{a} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} < 1$, *rezultă* $\frac{b}{a}$ *subunitara..........3p*