Olimpiada de Matematică – etapa locală – Galați
11 februarie 2023

Clasa a 8-a
Barem de corectare și notare

Problema 1.

$a+b+c+d=0/:a, a\neq 0 \Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}=-1$ .... 1 punct

$a+b+c+d=0/:b, b\neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}=-1$ .... 1 punct

$a+b+c+d=0/:c, c\neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}=-1$ .... 1 punct

$a+b+c+d=0/:d, d\neq 0 \Rightarrow \frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=-1$... 1 punct

Adunând cele patru relații și ținând cont de condiția dată în ipoteză, obținem $\frac{b+c}{a}+\frac{c+d}{b}+\frac{a+d}{c}+\frac{a+b}{d}=-4-\sqrt{3}$ .... 2 puncte

$\sqrt{3}<2 \Rightarrow -\sqrt{3}>-2 \Rightarrow -4-\sqrt{3}>-4-2=-6$... 1 punct

Problema 2.

a)

$(x^2+6x+9)+(4y^2+4y+1)+(4z^2-12z+9)=1 \Leftrightarrow (x+3)^2+(2y+1)^2+(2z-3)^2=1$......... 1 punct

$|x+3|\leq 1, |2y+1|\leq 1, |2z-3|\leq 1$ de unde rezultă $-1\leq x+3\leq 1, -1\leq 2y+1\leq 1, -1\leq 2z-3\leq 1$ ... 1 punct

Obținem $-4\leq x\leq -2, -1\leq y\leq 0, 1\leq z\leq 2$ (1), de unde $x<y<z$ .... 1 punct

b)

Adunăm inegalitățile (1) membru cu membru. Avem $-4\leq x+y+z\leq 0$ și atunci $\min(x+y+z)=-4$ și $\max(x+y+z)=0$ ....1 punct

c)

$-4\leq x\leq -2 /\cdot(-2) \Rightarrow 4\leq -2x\leq 8$; $-1\leq y\leq 0 /\cdot 3 \Rightarrow -3\leq 3y\leq 0$ ....1 punct

$4\leq -2x\leq 8$; $-3\leq 3y\leq 0$; $1\leq z\leq 2$ adunăm membru cu membru aceste inegalități și rezultă $-2\leq -2x+3y+z\leq 10$, adică $-2x+3y+z\in[2,10]$ .... 2 puncte

Problema 3.
a)

$BC = x, AA_1 = \frac{3x}{2}, BB_1 = 4x, CC_1 = \frac{x}{2}, DD_1 = 2x$

Fie $AC \cap BD = \{O\}$ și M este mijlocul lui A_1C_1, iar P este mijlocul lui B_1D_1. În trapezul ACC_1A_1, OM este linie mijlocie, deci $OM \parallel AA_1 \parallel CC_1$ .... 1 punct

În trapezul BDD_1B_1, OP este linie mijlocie, deci $OP \parallel DD_1 \parallel BB_1$ .... 1 punct

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, deci O, P, M sunt punct coliniare, deci

$PM = OP - OM = \frac{DD_1 + BB_1}{2} - \frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{2x + 4x}{2} - \frac{\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}}{2} = 3x - x = 2x$ .... 1 punct

b) În ΔVDC, P mijlocul lui DV și M mijlocul lui DC, CP și VM mediane, $CP \cap VM = \{S\}$ $\Rightarrow$ S centrul de greutate al triunghiului $VDC \Rightarrow \frac{CS}{CP} = \frac{2}{3}$ (1)... 1 punct

În ΔVDB, BP și VO mediane, $BP \cap VO = \{T\} \Rightarrow$ T centrul de greutate al triunghiului VDB

$\Rightarrow \frac{BT}{BP} = \frac{2}{3}$ (2) .... 1 punct

Din (1) și (2), $\frac{CS}{CP} = \frac{BT}{BP} \xrightarrow{R.T.THALES} TS \parallel BC$ (3).. 1 punct

Cum $BC \parallel DA$, din $ABCD$ pătrat și $DA \subset (VAD)$, rezultă $TS \parallel (VAD)$ .... 1 punct

Problema 4.
a)

În $\Delta DAC, \sphericalangle D = 90^0, \sphericalangle C = 30^0, AC = 8\ cm, DC = 4\sqrt{3}\ cm$ .... 1 punct

$DE \perp AC, DE \subset (ADC), (ADC) \perp (ABC), (ADC) \cap (ABC) = AC \Rightarrow DE \perp (ABC)$ .... 1 punct

$DE \perp (ABC), EF \perp BC, EF, BC \subset (ABC) \xrightarrow{Th.3\perp} DF \perp BC \Rightarrow d(D, BC) = DF$

În $\Delta DAE, \sphericalangle E = 90^0$, $AE = 2\ cm$; $CE = 6\ cm$ .... 1 punct

$DE = \frac{AD \cdot DC}{AC}, DE = 2\sqrt{3}\ cm; \Delta CEF \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow EF = 3\sqrt{3}\ cm$;

$DF = \sqrt{39}\ cm$ .... 1 punct

b)

În $\Delta CAB, EF \parallel AB \xrightarrow{t.Thales} \frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow CF = 3\ cm; FB = 1\ cm$ .... 1 punct

În $\Delta BFE, \sphericalangle F = 90^0, BE = 2\sqrt{7}\ cm$ .... 1 punct

$DE \perp (ABC), EB \subset (ABC) \Rightarrow DE \perp EB \Rightarrow$ în $\Delta DEB, \sphericalangle E = 90^0$, $BD = 2\sqrt{10}\ cm$ .... 1 punct