Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

11 februarie 2023

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. Problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$n \in A \cap B \Leftrightarrow n$ pătrat perfect și cub perfect, deci $n = x^6$	2p
	$2023^3 > 2023^2$; căutăm în A elementele care sunt cuburi perfecte	1p
	$2023^2 \geq x^6 \Rightarrow 2023 \geq x^3$.	1p
	$13^3 = 2197, 12^3 = 1728 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, \dots, 12\} \Rightarrow card\ A \cap B = 12.$	3p
2.	Avem $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{56}{r}=\frac{2021}{pqr} \Leftrightarrow qr+pr+56pq=2021 \Leftrightarrow r\cdot(q+p)+56pq=2021 \Rightarrow$ $\Rightarrow r\cdot(q+p)=$ impar $\Rightarrow r=$ impar și $q+p=$ impar $\Rightarrow q=2$ sau $p=2$.	1p
	Dacă $p=2 \Rightarrow qr+2r+112q=2021 \Leftrightarrow r(q+2)=2021-112q \Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow r = \frac{2021-112q}{q+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow q+2 \mid 2021-112q$.	1p
	Dar $q+2 \mid q+2 \Rightarrow q+2 \mid 112q+224 \Rightarrow q+2 \mid 2245$.	1p
	$D_{2245}=\{1; 5; 449; 2245\}$	1p
	$q+2 \geq 4$și $2021-112q > 0 \Rightarrow 3 \leq q \leq 18 \Rightarrow q = 3$. Pentru $q=3 \Rightarrow r=337 \Rightarrow n=2\cdot 3\cdot 337 \Leftrightarrow n=2022$.	1p
	Dacă $q=2 \Rightarrow p=3$ și $r=337 \Rightarrow n=2022$. Deci $n=2022$ este soluție unică.	1p

3.

a) Notăm cu n numărul de fursecuri 1p

$$n = M_9 + 1 = M_{10} + 1 = M_{11} + 1 = M_{12} + 7$$

Un număr care împărțit pe rând la 9, 10, 11 dă fiecare rest 1 este $[9, 10, 11] + 1 = 991$. În plus, $991 = M_{12} + 7$, deci pot fi 991 fursecuri 2p

b) $n - 991 = M_9 - 990$, $n - 991 = M_{10} - 990$, $n - 991 = M_{11} - 990$, 1p

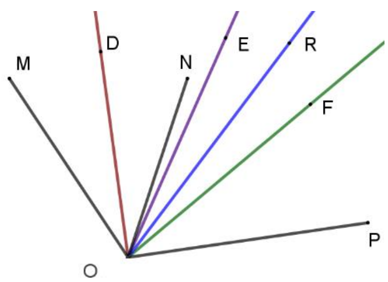
$$n - 991 = M_{12} - 984$$

Deci $n - 991 = M_{9}$, $n - 991 = M_{10}$, $n - 991 = M_{11}$, $n - 991 = M_{12}$ 1p

Deci $n = M_{[9,10,11,12]} + 991$ 1p

Cum $n < 10.000 \Rightarrow$ numărul maxim de fursecuri este 8911 1p

4.



a) $\sphericalangle MOD = \sphericalangle DON = x$ și $\sphericalangle NOF = \sphericalangle FOP = y$ 1p

$$\sphericalangle MOP = 2x + 2y, \sphericalangle MON = 2x, \sphericalangle NOP = 2y$$
$$\sphericalangle MOE = x + y \Rightarrow$$

$\sphericalangle EOD = \sphericalangle MOE - \sphericalangle MOD = x + y - x = y$ 1p

$\Rightarrow \sphericalangle NOP = 2 \cdot \sphericalangle EOD$ 1p

b) $\sphericalangle MOE = \sphericalangle EOP = x + y$

$\sphericalangle FOE = \sphericalangle EOP - \sphericalangle FOP = x + y - y = x$ 1p

$\Rightarrow 2 \cdot \sphericalangle FOE = \sphericalangle MON$

c) OR – bisectoarea $\sphericalangle FOE \Rightarrow \sphericalangle FOR = \sphericalangle ROE = \frac{x}{2}$ 1p

$\sphericalangle POR = \sphericalangle POF + \sphericalangle FOR = y + \dfrac{x}{2}$ 1p

$\sphericalangle ROD = \sphericalangle FOD - \sphericalangle FOR = x + y - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} + y$ 1p

$\Rightarrow$ OR este și bisectoarea $\sphericalangle POD$