Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

25 februarie 2023

CLASA A V-A

Subiectul 1. Suma a două numere naturale este egală cu 2039. Câtul împărţirii lor este 18, iar restul este 6. Aflaţi cele două numere.

Subiectul 2. Găsiţi numerele naturale $m < n < p$ astfel încât: $653 < 5^m + 5^n + 5^p < 809$.

Subiectul 3. Fie $a < b < c$ numere naturale consecutive. Arătaţi că: $N = 8^{2a} + 2 \cdot 4^{3b} + 2^{6c}$ este pătrat perfect.

Subiectul 4. Decideţi dacă numărul:

$$A = 1 + 1 \cdot (2-1) + 1 \cdot 2 \cdot (3-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (4-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5-1) + \cdots$$
$$+ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot (99-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot (100-1)$$

este mai mic, mai mare sau este egal cu numărul: $B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$.

Timp de lucru: 2 ore. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

25 februarie 2023

CLASA A VI-A

Subiectul 1. Considerăm un unghi ascuţit cu măsura a^0. Cu cât este mai mare suplementul complementului suplementului suplementului unghiului dat decât acesta?

Subiectul 2. Demonstraţi că dacă numerele naturale a, b, c, d, e, f sunt direct proporţionale cu numerele $1, 3, 4, 5, 7$, 10, atunci: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = f^2$.

Subiectul 3. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, ştiind că: $2 \cdot [a, b] + 3 \cdot (a, b) = 18$.

Subiectul 4. Spunem că o mulţime finită de numere naturale A este *interesantă* dacă există două mulţimi $B, C \subset A$ astfel încât: $B \cap C = \emptyset$, $B \cup C = A$ şi suma elementelor mulţimii B este egală cu suma elementelor mulţimii C.

a) Fie $n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că dacă A este interesantă şi $A \cap \{n, n+1, n+2, n+3\} = \emptyset$, atunci mulţimea: $A \cup \{n, n+1, n+2, n+3\}$ este interesantă.

b) Demonstraţi că mulţimea: $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 2021, 2022, 2023\}$ este interesantă.

Timp de lucru: 2 ore. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

25 februarie 2023

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $2022 \cdot [x] - 2021 \cdot \{x\} = x$.

Subiectul 2. Demonstraţi că:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{3-2\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}.$$

Subiectul 3. Demonstraţi că dacă într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri opuse sunt paralele, atunci celelalte două unghiuri ale patrulaterului sunt congruente.

Subiectul 4. Se descriu cercuri pe laturile unui patrulater convex $ABCD$, ca diametre. Demonstraţi că:

a) Coarda comună a cercurilor descrise pe laturile AB şi BC este paralelă cu coarda comună a cercurilor descrise pe laturile CD şi DA.

b) Nu există niciun punct în interiorul patrulaterului $ABCD$ care să fie situat simultan şi în interiorul celor patru cercuri.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

25 februarie 2023

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Rezolvaţi în numere reale inecuaţia: $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \leq 0$.

Subiectul 2. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, ştiind că: $a + b \in \mathbb{Z}$ şi $a^2 + b^2 = 1$.

Subiectul 3. Se consideră cinci puncte într-un plan (P), oricare trei necoliniare şi un al şaselea punct în afara planului (P). Câte plane se pot duce care trec prin trei din cele şase puncte date?

Subiectul 4. Se dau un plan α şi O un punct exterior planului α. Fie A proiecţia lui O pe α, iar B, C alte două puncte din planul α, diferite de A. Fie un punct D pe dreapta OA, diferit de O şi E, F proiecţiile punctului D pe OB, respectiv OC. Arătaţi că patrulaterul $BCFE$ este inscriptibil.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

25 februarie 2023

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Se consideră numerele: $a = \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)$ şi $b = \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)$. Demonstraţi că numărul: $a \cdot b$ este raţional, iar numerele: a, b, $a + b$ sunt iraţionale.

Subiectul 2. Arătaţi că numărul: $N = 49^n - 48n - 1$ se divide cu 2304, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul 3. Fie $a, b \in (0,1)$ astfel încât $a^2 + b^2 = 1$. Demonstraţi că:

$$a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 3\sqrt{2}.$$

Subiectul 4. Se consideră un triunghi oarecare ABC şi punctele: M – simetricul lui A faţă de B; N – simetricul lui B faţă de C; P – simetricul lui C faţă de A. Arătaţi că triunghiurile MNP şi ABC au acelaşi centru de greutate.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

25 februarie 2023

CLASA A X-A

Subiectul 1. Demonstraţi că: $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}=2$ dacă şi numai dacă $a \in \{-5,5\}$.

Subiectul 2. Fie $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\omega^3 = 1$. Demonstraţi că:

$$(2+5\omega+2\omega^2)^6 = (2+2\omega+5\omega^2)^6 = 729.$$

Subiectul 3. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstraţi că:

$$\frac{\log_a b}{a+b}+\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Subiectul 4. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că: $f\big(f(x)\big) = x+2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
Demonstraţi că: a) f este inversabilă; b) dacă în plus $f(0) = 1$, calculaţi: $f^{-1}(2023)$.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Faza locală – Dâmboviţa

25 februarie 2023

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie matricea: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$. Aflaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât: $A^n+A^{n+2}=90A$.

Subiectul 2. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătaţi că: $\det(A+I_2)=\det(I_2-A)$ dacă şi numai dacă $\operatorname{Tr}A=0$.

Subiectul 3. Determinaţi valorile $a\in(0,\infty)$ pentru care şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0=a$ şi

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n^2}\ ,\ \ n\in\mathbb{N},$$

este convergent.

Subiectul 4. Determinați $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}-mx-n\right)=0.$$

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

25 februarie 2023

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de compoziţie „ $*$ ” dată prin $x * y = xy + 4(x+y) + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. Aflaţi ultimele două cifre ale numărului: $1 * 2 * 3 * \ldots * n$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 6)$.

Subiectul 2. Fie G un grup cu elementul neutru notat cu e, pentru care există $a \in G$ astfel încât $G \setminus \{a\}$ este subgrup al lui G. Demonstraţi că: $G = \{e, a\}$.

Subiectul 3. Calculaţi:

$$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{2\sin x + \cos x}\, dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Subiectul 4. Fie

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Calculaţi: $I_{n-1} + I_{n+1}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$; b) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.