A 73-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a XII-a
Soluții și bareme

Problema 1.

Calculați integrala $\int \frac{1}{x^{675}+x^{2023}}\mathrm{d}x$, unde $x \in (0, \infty)$.

Ugron Szabolcs, Sfântu Gheorghe

Soluție

Fie $n = 674$, atunci trebuie calculat integrala $\int \frac{1}{x^{n+1}+x^{3n+1}}\mathrm{d}x$ **1p**

$I = \int \frac{1}{x^{n+1}+x^{3n+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+x^{4n}}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cdot\int \frac{(x^n)'}{\left(x^n\right)^2+\left(x^n\right)^4}\mathrm{d}x$ **2p**

Notăm $x^n = t$, atunci $n\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Așadar $I = \frac{1}{n}\cdot\int \frac{1}{t^2+t^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot\int \frac{1}{t^2\cdot\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot\left(\int \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\right) =$ **2p**

$= \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t\right) + \mathscr{C}$ **1p**

Deci $I = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{x^{674}} - \operatorname{arctg} x^{674}\right) + \mathscr{C}$ **1p**

Problema 2.

Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funția $f(x,y) = \frac{a(x+y)}{1+xy}$ să definească o lege de compoziție pe intervalul $(-1,1)$.

Ugron Szabolcs, Sfântu Gheorghe

Soluție

Înlocuim $x \to 1$, $y \to 1$, rezultă $-1 \leq a \leq 1$, deci $a \in [-1,1]$. Aratăm, că pentru $a \in [-1,1]$ legea "$*$" definită prin $x * y = f(x,y)$ este lege de compoziție pe $(-1,1)$. **1p**

Având $|x*y| = \left|a\cdot\frac{x+y}{1+xy}\right| = |a|\cdot\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| \leq \left|\frac{x+y}{1+xy}\right|$, trebuie arătat, că $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1, \forall x,y \in (-1,1)$.
.... **3p**

Avem $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1 \iff \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 - 1 < 0 \iff \left(x^2-1\right)\cdot\left(1-y^2\right) < 0$, ceea ce este adevărat pentru $\forall x,y \in (-1,1)$. **2p**

În concluzie: "$*$" este lege de compoziție pe $(-1,1)$, dacă $a \in [-1,1]$. **1p**

Problema 3.

Notăm cu e elementul neutru al grupului finit $(G, \circ)$. Elementele distincte $a, b \in G$ au ordinul 2.

a) Arătați că $(a \circ b) \notin \{e, a, b\}$.

b) Știind că $a \in Z(G)$, unde $Z(G) = \{z \in G \mid z \circ y = y \circ z, \forall y \in G\}$, arătați că ordinul lui G e multiplu de 4.

Mátyás Mátyás, Sfântu Gheorghe

Soluție

a) Reductio ad absurdum
a și b diferă de e penru că au ordin 2. .... **1p**

Presupunem că $a \circ b$ nu diferă de e, a sau b, și ajungem la contradicție cu $b \neq a$. $b \neq e$ respectiv $a \neq e$. **1p**

$a \circ b = e \implies a \circ a \circ b = a \circ e \implies b = a$
$a \circ b = a \implies a \circ a \circ b = a \circ a \implies b = e$
$a \circ b = b \implies a \circ b \circ b = b \circ b \implies a = e$ **1p**

b) Fie $H = \{e, a, b, a \circ b\}$. Ținând cont de $a \in Z(G)$ aratăm că H e parte stabilă a lui G față de operația "$\circ$". **1p**

$e \circ x = x \circ e = x \in H, \forall x \in H$
$a \circ b = b \circ a \in H$ **1p**

$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = b \in H$
$b \circ (a \circ b) = (a \circ b) \circ b = a \in H$
$(a \circ b) \circ (a \circ b) = e \in H$ **1p**

Drept urmare H este subgrup al lui G.
Conform teoremei lui Lagrange $|G| \vdots |H|$, adică $|G| \vdots 4$. **1p**

Problema 4.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și funcțiile $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}^*$ astfel încât f este continuă, iar g admite primitive. Arătați că funcția $f \cdot g$ admite primitive pe I.

Gazeta matematică, Supliment 9 - L22.233

Soluție

Fie $G : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $g \implies G'(x) = g(x)\ \forall x \in I$ **1p**

$$\left.\begin{array}{r} g(x) \neq 0\ \forall x \in I \implies G'(x) \neq 0\ \forall x \in I \\ G' \text{are proprietate Darboux} \end{array}\right\} \implies G'(x) < 0 \text{ sau } G'(x) > 0\ \forall x \in I \implies$$

$$\left.\begin{array}{r} \implies G \text{ este strict monotonă} \\ G \text{ este continuă} \end{array}\right\} \implies G \text{ este injectivă}$$ **1p**

Fie $A = \mathrm{Im}G \implies G_1 : I \to A$, $G_1(x) = G(x)\ \forall x \in I$ este bijectivă **1p**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Așadar } \exists\ G_1^{-1} : A \to I \\ \text{cum } G_1'(x) = G'(x) = g(x) \neq 0\ \forall x \in I \end{array}\right\} \implies G_1^{-1} \text{ este derivabilă, deci este continuă}$$ **1p**

Construind funcția $h : A \to \mathbb{R}$, $h = f \circ G_1^{-1}$, care este continuă, ca compunere de funcții continue $\implies h$ admite primitive

Fie $H : A \to \mathbb{R}$ o primitivă lui h **1p**

Așadar $H \circ G_1 : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă și $(H \circ G_1)'(x) = H'(G_1(x)) \cdot G'(x) = h(G_1(x)) \cdot G'(x) =$
$= (f \circ G_1^{-1})(G_1(x)) \cdot G'(x) = [(f \circ G_1^{-1}) \circ G_1](x) \cdot g(x) = [f \circ (G_1^{-1} \circ G_1)](x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) \implies$
$\implies$ funcția $H \circ G_1$ este o primitivă a funcției $f \cdot g$ pe $I \implies f \cdot g$ admite primitive pe I. **2p**