A 73-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023 - Clasa a XI-a - Soluții și bareme

Problema 1. Demonstrați că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2 \\ b^2+bc+c^2 & c^2+ca+a^2 & a^2+ab+b^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

este divizibil cu $(ab+bc+ca)^2$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Soluție

$$\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2 \\ b^2+bc+c^2 & c^2+ca+a^2 & a^2+ab+b^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \underset{(-1)\cdot c_1+c_3}{\overset{(-1)\cdot c_1+c_2}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2(a-b)(a+b) & b^2(a-c)(a+c) \\ b^2+bc+c^2 & (a-b)(a+b)+c(a-b) & (a-c)(a+c)+b(a-c) \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix} =$$

.... **1p**

$$= (a-b)(a-c)\cdot \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2(a+b) & b^2(a+c) \\ b^2+bc+c^2 & a+b+c & a+c+b \\ b+c & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(-1)\cdot c_2+c_3}{=}$$

.... **1p**

$$= (a-b)(a-c)\cdot \begin{vmatrix} b^2c^2 & c^2(a+b) & b^2(a+c)-c^2(a+b) \\ b^2+bc+c^2 & a+b+c & 0 \\ b+c & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

.... **1p**

$$= (a-b)(a-c)\left[b^2(a+c)-c^2(a+b)\right]\cdot \begin{vmatrix} b^2+bc+c^2 & a+b+c \\ b+c & 1 \end{vmatrix} =$$

.... **1p**

$$= (a-b)(a-c)\left[b^2(a+c)-c^2(a+b)\right]\left[b^2+bc+c^2-(a+b+c)(b+c)\right] =$$
$$= (a-b)(c-a)(ab+bc+ca)\left[b^2(a+c)-c^2(a+b)\right] =$$

.... **1p**

$$= (a-b)(c-a)(ab+bc+ca)\left[ab^2+b^2c-ac^2-bc^2+abc-abc\right] =$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)^2.$$

.... **1p**

Rezultă că Δ este divizibil cu $(ab+bc+ca)^2$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{Z}$

.... **1p**

Problema 2.

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că

a) egalitatea $AB - BA = I_2$ nu se poate îndeplini;

b) dacă $(AB-BA)^{2022} = I_2$, atunci $(AB-BA)^2 = I_2$.

Soluție

(a) Dacă $(AB - BA)$ și I_2 ar fi egali, atunci $Tr\,(AB-BA) = TrI_2$. **2p**
Dar $Tr\,(AB-BA) = Tr\,(AB) - Tr\,(BA) = 0$ și $TrI_2 = 2$, deci egalitatea $AB - BA = I_2$ nu se poate îndeplini. **2p**

Soluție alternativă: Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & bt+ay \\ cx+dz & dt+cy \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ ct+az & dt+bz \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AB - BA = \begin{pmatrix} bz - cy & bt + ay - bx - dy \\ cx - az - ct + dz & cy - bz \end{pmatrix}.$$

.... **3p**

Dacă $(AB - BA)$ și I_2 ar fi egali, atunci

$$\begin{cases} bz - cy = 1 \\ cy - bz = 1 \end{cases} \Longrightarrow 1 = -1, \text{ contradicție.}$$

.... **1p**

(b) Fie $X = AB - BA$. Cum $TrX = Tr\,(AB-BA) = 0$, conform teoremei lui Cayley-Hamilton:

$$X^2 - TrX \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X^2 = -\det X \cdot I_2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X^{2022} = \left(X^2\right)^{1011} = (-\det X)^{1011} \cdot I_2.$$

.... **1p**

Din $X^{2022} = (AB-BA)^{2022} = I_2$ rezultă că $(-\det X)^{1011} = 1 \Longrightarrow \det X = -1 \Longrightarrow X^2 = I_2$
.... **1p**

Problema 3. Calculați
$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{3}{8}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+4}\right).$$

Soluție

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+4k^2+4-4k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\left(k^2+2\right)^2-4k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\left(k^2-2k+2\right)\left(k^2+2k+2\right)}.$$

.... **1p**

$$\frac{k}{\left(k^2-2k+2\right)\left(k^2+2k+2\right)}=\frac{Ak+B}{k^2-2k+2}+\frac{Ck+D}{k^2+2k+2}=$$

.... **1p**

$$=\frac{(A+C)\,k^3+(2A+B-2C+D)\,k^2+(2A+2B+2C-2D)\,k+(2B+2D)}{\left(k^2-2k+2\right)\left(k^2+2k+2\right)}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}A+C=0\\2A+B-2C+D=0\\2A+2B+2C-2D=1\\2B+2D=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=0\\B=\dfrac{1}{4}\\C=0\\D=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{k}{\left(k^2-2k+2\right)\left(k^2+2k+2\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{k^2-2k+2}-\frac{\frac{1}{4}}{k^2+2k+2}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(k-1)^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}\right).$$

.... **2p**

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(k-1)^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{0^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{0^2+1}+\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{4n^2+4}-\frac{1}{4\,(n+1)^2+4}.$$

.... **2p**

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{3}{8}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+4}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4n^2+4}+\frac{1}{4\,(n+1)^2+4}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2+4}+\frac{n^2}{4\,(n+1)^2+4}=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

.... **1p**

Problema 4.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0,1)$ și

$$x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ și în caz de convergență calculați limita acestuia.

(b) Calculați

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^n.$$

Soluție

(a) Din $x_1 > 0$ rezultă că $x_2 = x_1^3 - x_1^2 + 1 = x_1^2(x_1 - 1) + 1 \in (0,1)$ și prin inducție matematică arătăm, că dacă $x_n > 0$, atunci $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1 = x_n^2(x_n - 1) + 1 \in (0,1)$, deci șirul este mărginit. **1p**

Cum

$$x_{n+1} - x_n = x_n^3 - x_n^2 + 1 - x_n = x_n^2(x_n - 1) - (x_n - 1) =$$
$$= (x_n - 1)\left(x_n^2 - 1\right) = (x_n - 1)^2(x_n + 1) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

rezultă că șirul este strict crescător. **1p**

Din teorema lui Weierstrass rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in [0,1]$ **1p**

Trecând la limită în formula de recurență, obținem

$$l = l^3 - l^2 + 1 \Leftrightarrow l^2(l-1) - (l-1) = 0 \Leftrightarrow\ \Leftrightarrow (l-1)^2(l+1) = 0 \overset{l\in[0,1]}{\Rightarrow} l = 1,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. **1p**

(b)

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^n \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln x_n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot(x_n-1)\cdot\frac{\ln x_n}{x_n-1}} =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot(x_n-1)\cdot\frac{\ln x_n}{x_n-1}\right)}.$$

Din $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n - 1} = 1.$$

.... **1p**

Totodată

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot(x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\dfrac{1}{x_n - 1}}.$$

Cum șirul $\left(\dfrac{1}{x_n - 1}\right)_{n\geq 1}$ este strict monoton și nemărginit, aplicăm teorema lui Cesaro-Stolz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{x_n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\dfrac{1}{x_{n+1}-1}-\dfrac{1}{x_n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}-1)(x_n-1)}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n^3-x_n^2\right)(x_n-1)}{x_n-(x_n^3-x_n^2+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n^3-x_n^2\right)(x_n-1)}{x_n-(x_n^3-x_n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(x_n-1)^2}{-(x_n+1)(x_n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{-(x_n+1)}=-\frac{1}{2}.$$

.... **1p**

Deci

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot(x_n-1)\cdot\dfrac{\ln x_n}{x_n-1}\right)}=e^{-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{e}}.$$ **1p**