A 73-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a VIII-a
Soluții și bareme

Problema 1. Fie mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \left|\frac{2x-1}{3}\right| \le 2023 \right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ este multiplul lui } 7\}$.

a) Scrieți mulțimea A sub formă de interval.

b) Aflați cardinalul mulțimii $A \cap B$.

Szász Diánna, Miercurea Ciuc

Soluție

a) $\left|\frac{2x-1}{3}\right| \le 2023$, deci $-2023 \le \frac{2x-1}{3} \le 2023$ **1p**

$\Rightarrow -6069 \le 2x-1 \le 6069 \Rightarrow -6068 \le 2x \le 6070 \Rightarrow -3034 \le x \le 3035$. **1p**

$A = [-3034, 3035]$. **1p**

b) $B = \{\ldots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \ldots\}$. **1p**

Cel mai mic număr multiplu de 7 din mulțimea A este $-3031 = 7 \cdot (-433)$.

Cel mai mare număr multiplu de 7 din mulțimea A este $3031 = 7 \cdot 433$. **1p**

Deci $A \cap B = \{-3031, -3024, \ldots, -7, 0, 7, \ldots, 3024, 3031\}$. **1p**

$\text{Card}(A \cap B) = 433 - (-433) + 1 = 433 + 433 + 1 = 867$. **1p**

Problema 2.

a) Calculați valoarea numărului real x, unde

$$x = \left[(5-2\sqrt{6})^{2023} + \frac{1}{(5+2\sqrt{6})^{2023}}\right] \cdot \frac{(10+4\sqrt{6})^{2023}}{2^{2024}}.$$

b) Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$, astfel încât

$$a(\sqrt{2}+2) + \sqrt{2} = b(2\sqrt{2}+1) + 2.$$

Máthé Attila István, Sfântu Gheorghe

Soluție

a) $\left[(5-2\sqrt{6})^{2023} + \frac{1}{(5+2\sqrt{6})^{2023}}\right] = 2 \cdot (5-2\sqrt{6})^{2023}$. **2p**

$(10+4\sqrt{6})^{2023} = 2^{2023}(5+2\sqrt{6})^{2023}$. **1p**

$2 \cdot (5-2\sqrt{6})^{2023} \cdot \frac{2^{2023}(5+2\sqrt{6})^{2023}}{2^{2024}} = (5-2\sqrt{6})^{2023} \cdot (5+2\sqrt{6})^{2023} = 1$. **1p**

b) $(2a-b-2)+(a-2b+1)\sqrt{2}=0$. **1p**

Din $(2a-b-2)\in\mathbb{Q}$ și $0\in\mathbb{Z}\Rightarrow(a-2b+1)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

Din $(a-2b+1)\in\mathbb{Q}$ și $(a-2b+1)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow a-2b+1=0$. **1p**

Înlocuind în prima relație rezultă că $2a-b-2=0$.

Deci $a=\dfrac{5}{3}$ și $b=\dfrac{4}{3}$. **1p**

Problema 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB=10$ cm și $BC=5$ cm. De aceeași parte a planului dreptunghiului se ridică perpendicularele AA', BB', CC' și DD' astfel încât $AA'=12$ cm, $BB'=6$ cm și $CC'=10$ cm. Fie M și N mijloacele segmentelor $A'C'$, respectiv $B'D'$.

a) Demonstrați că dreapta MN este perpendiculară pe planul (ABC).

b) Dacă $MN=1$ cm, calculați lungimea segmentului DD'.

András Ibolya, Odorheiu Secuiesc

a) $AA',CC'\perp(ABC)\Rightarrow AA'\parallel CC'\Rightarrow ACC'A'$ trapez dreptunghic, în mod asemănător $BDD'B'$ trapez dreptunghic. **1p**

$AC\cap BD=\{O\}$ atunci MO și NO sunt linii mijlocii în trapezul $ACC'A'$ și $BDD'B'$. **1p**

Deci $MO\perp(ABC)$ și $NO\perp(ABC)$. **1p**

Rezultă că M,N și O sunt puncte coliniare, deci $MN\perp(ABC)$. **1p**

b) $MO=11$ cm. **1p**

$NO=10$ cm sau 12 cm **1p**

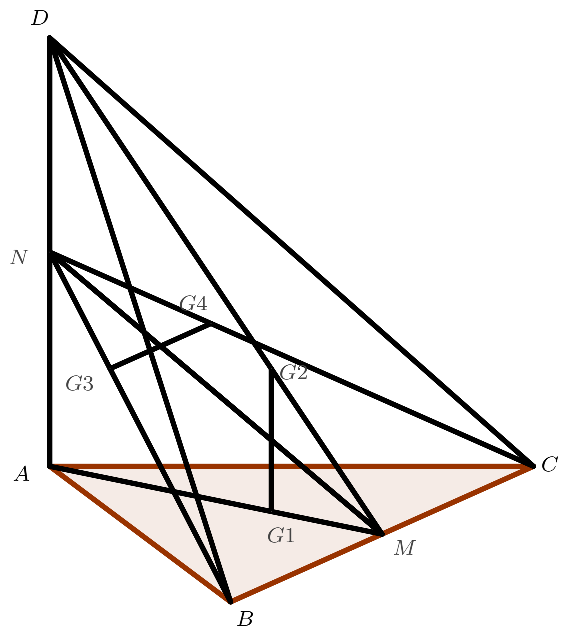
$DD'=14$ cm sau 18 cm. **1p**

Problema 4. Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara AD. Fie G_1,G_2,G_3,G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC,DBC,DAB. respectiv DAC. Demonstrați că:

a) $G_1G_2\perp G_3G_4$;

b) $AD=BC$ dacă și numai dacă $G_1G_2=G_3G_4$.

(Supliment S:E22.313)



Soluție

Desen **1p**

a) Fie M mijlocul laturii BC.

$G_1 \in AM$ este centrul de greutate a triunghiului ABC, deci $\dfrac{MG_1}{MA} = \dfrac{1}{3}$ (1).

$G_2 \in DM$ este centrul de greutate a triunghiului DBC, deci $\dfrac{MG_2}{MD} = \dfrac{1}{3}$ (2).

(1) și (2) $\Rightarrow \dfrac{MG_1}{MA} = \dfrac{MG_2}{MD} \overset{\text{T.rec.Thales}}{\Longrightarrow} G_1G_2 \parallel AD$. **1p**

Fie N mijlocul laturii AD. $G_3 \in NB$ este centrul de greutate a triunghiului ABD, deci $\dfrac{NG_3}{NB} = \dfrac{1}{3}$ (3) și $G_4 \in NC$ este centrul de greutate a triunghiului ACD, deci $\dfrac{NG_4}{NC} = \dfrac{1}{3}$ (4).

(3) și (4) $\Rightarrow \dfrac{NG_3}{NB} = \dfrac{NG_4}{NC} \overset{\text{T.rec.Thales}}{\Longrightarrow} G_3G_4 \parallel BC$. **1p**

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} DA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow DA \perp BC \\ G_1G_2 \parallel AD \text{ și } G_3G_4 \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow G_1G_2 \perp G_3G_4.$$

.... **1p**

b) $G_1G_2 \parallel AD \overset{\text{T.f.a}}{\Longrightarrow} \dfrac{G_1G_2}{AD} = \dfrac{MG_1}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AD = 3 \cdot G_1G_2$. **1p**

$G_3G_4 \parallel BC \overset{\text{T.f.a}}{\Longrightarrow} \dfrac{G_3G_4}{BC} = \dfrac{NG_3}{NB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow BC = 3 \cdot G_3G_4$. **1p**

$AD = BC \Leftrightarrow 3G_1G_2 = 3G_3G_4 \Leftrightarrow G_1G_2 = G_3G_4$. **1p**