A 73-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a X-a

Soluții și bareme

Problema 1. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ și $x = \log_{bc} a$, $y = \log_{ca} b$, $z = \log_{ab} c$.

a) Arătați că $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 2$.

b) Demonstrați că $a^{(x+1)(y-z)} \cdot b^{(y+1)(z-x)} \cdot c^{(z+1)(x-y)} = 1$.

(Supliment Gazeta Matematică 10/2022/S:L22.253.)

Soluție

a) Calculăm $x + 1 = \log_{bc} a + 1 = \log_{bc} a + \log_{bc} bc = \log_{bc} abc$, analog se arată că $y + 1 = \log_{ca} abc$ și $z + 1 = \log_{ab} abc$ **1p**

Așadar $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{\log_{bc} abc} + \dfrac{1}{\log_{ca} abc} + \dfrac{1}{\log_{ab} abc} =$
$= \log_{abc} bc + \log_{abc} ca + \log_{abc} ab = \log_{abc} a^2b^2c^2 = 2$. **2p**

b) Cum $x + 1 = \log_{bc} abc$ și $y - z = \log_{ca} b - \log_{ab} c = \dfrac{\lg b}{\lg c + \lg a} - \dfrac{\lg c}{\lg a + \lg b} =$

$= \dfrac{\lg a \cdot \lg b + \ln^2 b - \lg^2 c - \lg a \cdot \lg c}{(\lg c + \lg a)(\lg a + \lg b)} = \dfrac{(\lg b - \lg c)(\lg a + \lg b + \lg c)}{(\lg c + \lg a)(\lg a + \lg b)} =$

$= \dfrac{(\lg b - \lg c)(\lg abc)}{(\lg c + \lg a)(\lg a + \lg b)} = \dfrac{\lg \dfrac{b}{c} \cdot \lg abc}{\lg ac \cdot \lg ab}$, ... **1p**

Din relațiile anterioare găsim $(x+1)(y-z) = \dfrac{(\lg b - \lg c) \cdot \lg^2 abc}{(\lg ab \cdot \lg bc \cdot \lg ca}$. Calculând analog $(y+1)(z-x)$ și $(z+1)(x-y)$ relația inițială va fi echivalent cu
$a^{\frac{(\lg b - \lg c) \cdot \lg^2 abc}{\lg ab \cdot \lg bc \cdot \lg ca}} \cdot b^{\frac{(\lg c - \lg a) \cdot \lg^2 abc}{\lg ab \cdot \lg bc \cdot \lg ca}} \cdot c^{\frac{(\lg a - \lg b) \cdot \lg^2 abc}{\lg ab \cdot \lg bc \cdot \lg ca}} = 1$. **1p**

Ridicând ambele părți la $\dfrac{\lg ab \cdot \lg bc \cdot \lg ca}{\lg^2 abc}$ rezultă că $a^{\lg b - \lg c} \cdot b^{\lg c - \lg a} \cdot c^{\lg a - \lg b} = 1$ **1p**

Logaritmând găsim $(\lg b - \lg c) \cdot \lg a + (\lg c - \lg a) \cdot \lg b + (\lg a - \lg b) \cdot \lg c = 0$ echivalent cu
$\lg b \cdot \lg a - \lg c \cdot \lg a + \lg c \cdot \lg b - \lg a \cdot \lg b + \lg a \cdot \lg c - \lg b \cdot \lg c = 0$ ceea ce este adevărat. **1p**

Problema 2. Fie triunghiul ABC cu afixele vârfurilor z_A, z_B respectiv z_C astfel încât $|z_A| = |z_B| = |z_C| = z_A + z_B + z_C$. Arătați ca triunghiul ABC este dreptughic!

(Ugron Szabolcs, Sfântu Gheorghe)

Soluție Fie $|z_A| = |z_B| = |z_C| = r$, $r > 0$ și $r \in \mathbb{R}$, așadar punctele A, B și C sunt situate pe un cerc cu raza r și centrul în originea sistemului de coordonate. Deoarece $z_A \cdot \overline{z_A} = z_B \cdot \overline{z_B} = z_C \cdot \overline{z_C} = r^2$, obținem $\overline{z_A} = \dfrac{r^2}{z_A}, \overline{z_B} = \dfrac{r^2}{z_B}, \overline{z_C} = \dfrac{r^2}{z_C}$ **1p**

Din $z_A + z_B + z_C = r$, obținem $\overline{(z_A + z_B + z_C)} = \overline{z_A} + \overline{z_B} + \overline{z_C} = \overline{r} = r$, de unde rezultă că
$r^2 \cdot (\dfrac{1}{z_A} + \dfrac{1}{z_B} + \dfrac{1}{z_C}) = r$, adică $z_A \cdot z_B \cdot z_C = r \cdot (z_A \cdot z_B + z_B \cdot z_C + z_C \cdot z_A)$ **2p**

Calculăm $(z_A - r) \cdot (z_B - r) \cdot (z_C - r) = z_A \cdot z_B \cdot z_C - r \cdot (z_A \cdot z_B + z_B \cdot z_C + z_C \cdot z_A) +$
$+ r^2 \cdot (z_A + z_B + z_C) - r^3 = 0$. **2p**
Deducem de aici, că unul dintre z_A, z_B, z_C este egal cu r. Presupunem că $z_A = r$, atunci $z_B + z_C = 0$, așadar $z_C = -z_B$. **1p**
A, B, C fiind situate pe un cerc cu raza r și cu centrul în origine, iar $z_C = -z_B$ arată că punctele B și C sunt diametral opuse, ceea ce înseamnă că triunghiul ABC este dreptunghic în A. **1p**

Problema 3. Determinați numărul prim $n \in \mathbb{N}$ astfel, încât numărul $x = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2+1}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2+1}}$ să fie rațional!

(Dávid Géza, Odorheiu Secuiesc)

Soluție Folosind formula $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, putem scrie
$x^3 = n + \sqrt{n^2+1} + n - \sqrt{n^2+1} + 3\sqrt[3]{\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)} \cdot x$, de unde zerultă că
$x^3 = 2n - 3x$, adică $x^3 + 3x - 2n = 0$. **2p**
Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $x = \dfrac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{N}$ și $(p,q) = 1$, rezultă $\left(\dfrac{p}{q}\right)^3 + 3\left(\dfrac{p}{q}\right) - 2n = 0$ de unde
$p^3 + 3pq^2 - 2nq^3 = 0$, de unde rezultă ca q este divizor a lui p^3, dar p și q fiind prime între ele rezultă că $q = 1$, deci $x = p$. **2p**
Din $x = p$ rezultă că $p^3 + 3p - 2n = 0$ de unde $p\left(p^2+3\right) = 2n$, deci p este divizor a lui $2n$. Fiindcă n este număr prim, atunci $p = 1$ sau $p = 2$ sau $p = n$ sau $p = 2n$ **1p**
Dacă $p = 1$, atunci $n = 2$ este prim, dacă $p = 2$ atunci $n = 7$ este prim, dacă $p = n$ atunci $n^2 + 3 = 2$ imposibil, dacă $p = 2n$ atunci $4n^2 + 3 = 1$ imposibil.
Așadar soluțiile sunt $n = 2$ cu $x = 1$ și $n = 7$ cu $x = 2$. **2p**

Problema 4.

a) Demonstrați că orice număr rațional r se poate scrie ca suma de două numere iraționale, ale căror produs este irațional!

b) Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică relația $f(xy) = f(x+y)$ pentru orice x și y irațional!

Soluție

a) $x + y = r$, atunci $xy = x(r - x) = rx - x^2$. Fie $x = \sqrt{2}$, de unde $\sqrt{2}y = r\sqrt{2} - 2$,
obținem $y = r - \sqrt{2}$ **1p**
Deci $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ și $y = r - \sqrt{2} \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ atunci $x + y = r$ și $xy = r\sqrt{2} - 2 \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **1p**

b) Fie $a > 0$ un număr irrațional, atunci $x = \sqrt{a}$ și $y = -\sqrt{a}$ sunt irraționale și $f\left(\sqrt{a} \cdot \left(-\sqrt{a}\right)\right) = f\left(\sqrt{a} + \left(-\sqrt{a}\right)\right)$ obținem $f(-a) = f(0)$ ceea ce implică $f(x) = f(0) = c$ constant, pentru oricare număr irrațional $x < 0$. **1p**
Fie $a > 0$ un număr irrațional, atunci $x = -\sqrt{a}$ și $y = -\sqrt{a}$ sunt irraționale și $f\left(-\sqrt{a} \cdot \left(-\sqrt{a}\right)\right) = f\left(-\sqrt{a} + \left(-\sqrt{a}\right)\right)$ adică $f(a) = f(-2\sqrt{a}) = f(0)$. Deci $f(x) = f(0) = c$ constant, pentru orice număr irrațional x. **1p**
Fie $r \in \mathbb{Q}$. Conform *a)* dacă luăm $x = \sqrt{2}$ și $y = r - \sqrt{2}$ rezultă că $f(r) = f\left(\sqrt{2} + \left(r - \sqrt{2}\right)\right) = f\left(\sqrt{2} \cdot \left(r - \sqrt{2}\right)\right) = f\left(r\sqrt{2} - 2\right) = c$. **2p**
Deci relația cerută este verificată numai de funcția constantă $f(x) = c$. **1p**