MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

A 73-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a VI-a
Soluții și bareme

Problema 1. Considerăm o mulțime de numere naturale A cu următoarele proprietăți:

a) $1 \in A$

b) dacă $x \in A$, atunci $6x \in A$

c) dacă $x \in A$, atunci $x + 7 \in A$.

Demonstrați, că $2022 \in A$.

Soluție 1.

1 este elementul mulțimii A, deci următoarele numere aparțin tot mulțimii: $1 \cdot 6, 1 \cdot 6^2, 1 \cdot 6^3 \ldots$ respectiv $1 + 7, 1 + 14, 1 + 21 \ldots$ **2p**

La fel aparțin mulțimii A și numerele $6+7; 6^2+7, 6^3+7 \ldots$ precum și $(1+7)\cdot 6, (1+14)\cdot 6 \ldots (1+7k)\cdot 6, \ldots$ **2p**

2022 este divizibil cu 6, deoarece $2022 = 6 \cdot 337$. Numărul 337 se poate scrie ca: $337 = 48 \cdot 7 + 1$.

Deci $2022 = 6 \cdot (48 \cdot 7 + 1) \in A$. **3p**

Soluție 2.

$2022 : 6 = 337$; $337 - 7 = 330$; $330 : 6 = 55$; $55 – 7 = 48$; $48 : 6 = 8$; $8 – 7 = 1 \in A$ **3p**

Deci din $1 \in A \Rightarrow 2022 = \{[(1 + 7) \cdot 6 + 7] \cdot 6 + 7\} \cdot 6 \in A$. **4p**

Problema 2. Media aritmetică a cinci numere raționale este 404, 6. Primele trei sunt direct proporționale cu numerele 3, 8 și 12, iar ultimele trei sunt direct proporționale cu 3, 7 și 17. Determinați cele cinci numere!

Deák Zsuzsánna, Odorheiu Secuiesc

Soluție Fie cele cinci numere: a, b, c, d și e. Putem scrie: $\dfrac{a+b+c+d+e}{5} = 404,6$, de unde $a+b+c+d+e = 404,6 \cdot 5 = 2023$, și se pot scrie următoarele șiruri de rapoarte egale: $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{c}{12}$ și $\dfrac{c}{3} = \dfrac{d}{7} = \dfrac{e}{17}$. **1p**

Dacă $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{c}{12} = k \Rightarrow c = 12k$, de unde $\dfrac{12k}{3} = \dfrac{d}{7} = \dfrac{e}{17}$, ... **2p**

deci $d = 28k$ și $e = 68k$. **1p**

$3k + 8k + 12k + 28k + 68k = 2023; 119k = 2023$, de unde rezultă $k = 17$; **2p**

Numerele căutate sunt:

$a = 3 \cdot 17 = 51; b = 8 \cdot 17 = 136; c = 12 \cdot 17 = 204; d = 28 \cdot 17 = 476; e = 68 \cdot 17 = 1156$.

.... **1p**

Problema 3. Împărțim unghiul alungit AOB în 9 unghiuri congruente, apoi tot același unghi AOB îl împărțim în 6 unghiuri congruente.

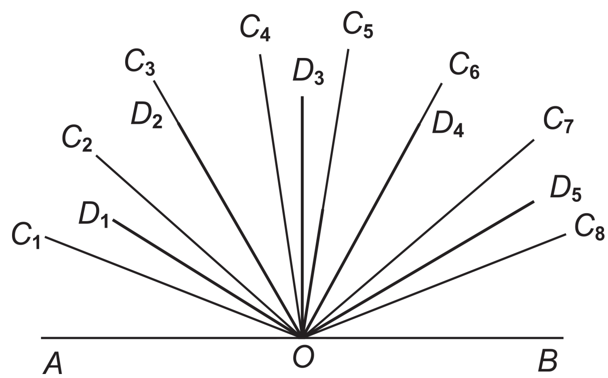
a) Câte semidrepte vor fi în interiorul unghiului AOB?

b) Câte unghiuri au măsura de 60°?

c) Câte unghiuri se formează în interiorul unghiului AOB?

Simon József, Miercurea Ciuc

Soluție



a) Prima împărțire se poate realiza cu 8 semidrepte, a doua cu 5 semidrepte. La prima se formează unghiuri de 20 de grade, la a doua de 30 de grade. **1p**

Deci a treia semidreaptă de la prima împărțire coincide cu cea de a doua de la a doua împărțire, deorece $20° \cdot 3 = 30° \cdot 2$, după cum se vede și pe desen: $OC_3 = OD_2$. Rezultă că $\sphericalangle AOC_3 = \sphericalangle AOD_2 = 60°$. **1p**

Mai avem o astfel de suprapunere: $OC_6 = OD_4$, aici $\sphericalangle AOC_6 = \sphericalangle AOD_4 = 120°$, deci în interiorul unghiului AOB obținem $8 + 5 - 2 = 11$ semidrepte. **1p**

b) La prima împărțire obținem 7, la a doua 5 ,,bucăți" de unghiuri de 60 de grade.

Acestea sunt: $\sphericalangle AOC_3 = \sphericalangle C_1OC_4 = \sphericalangle C_2OC_5 = \sphericalangle C_3OC_6 = \sphericalangle C_4OC_7 = \sphericalangle C_5OC_8 = \sphericalangle C_6OB = 60°$, respectiv $\sphericalangle AOD_2 = \sphericalangle D_1OD_3 = \sphericalangle D_2OD_4 = \sphericalangle D_3OD_5 = \sphericalangle D_4OB = 60°$.

Obținem $7 + 5 = 12$ unghiuri de 60 de grade. **1p**

c) Cele 11 semidrepte formează cu laturile unghiului AOB 12 unghiuri adiacente. Din unghiurile formate din câte două unghiuri adiacente, precum $\sphericalangle AOD_1, \sphericalangle C_1OC_2, \sphericalangle D_1OC_3 \ldots$, obținem 11 bucăți.

.... **1p**

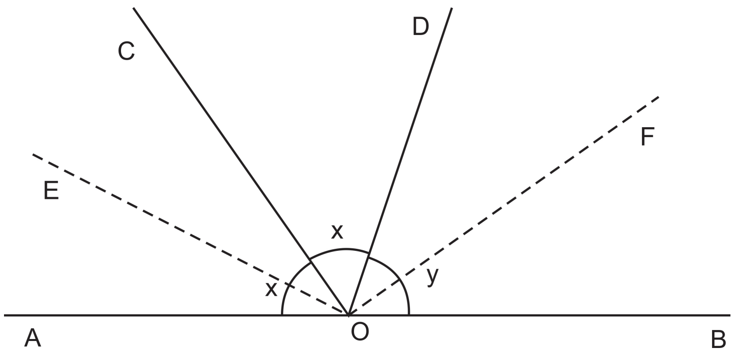
Din unghiurile formate din câte trei unghiuri adiacente avem 10 bucăți,... din unghiurile formate din câte 11 unghiuri adiacente avem 2 bucăți:$\sphericalangle AOC_8$ și $\sphericalangle C_1OB$. **1p**

Deci în interiorul unghiului AOB sunt în totalitate $2 + 3 + 4 + \cdots + 12 = \dfrac{12 \cdot 13}{2} - 1 = 77$ unghiuri.

.... **1p**

Problema 4. Fie semidreptele opuse $(OA$ și $(OB$. În același semiplan construim semidreptele $(OC$ și $(OD$, astfel ca unghiurile AOC și COD să fie congruente, iar raportul măsurilor unghiurilor COD și DOB să fie $\frac{3}{4}$. Să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și DOB.

Deák Zsuzsánna, Odorheiu Secuiesc



Soluție 1.
Fie $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COD = x$, és $BOD = y$
Putem scrie: $2x + y = 180°$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2x}{y} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{2x+y}{y} = \frac{10}{4}$ **3p**

$\frac{180}{y} = \frac{10}{4} \Rightarrow y = 72° \Rightarrow x = (180° - 72°) : 2 = 54°$ **3p**

$\sphericalangle EOF = 27° + 54° + 36° = 117°$ **1p**

Soluție 2. $\frac{\sphericalangle COD}{\sphericalangle BOD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sphericalangle COD = 3k$ și $\sphericalangle BOD = 4k$ **2p**

Putem scrie:
$2\sphericalangle COD + \sphericalangle BOD = 180°$, deci $2 \cdot 3k + 4k = 180° \Rightarrow 10k = 180° \Rightarrow k = 18°$ **2p**

Deci $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COD = 54°$ și $\sphericalangle DOB = 72°$ **2p**

$\sphericalangle EOF = 27° + 54° + 36° = 117°$ **1p**