A 73-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023

Clasa a VII-a

Soluții și bareme

Problema 1. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, știind că are loc relația $\sqrt{\overline{abc}} = 5 \cdot (a + b + c)$.

(Gazeta matematică)

Soluție

Soluție 1.

$[5(a + b + c)]^2 = \overline{abc}$ **1p**

Dacă $a + b + c \geq 7 \Rightarrow [5(a + b + c)]^2 \geq 35^2 \geq 999 \Rightarrow 1 < a + b + c \leq 6$ **2p**

Dacă $a + b + c = 6 \Rightarrow \overline{abc} = 30^2 = 900$ dar $9 + 0 + 0 \neq 6$

Dacă $a + b + c = 5 \Rightarrow \overline{abc} = 25^2 = 625$ dar $6 + 2 + 5 \neq 5$

Dacă $a + b + c = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 20^2 = 400$ și $4 + 0 + 0 = 4$

Dacă $a + b + c = 3 \Rightarrow \overline{abc} = 15^2 = 225$ dar $2 + 2 + 5 \neq 3$

Dacă $a + b + c = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 10^2 = 100$ dar $1 + 0 + 0 \neq 2$ **3p**

Deci avem o singură soluție: $\overline{abc} = 400$ **1p**

Soluție 2.

$[5(a + b + c)]^2 = \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \vdots 25$ **2p**

$\overline{abc} = 25 \cdot k^2, 1 < k \leq 6$ **1p**

Dacă $k = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 25 \cdot 4 = 100$ dar $1 + 0 + 0 \neq 2$

Dacă $k = 3 \Rightarrow \overline{abc} = 25 \cdot 9 = 225$ dar $2 + 5 + 5 \neq 3$

Dacă $k = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 25 \cdot 16 = 400$ și $4 + 0 + 0 = 4$

Dacă $k = 5 \Rightarrow \overline{abc} = 25 \cdot 25 = 625$ dar $6 + 2 + 5 \neq 5$

Dacă $k = 6 \Rightarrow \overline{abc} = 25 \cdot 36 = 900$ dar $9 + 0 + 0 \neq 6$ **3p**

Deci avem o singură soluție: $\overline{abc} = 400$ **1p**

Problema 2. Diferența a două pătrate perfecte este 2023. Determinați aceste două numere naturale, dacă cel mai mare divizor comun al lor este 17.

***

Soluție

Dacă numerele căutate sunt a și b, atunci $a^2 - b^2 = 2013$ și c.m.m.d.c$(a, b) = 7$ **1p**

$(a - b) \cdot (a + b) = 2023$ **1p**

$a = 17 \cdot k, b = 17 \cdot l$ unde c.m.m.d.c.$(k, l) = 1$ **1p**

$17^2 \cdot (k - l) \cdot (k + l) = 2023$ unde c.m.m.d.c.$(k, l) = 1$ **1p**

Deci $(k - l) \cdot (k + l) = 7$, unde 7 este un număr prim, deci avem două cazuri: $7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1$ **1p**

Deci $(4 - 3) \cdot (4 + 3) = 7 \Rightarrow k = 4, l = 3$ **1p**

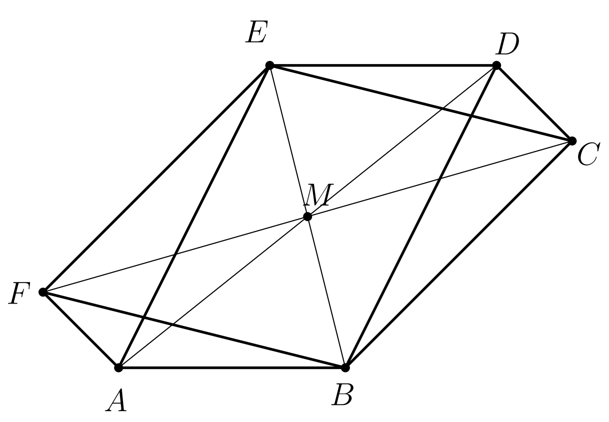
$a = 17 \cdot 4 = 68, b = 17 \cdot 3 = 51$. **1p**

Problema 3. $ABCDEF$ este un hexagon convex în plan. Știind că patrulaterele $ABDE$ și $BCEF$ sunt paralelograme, demonstrați că patrulaterul $CDFA$ este paralelogram!

Dajka Éva, Sânmartin

Soluție

Desen **2p**



Deoarece $ABDE$ este paralelogram, AD și BE se înjumătățesc **1p**

La fel și $BCEF$ este paralelogram, BE și CF se înjumătățesc **1p**

Rezultă că segmentul BE este înjumătățit și de AD, și de CF, deci AD și CF se intersectează în mijlocul lui BE. Fie acest punct M **1p**

În concluzie, pentru că BE a înjumătățit ambele segmente, punctual M este mijlocul lui AD și CF. Deci AD și CF se înjumătesc, adică $CDFA$ este paralelogram. **2p**

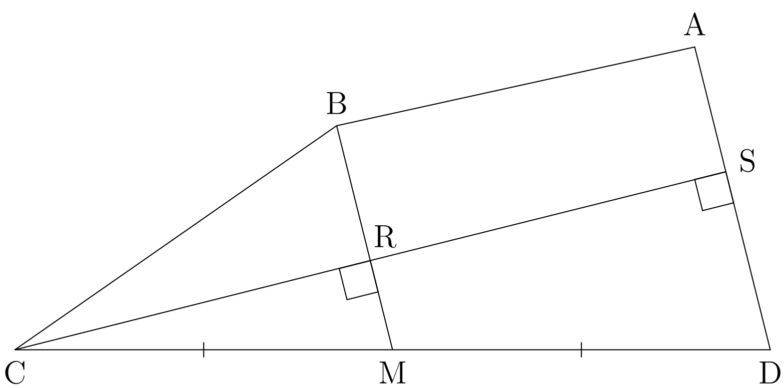
Problema 4. În patrulaterul $ABCD$ punctul M este mijlocul laturii CD, $BM \parallel AD$ și $BM = \dfrac{3}{4}AD$.

a) Calculați raportul dintre aria triunghiului CBM și aria patrulaterului $ABCD$.

b) Dacă $CP \parallel AB$, unde $P \in BD$, arătați că punctul P este mijlocul segmentului BD!

Máthé Mária,

Soluție



(a) Fie $CS \perp AD$, $S \in AD$ și $CS \cap BM = \{R\}$

ΔCDS, $CM = MD$, $M \in CD$, $RM \parallel SD$, $R \in CS \Rightarrow CR = RS$. **1p**

$BM \parallel AD, CS \perp AD \Rightarrow CS \perp BM$

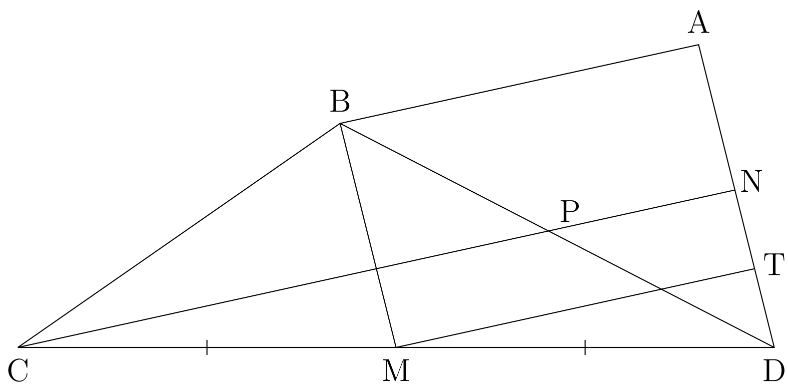
$T_{CBM} = \frac{BM \cdot CR}{2} = \frac{\frac{3}{4}AD \cdot CR}{2}$ **1p**

$BM \parallel AD, BM \neq AD \Rightarrow ABMD$ este trapez

$T_{ABMD} = \frac{(BM+AD)\cdot RS}{2} = \frac{(\frac{3}{4}AD+AD)\cdot CR}{2} = \frac{\frac{7}{4}AB \cdot CR}{2}$ **1p**

$T_{ABCD} = T_{CBM} + T_{ABMD} = \frac{\frac{10}{4}AD \cdot CR}{2}$

$\frac{T_{CBM}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{4}AD \cdot CR}{2} : \frac{\frac{10}{4}AD \cdot CR}{2} = \frac{3}{10}$ **1p**



(b) Fie $CP \cap AD = \{N\}$ și $MT \parallel AB, T \in ND$

$MT \parallel AB, BM \parallel AT \Rightarrow ABMT$ paralelogram $\Rightarrow AT = BM = \frac{3}{4}AD \Rightarrow TD = \frac{1}{4}AD$ **1p**

$MT \parallel AB, CN \parallel AB \Rightarrow MT \parallel CN$

$\Delta CND, CM = MD, M \in CD, MT \parallel CN, T \in ND \Rightarrow NT = TD$ **1p**

$ND = 2TD = \frac{2}{4}AD = \frac{1}{2}AD, N \in AD \Rightarrow AN = ND = \frac{1}{2}AD$

$\Delta ABD, AN = ND, N \in AD$ și $PN \parallel AB, P \in BD \Rightarrow BP = PD$ **1p**