MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA
KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

A 73-a olimpiadă Naţională de Matematică
Etapa zonală, 11 februarie 2023
Clasa a IX-a
Soluții și bareme

Problema 1.
Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2021x - 2019 = \{x\}^2 + 2023\{x\}.$$

Mátyás Mátyás

Soluție

$$2021x - 2019 = \{x\}^2 + 2023\{x\} \iff 2021[x] - 2019 = \{x\}^2 + 2\{x\} \iff [x] = \frac{\{x\}^2 + 2\{x\} + 2019}{2021}$$

.... **2p**

Din $\{x\} \in [0,1)$ rezultă, că:

$$\frac{2019}{2021} \le [x] < \frac{2022}{2021},$$

ceea ce înseamnă că $[x] = 1$. **1p**

Notăm $\{x\}$ cu y și obținem ecuația $y^2 + 2y - 2 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$. **1p**

$-1 - \sqrt{3} \notin [0,1)$ și $-1 + \sqrt{3} \in [0,1)$. Drept urmare condiția $\{x\} \in [0,1)$ e satisfăcută numai dacă $\{x\} = -1 + \sqrt{3}$. **2p**

În concluzie unica soluție a ecuației este: $x = [x] + \{x\} = 1 + (-1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$. **1p**

Problema 2.
Arătați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \le \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Csaba Zajzon

Soluție

Ridicând la pătrat inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică obținem:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge \left(\sqrt{ab}\right)^2 \implies a + b \ge \frac{4ab}{a+b} \implies \frac{1}{a+b} \le \frac{a+b}{4ab} = \frac{a}{4ab} + \frac{b}{4ab} = \frac{1}{4b} + \frac{1}{4a}.$$

.... **4p**

Analog obținem: $\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{4c} + \frac{1}{4b}$ și $\frac{1}{c+a} \le \frac{1}{4a} + \frac{1}{4c}$. **1p**

Adunând inegalitățile obținute deducem inegalitatea din enunț:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \le \frac{1}{4b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4c} = \frac{2}{4a} + \frac{2}{4b} + \frac{2}{4c} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

.... **2p**

Observație: O altă soluție a problemei din enunț este prezentată.

Din inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a+b} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$. . . **1p**

Analog obținem: $\dfrac{1}{b+c} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{bc}}$ și $\dfrac{1}{c+a} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{ca}}$ **1p**

Adunând inegalitățile obținute deducem inegalitatea din enunț:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2\sqrt{bc}}+\frac{1}{2\sqrt{ca}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2b}}+\frac{1}{\sqrt{2b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2c}}+\frac{1}{\sqrt{2c}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^2 = \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}.$$

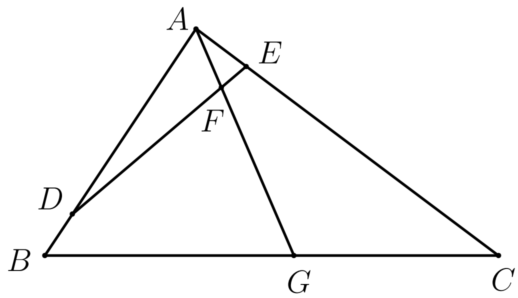
. . . . **5p**

Problema 3.

Fie numerele reale $x>0$ și $y>0$. În triunghiul ABC punctele D și E se află pe laturile AB respectiv AC, astfel încât $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{1}{x}$ și $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{1}{y}$. Fie punctul F pe segmentul DE, astfel încât $\dfrac{DF}{EF}=y+1$ și fie $\{G\}=AF\cap BC$. Arătați că $BG>CG$.

Mátyás Mátyás

Soluție



Din $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{1}{x}$ și $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{1}{y}$ obținem $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{x+1}\overrightarrow{AB}$ respectiv $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{y+1}\overrightarrow{AC}$. Din $\dfrac{DF}{EF}=y+1$ rezultă că $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{y+2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{y+1}{y+2}\overrightarrow{AE}$. Drept urmare $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{(y+2)(x+1)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{y+2}\overrightarrow{AC}$. **2p**

Punctele A, F și G fiind coliniare există $t\in\mathbb{R}$ astfel încât:

$$\overrightarrow{AG}=t\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{t}{(y+2)(x+1)}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{y+2}\overrightarrow{AC}$$

. . . . **1p**

Fie $k=\dfrac{BG}{CG}$. Atunci: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$. **1p**

Descompunerea lui $\overrightarrow{AG}$ după $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ este unică, ceea ce înseamnă că:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k+1}=\dfrac{t}{(y+2)(x+1)} \Longrightarrow \dfrac{k}{k+1}=\dfrac{tk}{(y+2)(x+1)} \\ \dfrac{k}{k+1}=\dfrac{t}{y+2} \end{cases}.$$

Ca urmare: $\dfrac{tk}{(y+2)(x+1)}=\dfrac{t}{y+2}\Longrightarrow k=x+1$. **2p**

Ținând cont de faptul că $x>0$, avem $\dfrac{BG}{CG}>1$, adică $BG>CG$. **1p**

Problema 4.

Demonstrați că ecuația $x^2+px+q=0$ nu are soluții raționale dacă p și q sunt numere întregi impare.

GM S:L22.204

Soluție

Presupunem prin absurd că ecuația $x^2+px+q=0$ admite o soluție rațională. Această soluție poate fi scrisă în forma $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ și cel puțin unul dintre a și b este impar. **1p**

Înlocuind în ecuație pe $\frac{a}{b}$ obținem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + p\frac{a}{b} + q = 0 \iff \frac{a^2}{b^2} + p\frac{a}{b} + q = 0 \iff a^2 + pab + qb^2 = 0.$$

. . . . **1p**

Distingem următoarele cazuri.

Dacă a este un număr par și b este un număr impar, atunci a^2 este par, pab este par și qb^2 este impar. Drept urmare $a^2 + pab + qb^2$ este impar.

Dacă a este un număr impar și b este un număr par, atunci a^2 este impar, pab este par și qb^2 este par. Drept urmare $a^2 + pab + qb^2$ este impar.

Dacă a şi b sunt două numere impare, atunci a^2 este impar, pab este impar și qb^2 este impar. Drept urmare $a^2 + pab + qb^2$ este impar.

. . . . **3p**

Deci, $a^2 + pab + qb^2$ este impar în toate cazurile posibile, ceea ce contrazice $a^2 + pab + qb^2 = 0$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și ecuația $x^2 + px + q = 0$ nu are soluții raționale dacă p și q sunt numere întregi impare. **2p**