

**73. Országos Matematika Olimpia****Körzeti szakasz, 2023. február 11.****IX. osztály****1. feladat**

A valós számok halmazán oldd meg a következő egyenletet:

$$2021x - 2019 = \{x\}^2 + 2023\{x\},$$

ahol  $\{x\}$  az  $x$  valós szám törtrészét jelöli.

**2. feladat**

Igazold, hogy bármely  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$  esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

**3. feladat**

Adottak az  $x > 0$  és  $y > 0$  valós számok. Az  $ABC$  háromszögben a  $D$  és  $E$  pontok az  $AB$  illetve  $AC$  oldalakon találhatók úgy, hogy  $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{x}$  és  $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{y}$ .

Ha  $F$  a  $DE$  szakasz azon pontja, melyre  $\frac{DF}{EF} = y+1$  és  $\{G\} = AF \cap BC$ , akkor igazold, hogy  $BG > CG$ .

**4. feladat**

Igazold, hogy az  $x^2 + px + q = 0$  egyenletnek nincs racionális megoldása, ha  $p$  és  $q$  páratlan egész számok!

*Gazeta Matematică*

*Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!*

*Munkaidő 3 óra.*

*Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.*