INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a IX-a

BAREM DE CORECTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1

a) Arătați că $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$, pentru orice număr real *x* și orice număr natural nenul *n*.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left[\frac{[x+2023]}{3}\right]+\left[\frac{[x+2024]}{3}\right]+\left[\frac{[x+2025]}{3}\right]=2023x$$

S-a notat cu $[a]$, partea întreagă a numărului real a.

* * *

Soluție

a) $\left[\frac{x}{n}\right]=k,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{x}{n}=k+a,\ a\in[0,1)\Rightarrow\frac{[x]}{n}=k+\frac{[na]}{n}$. Se arată că $\left[\frac{[na]}{n}\right]=0\Rightarrow\left[\frac{[x]}{n}\right]=k$ 3p

b) Folosind punctul a), membrul stâng este egal cu:

$\left[\frac{x+2023}{3}\right]+\left[\frac{x+2024}{3}\right]+\left[\frac{x+2025}{3}\right]=\left[3\cdot\frac{x+2023}{3}\right]=[x+2023]$(Hermite) 2p

Ecuația devine $[x]=2023x-2023$, care are soluția $x=\frac{2024}{2023}$ 2p

SUBIECTUL 2

Se consideră o mulțime $G\subset\mathbb{R}$ care satisface simultan proprietățile:

i) $1\in G$; ii) dacă $x\in G$, atunci $\sqrt{x+2}\in G$; iii) dacă $\sqrt{x+3}\in G$, atunci $x+4\in G$.

Arătați că $\sqrt{2021}\in G$.

Supliment Gazeta Matematică nr.12/2022

Soluție

Demonstrăm prin inducție matematică, că $3n\in G,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

I. $1\in G\overset{ii}{\Rightarrow}\sqrt{3}\in G\Rightarrow\sqrt{0+3}\in G\overset{iii}{\Rightarrow}4\in G\overset{ii}{\Rightarrow}\sqrt{6}\in G\Rightarrow\sqrt{3+3}\in G\overset{iii}{\Rightarrow}7\in G\overset{ii}{\Rightarrow}\sqrt{9}=3\in G$ 3p

II. Presupunem că $3n\in G\overset{ii}{\Rightarrow}\sqrt{3n+2}\in G\Rightarrow\sqrt{(3n-1)+3}\in G\overset{iii}{\Rightarrow}3n+3\in G$ 2p

Dar $2021=3\cdot673+2$ și cum $3\cdot673\in G\overset{ii}{\Rightarrow}\sqrt{3\cdot673+2}=\sqrt{2021}\in G$ 2p

SUBIECTUL 3

Fie $x, y, z \in (0,\infty)$, cu proprietatea $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$.

Demonstrați inegalitatea: $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+zx+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{z^2+xy+3}}\ge 1$.

* * *

<u>Soluție</u>

Folosind lema lui Titu, membrul stâng $\ge \dfrac{9}{\sqrt{x^2+yz+3}+\sqrt{y^2+xz+3}+\sqrt{z^2+xy+3}}$ 3p

Dar $\left(1\cdot\sqrt{x^2+yz+3}+1\cdot\sqrt{y^2+xz+3}+1\cdot\sqrt{z^2+xy+3}\right)^2 \underset{\text{CBS}}{\le} 3\cdot\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz+9\right)\le$ 2p

$\le 3\cdot\left(2\left(x^2+y^2+z^2\right)+9\right)\le 81$ 1p

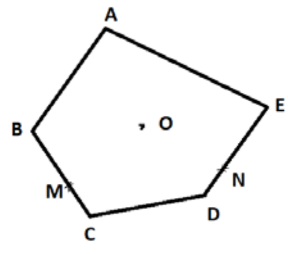
$\Rightarrow \sqrt{x^2+yz+3}+\sqrt{y^2+xz+3}+\sqrt{z^2+xy+3}\le 9 \Rightarrow$ membrul stâng ≥ 1 ....1p

SUBIECTUL 4 (7 puncte)

Fie *ABCDE* un pentagon înscris într-un cerc cu centrul în *O* iar punctele *M* și *N* pe laturile *BC*, respectiv *DE*, astfel încât $\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{EN}{ND}=2$. Considerăm $H_1,\ H_2,\ H_3$ ortocentrele triunghiurilor *ABC*, *ACD* respectiv *ADE*. Să se arate că dacă *O* este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$, atunci dreapta *AO* trece prin mijlocul segmentului *MN*.

Cătălin Zîrnă

<u>Soluție</u>



Teorema lui Sylvester:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH_1};\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OH_2};\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OH_3}$

Din $\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_2}+\overrightarrow{OH_3}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$ 3p

Cum $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OE}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OD}\Rightarrow \overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM};\ \ \overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{ON}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{ON}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$ 3p

Deci O este centrul de greutate al $\Delta AMN \Rightarrow AO$ mediană...1p

<u>Notă</u> : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.