OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1

Rezolvați sistemul $\begin{cases} 3^x + 3^y = 54 \\ x^{\log_3 y} = 3 \end{cases}$, unde $x, y \in (0, +\infty)$.

Cătălin Zîrnă

Soluție

$x^{\log_3 y} = 3 \Leftrightarrow \log_3 x \cdot \log_3 y = 1 > 0$, deci $\log_3 x$ și $\log_3 y$ au același semn $\Rightarrow x, y \in (0,1)$ sau $x, y \in (1, +\infty)$

Din relația $3^x + 3^y = 54 \Rightarrow x, y > 1$ 2p

$54 = 3^x + 3^y \geq 2\sqrt{3^{x+y}} = 2 \cdot 3^{\frac{x+y}{2}} \geq 2 \cdot 3^{\sqrt{xy}} \Rightarrow 3 \geq \sqrt{xy} \Rightarrow 1 \geq \frac{\log_3 x + \log_3 y}{2} (1)$ 2p

$\frac{\log_3 x + \log_3 y}{2} \geq \sqrt{\log_3 x \cdot \log_3 y} = 1 \ (2)$ 2p

Din (1) și (2) rezultă $\log_3 x = \log_3 y = 1 \Rightarrow x = y = 3$, care verifică..1p

SUBIECTUL 2

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f\left(x + f\left((1+x)y\right)\right) = (1+y) f(x) + 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică nr. 10/2022

Soluție

Dacă $x = 0 \Rightarrow f(f(y)) = (1+y) \cdot f(0) + 1, \ (\forall) y \in \mathbb{R}$

Dacă $x = -1 \Rightarrow f(-1 + f(0)) = (1+y) \cdot f(-1) + 1, \ (\forall) y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-1) = 0$ 2p

În egalitatea $f(f(y)) = (1+y) \cdot f(0) + 1$, înlocuim $y = -1 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow f(f(y)) = y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ injectivă 2p

$y = -1 \Rightarrow f(x + f(-x-1)) = 1 = f(0), \ (\forall) x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $x + f(-x-1) = 0, \ (\forall) x \in \mathbb{R}$ și obținem

$f(x) = x + 1$ 2p

$f(x) = x + 1$ verifică ecuația funcțională..1p

SUBIECTUL 3

Determinați numerele complexe distincte z_1 și z_2 cu $|z_1|=|z_2|=1$ și $1+\overline{z_1}\cdot z_2 = z_1+\overline{z_2}$.

* * *

Soluție

Din ipoteză $1+\frac{z_2}{z_1}=z_1+\frac{1}{z_1}\Big|\cdot z_1z_2 \Rightarrow z_1z_2+z_2^2=z_1^2z_2+z_1 \quad (1)$. Conjugând relația din ipoteză, obținem

$1+\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{z_1}+z_2\Big|\cdot z_1z_2 \Rightarrow z_1z_2+z_1^2=z_2+z_1z_2^2 \quad (2)$. Prin scăderea relațiilor $(1)-(2)\Rightarrow(z_2-z_1)(z_2+z_1)=$

$=z_1z_2(z_1-z_2)+(z_1-z_2)\Rightarrow(z_1-z_2)(z_1z_2+1-z_1-z_2)=0$ 4p

$\Rightarrow\underbrace{(z_1-z_2)}_{\neq 0}(z_1-1)(z_2-1)=0\Rightarrow z_1=1$ sau $z_2=1$..1p

Dacă $z_1=1\Rightarrow 1+z_2=1+\overline{z_2}\Rightarrow z_2=\overline{z_2}\Rightarrow z_2^2=1\Rightarrow z_2=\pm1$. Analog $z_2=1$.

Soluțiile $(z_1,z_2)\in\{(1,-1);(-1,1)\}$ 2p

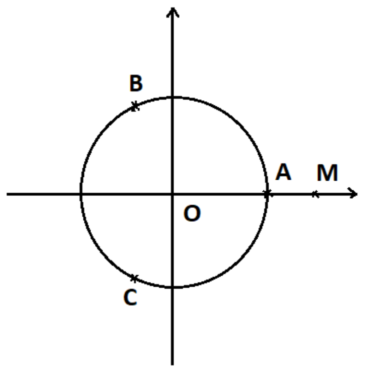
SUBIECTUL 4

Fie un triunghi echilateral *ABC* înscris într-un cerc cu centrul în *O* și raza 1. Dacă *M* este un punct din planul triunghiului astfel încât *A* se află pe segmentul *OM*, să se arate că

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}>\frac{3}{OM}.$$

* * *

Soluție



Considerăm reperul cartezian xOy astfel încât A (1,0).

ΔABC echilateral $A(1)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon^2)$ cu $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\Rightarrow\varepsilon^3=1$ și

$M(m)$, $m\in(1,+\infty)$ 2p

$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}>\frac{3}{OM}\Leftrightarrow\frac{1}{|m-1|}+\frac{1}{|m-\varepsilon|}+\frac{1}{|m-\varepsilon^2|}>\frac{3}{m}$.

Membrul stâng este $\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{|m-1|\cdot|m-\varepsilon|\cdot|m-\varepsilon^2|}}=$ 2p

$=\frac{3}{\sqrt[3]{\left|m^3-(1+\varepsilon+\varepsilon^2)m^2+(1\cdot\varepsilon+1\cdot\varepsilon^2+\varepsilon\cdot\varepsilon^2)m-1\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon^2\right|}}=\frac{3}{\sqrt[3]{|m^3-1|}}=$ 2p

$=\frac{3}{\sqrt[3]{m^3-1}}>\frac{3}{m}$ 1p

Notă : **Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.**