# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

**Etapa locală – Constanța, 11.02.2023**

**Clasa a VII-a**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**SUBIECTUL 1**

**a)** Se consideră numerele

$a=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{4}\right)^2}+\ldots+\sqrt{\left(\sqrt{2022}-\sqrt{2023}\right)^2}$ și

$b=\sqrt{2007+\sqrt{240+\sqrt{252+\sqrt{1+15}}}}-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{(-1)^{2022}}}}}$ .

Comparați numerele $a$ și $b$.

**b)** Determinați numerele naturale nenule $n$ pentru care $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n+2023}$ este număr natural.

***Soluție***

**a)** $a=\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|+\ldots+\left|\sqrt{2022}-\sqrt{2023}\right|$ ......1p

$a=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{2023}-\sqrt{2022}=\sqrt{2023}-1$ ......1p

$\sqrt{2007+\sqrt{240+\sqrt{252+\sqrt{1+15}}}}=\sqrt{2023}$ ......1p

$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{(-1)^{2022}}}}}=1, b=\sqrt{2023}-1\Rightarrow a=b$ ......1p

**b)** Dacă $n\geq 5\Rightarrow u\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n+2023\right)=3$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n+2023$ nu este p.p.$\Rightarrow$

$\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n+2023}\notin\mathbb{N}$ ......1p

Pentru $n\in\{1;3;4\}$ nu se obține număr natural......1p

Pentru $n=2\Rightarrow\sqrt{1\cdot 2+2023}=\sqrt{2025}=45\in\mathbb{N}$ ......1p

**SUBIECTUL 2**

**a)** Arătați că numărul $\sqrt{\overline{abab}}\notin\mathbb{N}$. Aflați numărul prim $\overline{ab}$, știind că $\left[\sqrt{\overline{abab}}\right]=73$ ( $[x]$ este partea întreagă a numărului x).

**b)** Determinați numerele întregi $x$ și $y$ pentru care $y\left(5-x^2\right)=4$.

***Soluție***

a) $\overline{abab}=\overline{ab}\cdot 101\neq$ pătrat perfect......1p

$73\leq\sqrt{\overline{abab}}<74$ ......1p

$5329\leq\overline{abab}<5476$ ......1p

$\overline{ab}\in\{53;54\}$, $\overline{ab}=53$ număr prim......1p

b) $y=\dfrac{4}{5-x^2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 5-x^2\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ......1p

$x^2\in\{1;3;4;6;7;9\}\Rightarrow x\in\{-3;-2;-1;1;2;3\}$ ......1p

$(x;y)\in\{(-3;-1),(-2;4),(-1;1),(1;1),(2;4),(3;-1)\}$ ......1p

**SUBIECTUL 3**

Fie *ABCD* un paralelogram cu centrul *O* și punctele *M*, *N*, *P* mijloacele segmentelor *OB*, *OC*, respectiv *OD*. Notăm $BN \cap CM = \{S\}$.

**a)** Demonstrați că $OS \parallel AB$ și calculați valoarea raportului $\frac{OS}{AB}$.

**b)** Determinați raportul dintre aria patrulaterului *ABNP* și aria paralelogramului *ABCD*.

***Supliment GM***

***<u>Soluție</u>***

**a)** BN și CM mediane în ΔBOC și $BN \cap CM = \{S\}$ ⇒ S centru de greutate ΔBOC...........1p

S centru de greutate ΔBOC și $OS \cap BC = \{T\}$ ⇒OT mediană ⇒T mijloc BC...............1p

T mijloc BC și O mijloc AC ⇒ TO linie mijlocie în Δ ABC ⇒TO //AB⇒OS//AB ........1p

S centru de greutate ΔBOC și OT mediană $\Rightarrow \frac{OS}{OT} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OS}{AB} = \frac{1}{3}$ ..........................1p

**b)** PN linie mijlocie în ΔDOC $\Rightarrow A_{\Delta PON} = \frac{1}{2} \cdot PN \cdot \frac{h_{\Delta COD}}{2} = \frac{A_{\Delta COD}}{4} = \frac{A_{ABCD}}{16}$ .....................1p

AP și BN mediane $\Rightarrow A_{\Delta AOP} = A_{\Delta BON} = \frac{A_{ABCD}}{8}$ ..................................................1p

$A_{ABNP} = A_{\Delta AOB} + A_{\Delta BON} + A_{\Delta AOP} + A_{\Delta PON} = \frac{9A_{ABCD}}{16} \Rightarrow \frac{A_{ABNP}}{A_{ABCD}} = \frac{9}{16}$ ...........................1p

**SUBIECTUL 4**

Se consideră triunghiul ascuțitunghic *ABC* și *AD* bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC, D \in BC$. Paralela prin *D* la *AB* intersectează pe *AC* în punctul *E*, iar paralela prin *D* la *AC* intersectează pe *AB* în punctul *F*.

**a)** Arătați că *AFDE* este romb.

**b)** Punctul *M* aparține dreptei *DF* astfel încât $AM \perp DF$, iar punctul *N* aparține dreptei *DE* astfel încât $AN \perp DE$. Notăm cu *P, R, Q,* respectiv *S* punctele de intersecție dintre dreptele *AM* și *EF*, *DP* și *AB*, *AN* și *EF*, respectiv *DQ* și *AC*.

i) Arătați că *E* este ortocentrul triunghiului *ADQ*.

ii) Arătați că *DR = DS*.

***<u>Soluție</u>***

**a)** Din *AF // DE, AE // DF* rezultă că *AFDE* este paralelogram....................................................1p

*AD* bisectoare rezultă că *AFDE* este romb.................................................................................1p

**b)** i) *AFDE* romb$\Rightarrow AD \perp EF, AD \cap EF = \{O\}$, *E* – ortocentrul triunghiului *ADQ*..................2p

ii) $DR \perp AB$, $DS \perp AC$ ..............................................................................................2p

*AD* bisectoarea unghiului *A*, rezultă *d(D, AB) = d(D, AC)*, adică *DR = DS*..............................1p

**<u>Notă</u> : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.**