OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1

Fie numărul $a = \sqrt{x^2 + y^2 - 12x + 2y + 37} + \sqrt{x^2 + y^2 - 22x + 4y + 125}$, unde x și y sunt numere reale care îndeplinesc condițiile $x + 5y - 1 = 0$ și $x \in [6; 11]$.

Arătați că valoarea numărului a nu depinde de x și y și este număr irațional.

Soluție

$a = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-11)^2 + (y+2)^2}$

$x + 5y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 6 = -5y - 5 = -5(y+1) \\ x - 11 = -5y - 10 = -5(y+2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{25(y+1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{25(y+2)^2 + (y+2)^2}$ 3p

$a = \sqrt{26}(|y+1| + |y+2|),\ x \in [6; 11] \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in [-2; -1] \Rightarrow |y+1| = -y - 1;\ |y+2| = y + 2$ 3p

$a = \sqrt{26}(-y - 1 + y + 2) = \sqrt{26} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 1p

SUBIECTUL 2

a) Fie x un număr real nenul astfel încât $x + \frac{1}{x} = \sqrt{10}$. Arătați că pentru numărul real x astfel definit, valoarea expresiei $E = \frac{x^4 - \sqrt{10}x^3 - \sqrt{10}x + 1}{x^2}$ este număr întreg.

b) Știind că numerele reale pozitive x, y sunt diferite și verifică relația $(3x + 4y)(x + y) = 14xy$, aflați valoarea expresiei $F = \sqrt{\frac{3x+5y}{3x-3y}}$.

(GM supliment)

Soluție

a) $E = x^2 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{10}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ 2p

$E = -2 \in \mathbb{Z}$ 1p

b) $(3x + 4y)(x + y) = 14xy \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 - 7xy = 0 \Rightarrow (x - y)(3x - 4y) = 0$ 2p

Obținem $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ (fals) sau $3x - 4y = 0 \Rightarrow 3x = 4y \Rightarrow F = 3$ 2p

SUBIECTUL 3

Pe planul paralelogramului $ABCD$, cu $AC = 4\ cm$ și $BD = 6\ cm$, se ridică (de aceeași parte a planului) perpendicularele $AM = x\ cm, BN = 2\ cm, CP = 7\ cm$ și $DQ = 6\ cm$.

a) Pentru ce valoare a numărului x punctele M, N, P și Q sunt coplanare?

b) Pentru $x = 1$, demonstrați că $MNPQ$ este dreptunghi.

<u>Soluție</u>

a) M, N, P, Q fiind coplanare, notăm $\alpha = (MNPQ)$.

$(ABN) \parallel (DCP), (ABN) \cap \alpha = MN, (DCP) \cap \alpha = QP \Rightarrow MN \parallel QP$

Analog $MQ \parallel NP \Rightarrow MNPQ$ paralelogram 3p

Fie $\{R\} = MP \cap NQ, \{O\} = AC \cap BD$. OR linie mijlocie în trapezele $AMPC$ și $BNQD \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1$ 2p

b) $MP = 2\sqrt{13}\ cm, NQ = 2\sqrt{13}\ cm$

$MNPQ$ paralelogram cu diagonalele congruente, deci dreptunghi 2p

SUBIECTUL 4

Se dau punctele A, B, C, D necoplanare astfel încât $AB \equiv AC$. Punctele E și F aparțin segmentelor AB și respectiv AC, astfel încât $AE \equiv CF$. Arată că dreapta determinată de mijloacele segmentelor AD și EF este paralelă cu planul (BCD).

<u>Soluție</u>

Fie M și N mijloace pentru EF și AD. Construim $EP \parallel AC, P \in BC$

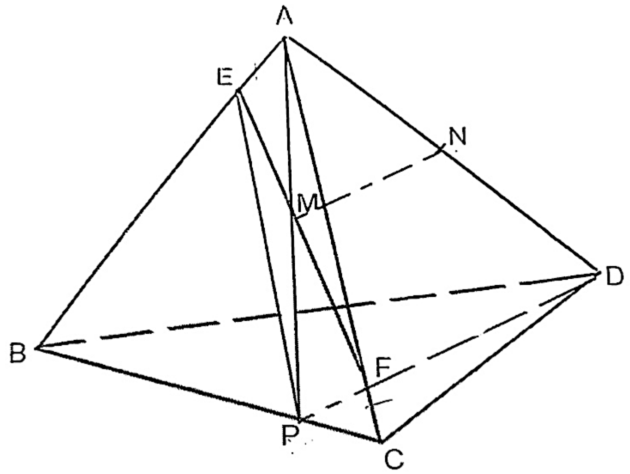
ΔABC isoscel $\Rightarrow \Delta EBP$ isoscel $\Rightarrow EP \equiv EB \Rightarrow EP \equiv AF$

$EP \parallel AF, EP \equiv AF \Rightarrow EPFA$ paralelogram 4p

AP și EF diagonale, M mijlocul lui $EF \Rightarrow M$ mijloc pentru $AP \Rightarrow MN$ linie mijlocie în ΔAPD

....1p

$MN \parallel PD, PD \subset (BCD) \Rightarrow MN \parallel (BCD)$ 2p



<u>Notă</u> : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.