OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a V-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1
Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ pentru care numărul $n = \overline{aaa} + 37(a+b)$ este pătrat perfect.

Soluție

$n = \overline{aaa} + 37(a+b) = 111a + 37(a+b) = 37(3a+a+b) = 37(4a+b)$............2p

n este pătrat perfect⇔există un număr natural nenul *k* astfel încât $4a + b = 37 \cdot k^2$ 1p

a, b cifre $\Rightarrow 4a + b \leq 4 \cdot 9 + 9 = 45 \Rightarrow 37 \cdot k^2 \leq 45 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 4a + b = 37$ 1p

b cifră impară, cazurile *b*=3, 7 nu convin

⇒numerele cu proprietatea dată sunt 79, 85 și 91 ....3p

SUBIECTUL 2
Ana cumpără 7 cărți, 3 caiete și 2 pixuri pentru care plătește 175 lei. Mihai cumpără 9 cărți și 5 pixuri și plătește 230 lei. George cumpără 8 caiete și 10 pixuri și plătește 140 lei. Toți cumpără același tip de cărți, caiete, respectiv pixuri. Cărțile au același preț, caietele la fel, iar pixurile sunt identice.

a) Aflați cât costă în total o carte, un caiet și un pix.
b) Aflați cât costă o carte.

Soluție

a)7 cărți.....3 caiete.....2 pixuri.....175 lei | $\cdot$ 5 ⇒

35 cărți.....15 caiete.....10 pixuri.....875 lei 1p

8 caiete ......10 pixuri ......140 lei

Deci 35 cărți ......7 caiete ......735 lei| : 7 ⇒ 5 cărți ......1 caiet ......105 lei 2p

Dar 7 cărți.....3 caiete.....2 pixuri.....175 lei ⇒

2 cărți.....2 caiete.....2 pixuri.....70 lei | : 2 ⇒

o carte, un caiet și un pix vor costa în total 35 lei 2p

b) 3 cărți.....3 caiete.....3 pixuri.....105 lei

7 cărți ......3 caiete......2 pixuri.....175 lei ⇒ 4 cărți costă cât un pix și 70 de lei 1p

29 de cărți costă 230+350 de lei ⇒ o carte costă 20 de lei 1p

SUBIECTUL 3

Într-o clasă sunt mai mult de 20 de elevi și mai puțin de 30 elevi. Unii au vârsta de 10 ani, alții de 11 ani. Știind că suma vârstelor tuturor elevilor din clasă este 250 de ani, aflați numărul elevilor care au 10 ani.

Soluție

Notăm cu a numărul elevilor care au 10 ani și cu b numărul elevilor care au 11 ani.

Avem $20 < a + b < 30$ și $a\cdot 10+b\cdot 11=250$ ……………..................................…......…...…2p

Observăm că $u(a \cdot 10) = 0$ și $u(250) = 0 \Rightarrow u(b \cdot 11) = 0 \Rightarrow u(b) = 0$...........................1p

Avem posibilitățile:

I. $b = 10 \Rightarrow a \cdot 10 + 10 \cdot 11 = 250$ 1p

$a = 14 \Rightarrow a + b = 10 + 14 = 24$ verifică condițiile problemei 1p

II. $b = 20 \Rightarrow a \cdot 10 + 20 \cdot 11 = 250$ 1p

$a = 3 \Rightarrow a + b = 20 + 3 = 23$ verifică condițiile problemei 1p

SUBIECTUL 4

Se consideră șirul tuturor numerelor naturale formate numai din cifrele 1 şi 2, cu cel mult 2023 cifre (primele numere din șir sunt: 1, 2, 11, 12, 21, 22, 111,…).

a) Să se determine câte numere sunt cu 4 cifre în șirul considerat.

b) Să se se arate că numărul termenilor acestui șir este mai mic decât 2^{2024} .

c) Să se arate că în acest șir există cel puțin un număr care împărțit la 2023 să dea restul 0.

Soluție

a) Un număr format numai din cifrele 1 şi 2 are pentru fiecare cifră 2 posibilităţi: 1 şi 2 ......1p

Sunt $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16$ numere cu 4 cifre în șirul considerat.. 1p

b) Pentru fiecare număr $1\leq k \leq 2023$, avem în șir 2^k numere cu k cifre …………………... 1p

Deci numărul de numere din șir este $N = 2 + 2^2 +2^3 +...+2^{2023}$ ……………………….…… 1p

$N = 2^{2024} – 2 <2^{2024}$…………………………………………………………….………. 1p

c) Considerăm cele 2023 numere formate numai cu cifra 1. Resturile împărțirii acestor numere la 2023 pot fi: 0, 1, 2, …, 2022. Dacă cel puțin un rest este 0 unul dintre numere se împarte exact la 2023. Dacă toate resturile sunt nenule, atunci există cel puțin două numere care dau același rest prin împărțirea la 2023……………..……………………...………. 1p

Diferenţa acestor numere este de forma $111...11000...0=11...1\cdot 10^n$, unde n este număr natural nenul, $n < 2023 \Rightarrow 11...1\cdot 10^n$ se împarte exact la 2023 $\Rightarrow$ 11...1 se împarte exact la 2023….. 1p