OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1

Se consideră mulțimea $H=\left\{A\in M_3(\mathbb{R}) \middle| \det(A)\neq 0, A^{-1}=A^2+A\right\}$.

a) Să se arate că matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\in H$.

b) Să se arate că dacă $A\in H$ și $P\in M_3(\mathbb{R})$ este o matrice inversabilă, atunci $P^{-1}\cdot A\cdot P\in H$.

c) Să se arate că mulțimea *H* conține cel puțin 2023 elemente.

* * *

Soluție

a).....................1p;

b)....................2p;

c) Alegem $P_a=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}^*$; A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\in H$,

$B_a=P_a^{-1}\cdot A\cdot P_a=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\in H,\ (\forall)a\in\mathbb{R}^*$. $B_{a_1}\neq B_{a_2},\ (\forall)a_1\neq a_2\Rightarrow$ H are o infinitate de elemente......4p

SUBIECTUL 2

a) Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că $Tr(A)=0$ dacă și numai dacă $\det(A-I_2)=\det(A+I_2)$.

b) Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det\left(A^k-I_2\right)=\det\left(A^k+I_2\right)$ pentru $k\in\{2021,2022\}$.

Demonstrați că $A^2=O_2$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2022

Soluție

a).....................2p;

b) Din a)$\Rightarrow \mathrm{Tr}\left(A^{2021}\right)=\mathrm{Tr}\left(A^{2022}\right)=0$. Notăm $\Delta=\det A$ și din Cayley-Hamilton pentru A^{2021} și A^{2022}

rezultă $A^{4042}=-\Delta^{2021}\cdot I_2$ și $A^{4044}=-\Delta^{2022}\cdot I_2\Rightarrow\Delta^{2022}\cdot I_2=\Delta^{2021}\cdot A^2$ 2p

Presupunem $\Delta\neq 0\Rightarrow A^2=\Delta\cdot I_2\Rightarrow A^{4044}=\Delta^{2022}\cdot I_2\neq-\Delta^{2022}\cdot I_2$ contradicție$\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow A^{4042}=O_2$ 2p

$\Rightarrow A^2=O_2$ 1p

SUBIECTUL 3

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \dfrac{x_n \cdot \sqrt{n}}{x_n^2 + \sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent către zero;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2 \cdot \sqrt{n}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Cătălin Zîrnă

Soluție

Prin inducție rezultă că $x_n > 0,\ (\forall)n \geq 1$ și din $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1,\ (\forall)n \geq 1$ rezultă șir strict descrescător. Deci

șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent..2p

Fie $x_n \underset{n\to\infty}{\to} L$ și presupunem că $L > 0$. Recurența este echivalentă cu $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}},\ (\forall)n \geq 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sumă telescopică} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{\sqrt{k}},\ (\forall)k \geq 1 \\ \text{Cum } (x_n)_{n\geq 1} \text{ strict descrescător si } x_n \to L, (\forall)n \geq 1, x_n > L, (\forall)n \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_1} > L \cdot \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$$

Dar $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_1} \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{1}{L} - \dfrac{1}{x_1} \in \mathbb{R}$, contradicție. Rezultă că $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ 2p

$x_n^2 \cdot \sqrt{n} = \dfrac{\sqrt{n}}{\dfrac{1}{x_n^2}}$ și cum $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ și strict crescător, avem:

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{x_{n+1}} + \dfrac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{x_n}\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + 1} \cdot \frac{1}{\dfrac{x_n}{x_{n+1}} + 1} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$ 3p

SUBIECTUL 4

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale definit prin $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = |x_n - x_{n-1}|,\ \forall n \geq 1.$

a) Să se arate că dacă $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

b) Fie $y_n = \max\{x_n, x_{n-1}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent, oricare ar fi $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$.

Nelu Chichirim

Soluție

a) $x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 1;\ x_5 = 1;\ x_6 = 0.$ Se demonstrează prin inducție că

$$P(n): \begin{cases} x_{3n} = 0 \\ x_{3n+1} = x_{3n+2} = 1 \end{cases},\ (\forall)n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{3n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \\ x_{3n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$$ este divergent................................2p

b) Cum $x_{n+1} = |x_n - x_{n-1}| \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq 0, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n \geq 0,\ (\forall)n \geq 2$ 1p

Dacă $n \geq 3 \Rightarrow x_{n+1} = |x_n - x_{n-1}| = \pm(x_n - x_{n-1})$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Dacă } x_{n+1} = x_n - x_{n-1} \leq x_n \leq \max(x_n, x_{n-1}) \\ \text{Dacă } x_{n+1} = -x_n + x_{n-1} \leq x_{n-1} \leq \max(x_n, x_{n-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow x_{n+1} \leq \max(x_n, x_{n-1}) \\ \text{Evident că } x_n \leq \max(x_n, x_{n-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \max(x_n, x_{n+1}) \leq \max(x_n, x_{n-1}) \Rightarrow y_{n+1} \leq y_n,\ (\forall)n \geq 3 \Rightarrow$ 3p

$(y_n)_{n\geq 3}$ descrescător si $y_n \geq 0,\ (\forall)n \geq 3$. Deci șirul $(y_n)_{n\geq 3}$ este convergent 1p

<u>Notă</u> : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.