OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a VI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1 (7 puncte)

Fie numărul $a=\underbrace{123412341234.........}_{2023 \text{ cifre}}$

a) Aflați restul împărțirii numărului a la 4

b) Aflați restul împărțirii numărului a la 12

Soluție

a) 2023:4=505 rest 3 ⇒ ultimele 3 cifre ale numărului a sunt 123……………………1p

Restul împărțirii numărului a la 4 este egal cu restul împărțirii numărului 23 la 4, deci restul este 3…………………………………………………………………..1p

b) Suma cifrelor numărului a este 505(1+2+3+4)+1+2+3=5050+6=5056……………..….1p

deci restul împărțirii numărului a la 3 este 1………………………………………...…..1p

a=4c+3 si a=3d+1, d>c ………………………………………………………...….1p

⇒3a=12c+9, 4a=12d+4⇒ a=12(d-c-1)+7……………………………………………1p

Deci, restul împărțirii numărului a la 12 este 7……………………………………….1p

SUBIECTUL 2 (7 puncte)

Fie numerele naturale *a* şi *b*, $a<b$, notăm $(a,b)=c.m.m.d.c.$, respectiv $[a,b]=c.m.m.m.c.$ al numerelor *a* şi *b* pentru care are loc relația $3\cdot[a,b]+5\cdot(a,b)=123$. Să se determine numerele naturale *a* şi *b*

Soluție

Fie $(a,b)=d$. Ştim că $[a,b]\cdot(a,b)=a\cdot b$ 1p

Dacă $(a,b)=d$ atunci există $m,n\in N^*$ astfel încât $(m,n)=1, a=md, b=nd$, avem

$3\cdot[a,b]+5\cdot(a,b)=123$, dar $3\cdot[a,b]\vdots 3$ şi $123\vdots 3\Rightarrow 5\cdot(a,b)\vdots 3\Rightarrow d\vdots 3$ d<25⇒ $d=3p$ 1p

$\dfrac{3md\cdot nd}{d}+5d=123\Rightarrow 3mnd+5d=123$ ………………………...…………………1p

$\Rightarrow d(3mn+5)=123\Rightarrow 3p(3mn+5)=123\Rightarrow p(3mn+5)=41$......................................1p

$3mn+5>5\Rightarrow p=1$ şi $3mn+5=41\Rightarrow mn=12$, $d=3$...1p

Cum $(m,n)=1$ şi $mn=12\Rightarrow (m,n)\in\{(1,12),(3,4)\}$ 1p

Aşadar $(a,b)\in\{(3,36),(9,12)\}$ 1p

SUBIECTUL 3 (7 puncte)

Se consideră mulțimile $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots 2021, 2023\}$,

$B=\{1, 2, 5, 6, 9, 10, \ldots 2017, 2018, 2021, 2022\}$ și se notează cu C intersecția lor.

a) Determinați cardinalul mulțimilor A și C.

b) Arătați că orice submulțime a mulțimii C, formată din 254 de elemente, conține cel puțin două elemente a căror sumă este 2022.

<u>Soluție</u>

a) Card A= 1012…………………………………………………………………..…..2p

$C=\{1, 5, 9, 13, 17, .., 2021\}=\{ x=4k+1 / k\in \{0,1,\ldots,505\}\} \Rightarrow$ card C=506……….2p

b) Perechile (1, 2021), (5, 2017), ……..(1009, 1013) au suma 2022…………………1p

Fie X o submulțime a lui C cu 254 elemente. Dacă X conține una dintre perechile date atunci ar conține două elemente cu suma 2022. Dacă X nu ar conține niciuna dintre perechi atunci ar avea cel mult 253 elemente (câte unul din fiecare pereche) și tot i-ar mai trebui un element$\Longrightarrow$ două elemente au suma 2022…………….…………………2p

SUBIECTUL 4 (7 puncte)

Considerăm unghiurile ∢AOC, ∢COD, ∢DOB cu interioarele disjuncte, astfel încât împreună formează unghiul alungit ∢AOB. Fie (OE și (OF bisectoarele unghiurilor ∢AOC, respectiv ∢DOB.

a) Știind că $\sphericalangle EOF=120^0$, determinați măsura unghiului ∢COD.

b) Dacă, în plus, ducem OM perpendiculară pe OC astfel încât punctele M și C să fie de aceeași parte a dreptei AB și $\sphericalangle FOM=10^0$, aflați măsurile unghiurilor ∢AOC și ∢DOB.

<u>Soluție</u>

a) Fie ∢COD=a , ∢AOC=2x și ∢DOB =2y $\Rightarrow 2x+2y+a=180^o$ (1)..............................1p

(OE este bisectoare => ∢AOE= ∢EOC=x și (OF este bisectoare => ∢DOF = ∢FOB=y => $x+y+a=120^o$ (2) $\Rightarrow \sphericalangle COD=60^0$...2p

b) Cazul 1. ducem OM $\perp$ OC, OM interioară unghiului ∢DOF=> $\sphericalangle DOM=y-10^0$

$60^0+ y-10^0= 90^0 \Rightarrow y=40^0 \Rightarrow \sphericalangle DOB=80^0$ și $\sphericalangle AOC=40^0$ 2p

Cazul 2. ducem OM $\perp$ OC, OM interioară unghiului ∢FOB=> $\sphericalangle DOM=y+10^0$

$60^0+ y+10^0= 90^0 \Rightarrow y=20^0 \Rightarrow \sphericalangle DOB=40^0$ și $\sphericalangle AOC=80^0$.......................................2p

<u>Notă</u> : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.