OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1

a) Arătați că $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$, pentru orice număr real *x* și orice număr natural nenul *n*.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left[\frac{[x+2023]}{3}\right]+\left[\frac{[x+2024]}{3}\right]+\left[\frac{[x+2025]}{3}\right]=2023x$$

S-a notat cu $[a]$, partea întreagă a numărului real a.

* * *

SUBIECTUL 2

Se consideră o mulțime $G\subset\mathbb{R}$ care satisface simultan proprietățile:

i) $1\in G$; ii) dacă $x\in G$, atunci $\sqrt{x+2}\in G$; iii) dacă $\sqrt{x+3}\in G$, atunci $x+4\in G$.

Arătați că $\sqrt{2021}\in G$.

Supliment Gazeta Matematică nr.12/2022

SUBIECTUL 3

Fie $x,y,z\in(0,\infty)$, cu proprietatea $x^2+y^2+z^2\le 9$.

Demonstrați inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+zx+3}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+xy+3}}\ge 1$.

* * *

SUBIECTUL 4

Fie *ABCDE* un pentagon înscris într-un cerc cu centrul în *O* iar punctele *M* și *N* pe laturile *BC*, respectiv *DE*, astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{EN}{ND}=2$. Considerăm $H_1,\ H_2,\ H_3$ ortocentrele triunghiurilor *ABC*, *ACD* respectiv *ADE*. Să se arate că dacă *O* este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$, atunci dreapta *AO* trece prin mijlocul segmentului *MN*.

Cătălin Zîrnă

Notă:
Timp de lucru: **3** ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1

Rezolvați sistemul $\begin{cases} 3^x + 3^y = 54 \\ x^{\log_3 y} = 3 \end{cases}$, unde $x, y \in (0, +\infty)$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 2

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f\left(x + f\left((1+x)y\right)\right) = (1+y)f(x) + 1$, pentru orice $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică nr. 10/2022

SUBIECTUL 3

Determinați numerele complexe distincte z_1 și z_2 cu $|z_1| = |z_2| = 1$ și $1 + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 + \overline{z_2}$.

* * *

SUBIECTUL 4

Fie un triunghi echilateral *ABC* înscris într-un cerc cu centrul în *O* și raza 1. Dacă *M* este un punct din planul triunghiului astfel încât *A* se află pe segmentul *OM*, să se arate că $\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC} > \dfrac{3}{OM}$.

* * *

Notă:
Timp de lucru: **3** ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Se consideră mulțimea $H = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \middle| \det(A) \neq 0, A^{-1} = A^2 + A \right\}$.

a) Să se arate că matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in H$.

b) Să se arate că dacă $A \in H$ și $P \in M_3(\mathbb{R})$ este o matrice inversabilă, atunci $P^{-1} \cdot A \cdot P \in H$.

c) Să se arate că mulțimea H conține cel puțin 2023 elemente.

*****

SUBIECTUL 2

a) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că $Tr(A) = 0$ dacă și numai dacă $\det(A - I_2) = \det(A + I_2)$.

b) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A^k - I_2) = \det(A^k + I_2)$ pentru $k \in \{2021, 2022\}$. Demonstrați că $A^2 = O_2$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2022

SUBIECTUL 3

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n \cdot \sqrt{n}}{x_n^2 + \sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent către zero;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2 \cdot \sqrt{n}\right) = \frac{1}{4}$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 4

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale definit prin $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = |x_n - x_{n-1}|$, $\forall n \geq 1$.

a) Să se arate că dacă $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

b) Fie $y_n = \max\{x_n, x_{n-1}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent, oricare ar fi $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$.

Nelu Chichirim

Notă:
Timp de lucru: **3** ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b, c \in G$ care au proprietatea că $a^k b^k = c^k$, pentru orice $k \in \{3, 4, 5\}$.

Demonstrați că $ab = c = ba$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2022

SUBIECTUL 2

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \int_0^x t \sin 2t\,dt$, respectiv

$g(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

a) Demonstrați că funcția g este descrescătoare.

b) Arătați că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 11/2022

SUBIECTUL 3

Demonstrați că $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ nu este izomorf cu $(\mathbb{Z}, +)$, unde $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ este produs direct de grupuri.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 4

a) Determinați primitivele funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x \cdot e^{-x}$.

b) Să se arate că există o infinitate de funcții nemonotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(x) = f(x) - |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Cătălin Zîrnă

Notă:
Timp de lucru: **3** ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.