OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a V-a

SUBIECTUL 1

Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ pentru care numărul $n = \overline{aaa} + 37(a + b)$ este pătrat perfect.

SUBIECTUL 2

Ana cumpără 7 cărți, 3 caiete și 2 pixuri pentru care plătește 175 lei. Mihai cumpără 9 cărți și 5 pixuri și plătește 230 lei. George cumpără 8 caiete și 10 pixuri și plătește 140 lei. Toți cumpără același tip de cărți, caiete, respectiv pixuri. Cărțile au același preț, caietele la fel, iar pixurile sunt identice.

a) Aflați cât costă în total o carte, un caiet și un pix.

b) Aflați cât costă o carte.

SUBIECTUL 3

Într-o clasă sunt mai mult de 20 de elevi și mai puțin de 30 elevi. Unii au vârsta de 10 ani, alții de 11 ani. Știind că suma vârstelor tuturor elevilor din clasă este 250 de ani, aflați numărul elevilor care au 10 ani.

SUBIECTUL 4

Se consideră șirul tuturor numerelor naturale formate numai din cifrele 1 și 2, cu cel mult 2023 cifre (primele numere din șir sunt: 1, 2, 11, 12, 21, 22, 111,…).

a) Să se determine câte numere sunt cu 4 cifre în șirul considerat.

b) Să se se arate că numărul termenilor acestui șir este mai mic decât 2^{2024} .

c) Să se arate că în acest șir există cel puțin un număr care împărțit la 2023 să dea restul 0.

Notă:
Timp de lucru: **2** ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a VI-a

SUBIECTUL 1

Fie numărul $a=\underbrace{123412341234\ldots\ldots\ldots}_{2023 \text{ cifre}}$

a) Aflați restul împărțirii numărului a la 4

b) Aflați restul împărțirii numărului a la 12

SUBIECTUL 2

Fie numerele naturale a şi b, $a<b$, notăm $(a,b)=c.m.m.d.c.$, respectiv $[a,b]=c.m.m.m.c.$ al numerelor a şi b pentru care are loc relaţia $3\cdot[a,b]+5\cdot(a,b)=123$. Să se determine numerele naturale a şi b

SUBIECTUL 3

Se consideră mulțimile A={1, 3, 5, 7, 9, 11,…2021, 2023},
B={1, 2, 5, 6, 9, 10,…2017,2018,2021,2022} și se notează cu C intersecția lor.

a) Determinați cardinalul mulțimilor A și C.

b) Arătați că orice submulțime a mulțimii C, formată din 254 de elemente, conține cel puțin două elemente a căror sumă este 2022.

SUBIECTUL 4

Considerăm unghiurile ∢AOC, ∢COD, ∢DOB cu interioarele disjuncte, astfel încât împreună formează unghiul alungit ∢AOB. Fie (OE și (OF bisectoarele unghiurilor ∢AOC, respectiv ∢DOB.

a) Știind că ∢EOF=120^0, determinați măsura unghiului ∢COD.

b) Dacă, în plus, ducem OM perpendiculară pe OC astfel încât punctele M și C să fie de aceeași parte a dreptei AB și ∢FOM=10^0, aflați măsurile unghiurilor ∢AOC și ∢DOB.

Notă:
Timp de lucru: **2** ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Se consideră numerele

$$a=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{4}\right)^2}+\ldots+\sqrt{\left(\sqrt{2022}-\sqrt{2023}\right)^2} \text{ și}$$

$$b=\sqrt{2007+\sqrt{240+\sqrt{252+\sqrt{1+15}}}}-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{(-1)^{2022}}}}}\,.$$

Comparați numerele a și b.

b) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n+2023}$ este număr natural.

SUBIECTUL 2

a) Arătați că numărul $\sqrt{\overline{abab}}\notin\mathbb{N}$. Aflați numărul prim $\overline{ab}$, știind că $\left[\sqrt{\overline{abab}}\right]=73$ ($[x]$ este partea întreagă a numărului x).

b) Determinați numerele întregi x și y pentru care $y\left(5-x^2\right)=4$.

SUBIECTUL 3

Fie $ABCD$ un paralelogram cu centrul O și punctele M, N, P mijloacele segmentelor OB, OC, respectiv OD. Notăm $BN\cap CM=\{S\}$.

a) Demonstrați că $OS \parallel AB$ și calculați valoarea raportului $\dfrac{OS}{AB}$.

b) Determinați raportul dintre aria patrulaterului $ABNP$ și aria paralelogramului $ABCD$.

Supliment GM

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC, D\in BC$. Paralela prin D la AB intersectează pe AC în punctul E, iar paralela prin D la AC intersectează pe AB în punctul F.

a) Arătați că $AFDE$ este romb.

b) Punctul M aparține dreptei DF astfel încât $AM\perp DF$, iar punctul N aparține dreptei DE astfel încât $AN\perp DE$. Notăm cu P, R, Q, respectiv S punctele de intersecție dintre dreptele AM și EF, DP și AB, AN și EF, respectiv DQ și AC.

i) Arătați că E este ortocentrul triunghiului ADQ.

ii) Arătați că $DR = DS$.

Notă:
Timp de lucru: **3** ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1

Fie numărul $a = \sqrt{x^2 + y^2 - 12x + 2y + 37} + \sqrt{x^2 + y^2 - 22x + 4y + 125}$, unde x și y sunt numere reale care îndeplinesc condițiile $x + 5y - 1 = 0$ și $x \in [6; 11]$.

Arătați că valoarea numărului a nu depinde de x și y și este număr irațional.

SUBIECTUL 2

a) Fie x un număr real nenul astfel încât $x + \frac{1}{x} = \sqrt{10}$. Arătați că pentru numărul real x astfel definit, valoarea expresiei $E = \frac{x^4 - \sqrt{10}x^3 - \sqrt{10}x + 1}{x^2}$ este număr întreg.

b) Știind că numerele reale pozitive x, y sunt diferite și verifică relația:

$(3x + 4y)(x + y) = 14xy$, aflați valoarea expresiei $F = \sqrt{\frac{3x+5y}{3x-3y}}$.

supliment GM

SUBIECTUL 3

Pe planul paralelogramului $ABCD$, cu $AC = 4\ cm$ și $BD = 6\ cm$, se ridică (de aceeași parte a planului) perpendicularele $AM = x\ cm, BN = 2\ cm, CP = 7\ cm$ și $DQ = 6\ cm$.

a) Pentru ce valoare a numărului x punctele M, N, P și Q sunt coplanare?

b) Pentru $x = 1$, demonstrați că $MNPQ$ este dreptunghi.

SUBIECTUL 4

Se dau punctele A, B, C, D necoplanare astfel încât $AB \equiv AC$. Punctele E și F aparțin segmentelor AB și respectiv AC, astfel încât $AE \equiv CF$. Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor AD și EF este paralelă cu planul (BCD).

Notă:
Timp de lucru: **3** ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.