OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b, c \in G$ care au proprietatea că $a^k b^k = c^k$, pentru orice $k \in \{3, 4, 5\}$.

Demonstrați că $ab = c = ba$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2022

Soluție

$a^3b^3 = c^3$, $a^4b^4 = c^4$, $a^5b^5 = c^5$.

$c^4 = a^4b^4 = a^3b^3c \Rightarrow ab^4 = b^3c$

$c^5 = a^5b^5 = a^4b^4c \Rightarrow ab^5 = b^4c$ 2p

$b^4c = ab^5 = ab^4b = b^3cb \Rightarrow bc = cb$ 2p

$ab^4 = b^3c \Rightarrow ab^4 = cb^3 \Rightarrow ab = c$ 2p

$bab = bc = cb \Rightarrow ba = c$ 1p

SUBIECTUL 2

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \int_0^x t \sin 2t dt$,

respectiv $g(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$.

a) Demonstrați că funcția g este descrescătoare.

b) Arătați că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 11/2022

Soluție

a) $g'(x) = \arccos\sqrt{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) = \arccos|\cos x| \cdot (-2\sin x \cdot \cos x) =$

$= -2x \sin x \cdot \cos x \le 0, \ (\forall) x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ g descrescătoare..2p

b) Fie $h : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \ h(x) = f(x) + g(x)$

$h'(x) = 0, \ (\forall) x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ h constantă 2p

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \sin 2t dt = \frac{\pi}{4}$ 2p

$\Rightarrow h(x) = \frac{\pi}{4}, \ (\forall) x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 1p

SUBIECTUL 3

Demonstrați că $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ +)$ nu este izomorf cu $(\mathbb{Z},\ +)$, unde $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ +)$ este produs direct de grupuri.

Nelu Chichirim

Soluție

Presupunem prin absurd că există un izomorfism de grupuri $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, rezultă că

$f\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right)=f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2),\ (\forall)x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{Z}$ și f bijectivă.......................1p

f morfism $\Rightarrow f\left(k\cdot(x,y)\right)=k\cdot f(x,y),\ (\forall)k\in\mathbb{Z},(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$ 1p

Avem $(1,0)\neq(0,1)\neq(0,0)\overset{f\ bij}{\Rightarrow} f(1,0)\neq f(0,1)\neq f(0,0)=0$

Dacă $f(1,0)\overset{not}{=}k\in\mathbb{Z}$ și $f(0,1)\overset{not}{=}s\in\mathbb{Z}$, atunci rezultă $k\neq s\neq 0\neq k$ 2p

$$\left.\begin{array}{l} f\left(s(1,0)\right)=s\cdot f(1,0)\Rightarrow f(s,0)=s\cdot k \\ f\left(k(0,1)\right)=k\cdot f(0,1)\Rightarrow f(0,k)=k\cdot s \end{array}\right\}\Rightarrow f(s,0)=f(0,k)\overset{f\ inj}{\Rightarrow}(s,0)=(0,k)\Rightarrow s=0=k$$, fals......3p

SUBIECTUL 4

a) Determinați primitivele funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x\cdot e^{-x}$.

b) Să se arate că există o infinitate de funcții nemonotone $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admit o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(x)=f(x)-|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cătălin Zîrnă

Soluție

a) $\int x\cdot e^{-x}dx=-(x+1)e^{-x}+C$ 2p

b) $F(x)=F'(x)-|x|\Leftrightarrow F'(x)-F(x)=|x|\ \Big|\cdot e^{-x}\Rightarrow\left(F(x)\cdot e^{-x}\right)'=|x|\cdot e^{-x}=\begin{cases}x\cdot e^{-x},x\geq 0\\ -x\cdot e^{-x},x<0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)\cdot e^{-x}=\begin{cases}-(x+1)e^{-x}+c_1,x\geq 0\\ +(x+1)e^{-x}+c_2,x<0\end{cases}$. Din continuitate rezultă $-1+c_1=1+c_2$ 3p

$\Rightarrow F(x)\cdot e^{-x}=\begin{cases}-(x+1)e^{-x}+c,x\geq 0\\ +(x+1)e^{-x}+c-2,x<0\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}-(x+1)+c\cdot e^{x},x\geq 0\\ +(x+1)+(c-2)\cdot e^{x},x<0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}c\cdot e^{x}-1,x\geq 0\\ (c-2)\cdot e^{x}+1,x<0\end{cases},\ c\in\mathbb{R}$ 1p

și din f continuă, alegem $c\in(0,2)\Rightarrow$ funcția este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$ și strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ 1p

<u>Notă</u> : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.