OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 24.02.2023
CLASA a X-a

Problema I. (7 puncte)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea: $f(f(x))+2022\cdot f(x)=x^{2023}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că funcţia f este injectivă.

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național ,,Emil Racoviță'' Cluj-Napoca

Problema II. (7 puncte)

Determinați numerele reale pozitive x, y, z pentru care este adevărată egalitatea:

$$x\cdot y^{\log_2 y}+y\cdot z^{\log_2 z}+z\cdot x^{\log_2 x}=\frac{3}{\sqrt[4]{2}}$$

prof. Alin Mizgan, Liceul Teoretic Petru Maior Gherla

Problema III. (7 puncte)

a) Dacă $x+y+z=0, \forall\, x,y,z\in R^*$ demonstrați că $\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|$.

Gazeta Matematică

b) Fie $a,b,c\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. Arătați că: $\log_a ab+\log_b bc+\log_c ca\geq 6$.

Adaptare după o problemă de la OLM 2012, Cluj

Problema IV. (7 puncte)

Determinați toate tripletele (x,y,z) de numere complexe având modulul 1 care satisfac simultan condițiile:

a) $xy+yz+zx=3$
b) $(x^2+2yz-3)(y^2+2zx-3)(z^2+2xy-3)=2020(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$

pr.27843 GM nr.5/2020

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!