OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 24.02.2023
CLASA a XI-a

Problema I. (7 puncte)

Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC și determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ bc & b+c & a^2 \\ ca & c+a & b^2 \end{vmatrix}$. Să se arate că $\Delta = 0$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

prof. Camelia Maria Chindriș, Colegiul Național „Andrei Mureșanu" Dej
prof. Corina Livia Dragoș, Colegiul Național „Andrei Mureșanu" Dej

Problema II. (7 puncte)

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Arătați că:

a) $A^2 = 8A - 15I_2$ și $B^2 = 8B - 15I_2$.
b) $A^n - B^n = \frac{1}{2}(5^n - 3^n)(A - B)$, pentru orice $n \in N^*$

prof. Camelia Maria Chindriș, Colegiul Național „Andrei Mureșanu" Dej
prof. Corina Livia Dragoș, Colegiul Național „Andrei Mureșanu" Dej

Problema III. (7 puncte)

Să se studieze convergența șirului $a_n = \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{3^5}} + \frac{1}{3\sqrt[4]{4^7}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt[n+1]{(n+1)^{2n+1}}}$, $n \geq 1$.

prof. Jecan Eugen, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Problema IV. (7 puncte)

Se consideră dezvoltarea binomială $\left(44 + \sqrt{2023}\right)^n = a_n + b_n \cdot \sqrt{7}$, unde $n \in \mathbb{N}, a_n;\ b_n \in \mathbb{Q}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

prof. Kerekeș Sorina Natalia, Colegiul Național "Gheorghe Șincai" Cluj-Napoca

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!