Barem clasa a XII-a
(OLM 2023-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

a) Determinarea elementului neutru $e = 2$ ....(1p)

Fie $x \in [0,2]$ un element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$*$”.

Atunci există $x' \in [0,2]$ astfel încât $x * x' = 2$, de unde $x' = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$..(1p)

Deorece $x' \in [0,2]$, obținem $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$. Cum $x \in [0,2]$, deducem că $x \in \{0,2\}$ sunt singurele elemente simetrizabile din M...(2p)

b) Observăm că $x * y = (x-1)(y-1) + 1, \forall x, y \in M$.

Se dem. prin inducție că $x_1 * x_2 * \cdots * x_n = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdots (x_n - 1) + 1, \forall x_1, \cdots x_n \in M$ ....(2p)

Atunci $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{2023} = \frac{1}{2023} + 1 = \frac{2024}{2023}$, ...(1p)

Problema II. (7 puncte)

$\int_0^a \left(sinx + \sqrt{3}cosx\right)dx = -\cos x|_0^a + \sqrt{3}sinx|_0^a = 1 + \sqrt{2}$ ....(3p)

$sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$ ....(2p)

$k = 0 \Rightarrow a = \frac{5\pi}{12} \in (0, \pi)$, $k = 1 \Rightarrow a = \frac{11\pi}{12} \in (0, \pi)$, $k = 2 \Rightarrow a \notin (0, \pi)$, $k = -1 \Rightarrow a \notin (0, \pi)$................(2p)

Problema III. (7 puncte)

Avem: $6x^3 - 9x^2 + 7x - 2 = (2x-1)(3x^2 - 3x + 2) = \frac{1}{4}(2x-1)\left[3(2x-1)^2 + 5\right]$, ...(2p)

$\left(3x^2 - 3x + 2\right)^n = \frac{1}{4^n}\left(12x^2 - 12x + 8\right)^n = \frac{1}{4^n}\left[3(2x-1)^2 + 5\right]^n$; ....(2p)

prin urmare, integrala devine $I_n = 4^{n-1}\int_0^1 \frac{(2x-1)\left[3(2x-1)^2 + 5\right]dx}{\left[3(2x-1)^2 + 5\right]^n} = 4^{n-1}\int_0^1 \frac{(2x-1)dx}{\left[3(2x-1)^2 + 5\right]^{n-1}}$ ....(1p)

Făcând schimbarea de variabilă $2x - 1 = t$, aceasta devine: $I_n = 4^{n-1}\int_{-1}^1 \frac{tdt}{2\left(3t^2 + 5\right)^{n-1}}$.

Cum funcţia $f : [-1,1] \to R$, $f(t) = \frac{t}{\left(3t^2 + 5\right)^{n-1}}$ este impară, rezultă că $I_n = 0 \in \mathbb{Q}, \forall n \in N$ ....(2p)

Problema IV. (7 puncte)

Relația dată este echivalentă cu:$f(x)f'(x) = -g(x)g'(x)(f^2(x) + 1) \Leftrightarrow \frac{2f(x)f'(x)}{f^2(x)+1} = -2g(x)g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$....(2p)

Prin integrare se obține imediat: $\ln(f^2(x) + 1) = -g^2(x) + c$, $x \in \mathbb{R}$..(2p)

Din $f(0) = g(0) = 0$ se obține $c = 0$, deci: $\ln(f^2(x) + 1) = -g^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$....................................(2p)

Deoarece membrul stâng este pozitiv, iar membrul drept este negativ pentru orice x, avem:

$\ln(f^2(x) + 1) = -g^2(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ....(1p)