Barem clasa a VIII-a
(OLM 2023-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

Notăm $a = x + 2023$, $b = y + 1$ şi obţinem $(a+b)^2 = a \cdot b$,..(2p)

$a^2 + a \cdot b + b^2 = 0$, ...(1p)

adică $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = 0$. ....(2p)

Deoarece $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$, $\frac{3b^2}{4} \geq 0$ pentru orice numere reale a, b..(1p)

obţinem $b = 0, a = 0$ şi atunci $x = -2023, y = -1$. ....(1p)

Problema II. (7 puncte)

Aplicând inegalitatea mediilor avem

$\sqrt{x_1(x_1+1)} + \sqrt{x_2(x_2+4)} + \cdots + \cdots + \sqrt{x_n(x_n+3n-2)} \leq \frac{x_1+x_1+1}{2} + \frac{x_2+x_2+4}{2} + \cdots + \frac{x_n+x_n+3n-2}{2}$...........(2p)

$\sqrt{x_1(x_1+1)} + \sqrt{x_2(x_2+4)} + \cdots + \cdots + \sqrt{x_n(x_n+3n-2)} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \frac{1}{2}[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]$...(1p)

Dar $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{(3n-1)n}{2}$..(2p)

și atunci $\sqrt{x_1(x_1+1)} + \sqrt{x_2(x_2+4)} + \cdots + \cdots + \sqrt{x_n(x_n+3n-2)} \leq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(3n-1)n}{4}$.............................(1p)

de unde $\sqrt{x_1(x_1+1)} + \sqrt{x_2(x_2+4)} + \cdots + \cdots + \sqrt{x_n(x_n+3n-2)} \leq \frac{5n^2+n}{4}$...(1p)

Problema III. (7 puncte)

În $\triangle DCD'$ dreptunghic, din teorema lui Pitagora, iar apoi T. catetei obtinem $CD' = 10cm$ si $D'M = \frac{32}{5}cm$.........(2p)

Analog în $\triangle DBD'$ obtinem $BD' = 2\sqrt{41}\, cm$ si $D'N = \frac{32\sqrt{41}}{41}\, cm$ ....(2p)

$\triangle D'MN \sim \triangle D'BC (Criteriul\ L.U.L.) \Rightarrow \frac{D'M}{D'B} = \frac{MN}{BC} = \frac{D'N}{D'C} \Rightarrow$..(2p)

$\Rightarrow MN = \frac{128\sqrt{41}}{205}$..(1p)

Problema IV. (7 puncte)

AB, *BC* și *CA* sunt invers proporționale cu numerele $0,(3)$, $0,25$ și $0,2$, $\Rightarrow AB \cdot \frac{1}{3} = BC \cdot \frac{1}{4} = AC \cdot \frac{1}{5} = k$,..........(2p)

deci aplicând *R.T.P.* în triunghiul *ABC* obținem că triunghiul este dreptunghic cu măsura unghiului *ABC* egală cu 90^0. Prin urmare $AB \perp BC$. ....(2p)

Dacă $AP = AQ$ avem că triunghiul *APQ* este isoscel. Din simetrie rezultă că $BP = BQ$. ....(1p)

Cum *AB* este mediană în triunghiul *APQ* isoscel rezultă că $AB \perp PQ$. ....(1p)

Cum $\left.\begin{array}{l} AB \perp BC \\ AB \perp PQ \\ BC \cap PQ = \{B\} \\ BC, PQ \subset (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCD)$..(1p)