Barem clasa a XI-a
(OLM 2023-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

Aplicând proprietățile determinanților, avem $\Delta=\begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ b(c-a) & c-a & a^2-c^2 \\ a(c-b) & c-b & b^2-c^2 \end{vmatrix}=$ ....**(1p)**

$=(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ b & 1 & -(a+c) \\ a & 1 & -(b+c) \end{vmatrix}=(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ b & 1 & -(a+c) \\ a-b & 0 & a-b \end{vmatrix}=$ ....**(2p)**

$=(c-a)(c-b)(a-b)\begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ b & 1 & -(a+c) \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a-c)(c-b)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$..........**(2p)**

$\Delta=0 \Leftrightarrow a=b$ sau $b=c$ sau $c=a$, adică triunghiul ABC este isoscel. ....**(2p)**

Problema II. (7 puncte)

a) Se verifică prin calcul direct sau cu ecuația lui Cayley- Hamilton. ....**(2p)**

b) Se dem. prin inducție matematică $P(n)$: $A^n-B^n=\frac{1}{2}(5^n-3^n)(A-B)$

I. Etapa de verificare : $A^1-B^1=\frac{1}{2}(5^1-3^1)(A-B)$..**(2p)**

II. Etapa de demonstrație :presupunem $P(k)$adevărată pentru orice $k\le n$ și vom arăta că $P(n+1)$este adevărată

Știm că $A^2=8A-15I_2$, de unde prin înmulțire cu A^{n-1}, obținem $A^{n+1}=8A^n-15A^{n-1}$ și analog $B^{n+1}=8B^n-15B^{n-1}$...**(1p)**

Se efectuează calculele $A^{n+1}-B^{n+1}=8(A^n-B^n)-15(A^{n-1}-B^{n-1})=$

$8\cdot\frac{1}{2}(5^n-3^n)(A-B)-15\cdot\frac{1}{2}(5^{n-1}-3^{n-1})(A-B)=\frac{1}{2}(5^{n+1}-3^{n+1})(A-B)$ ....**(2p)**

Problema III. (7 puncte)

În mod evident şirul este strict crescător şi mărginit inferior...**(1p)**

Avem: $\dfrac{1}{k\sqrt[k+1]{(k+1)^{2k+1}}}=\dfrac{1}{k(k+1)\sqrt[k+1]{(k+1)^k}}=\dfrac{k+1-k}{k(k+1)\sqrt[k+1]{(k+1)^k}}=$

$=\dfrac{1}{k\sqrt[k+1]{(k+1)^k}}-\dfrac{1}{(k+1)\sqrt[k+1]{(k+1)^k}}<\dfrac{1}{k\sqrt[k+1]{(k+1)^k}}-\dfrac{1}{(k+1)\sqrt[k+2]{(k+2)^{k+1}}}$ deoarece

$\dfrac{1}{(k+1)\sqrt[k+1]{(k+1)^k}}>\dfrac{1}{(k+1)\sqrt[k+2]{(k+2)^{k+1}}}\Leftrightarrow(k+2)^{k^2+2k+1}>(k+1)^{k^2+2k}$ evident adevărată.......................................**(3p)**

În inegalitatea: $\dfrac{1}{k\sqrt[k+1]{(k+1)^{2k+1}}}<\dfrac{1}{k\sqrt[k+1]{(k+1)^k}}-\dfrac{1}{(k+1)\sqrt[k+2]{(k+2)^{k+1}}}$, dăm valori lui k de la 1 la n.

$a_n<\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[n+2]{(n+2)^{n+1}}}$, deci $a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ şi prin urmare şirul este mărginit şi superior, deci este convergent .....**(3p)**

Problema IV. (7 puncte)

Din dezvoltarea binomială avem relațiile:

$\left(44+\sqrt{2023}\right)^n=a_n+b_n\cdot\sqrt{7}$ şi $\left(44-\sqrt{2023}\right)^n=a_n-b_n\cdot\sqrt{7}$ ....**(2p)**

Din suma celor două relații avem $a_n=\dfrac{\left(44+\sqrt{2023}\right)^n+\left(44-\sqrt{2023}\right)^n}{2}$ și $b_n=\dfrac{\left(44+\sqrt{2023}\right)^n-\left(44-\sqrt{2023}\right)^n}{2\sqrt{7}}$ ....**(2p)**

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(44+\sqrt{2023}\right)^n\cdot\left[1+\left(\frac{44-\sqrt{2023}}{44+\sqrt{2023}}\right)^n\right]}{\left(44+\sqrt{2023}\right)^n\cdot\left[1-\left(\frac{44-\sqrt{2023}}{44+\sqrt{2023}}\right)^n\right]}\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$ ....**(3p)**