Barem clasa a V-a
(OLM 2023-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

$A = 2023^{4n+3} + 2023^{4n+2} \cdot 27 + 171 = 2023^{4n+2}(2023 + 27) + 171$...**(2p)**

$A = 10(2023^{4n+2} \cdot 205 + 17) + 1$.. **(2p)**

Restul împărţirii la 10 este 1 şi câtul $2023^{4n+2} \cdot 205 + 17$... **(1p)**

$\mathrm{U}(2023^{4n+2} \cdot 205 + 17) = U(U(2023^{4n+2}) \cdot U(205) + U(17)) = U(9 \cdot 5 + 7) = 2$.................................. **(2p)**

Problema II. (7 puncte)

Cum termenul general al șirului este de forma $T_n = 7(n-1)+3,\ \ n \in N^*$, iar $7(n-1)+3 = 213 \Rightarrow n = 31$……...**(4p)**

Observăm că $1+2+2^2+2^3+2^4 = 31$, iar cum A are 2023 termeni $\Rightarrow$se pot grupa termenii câte 5, începând cu al patrulea termen, astfel:

$$A = 2+2^2+2^3+2^4(1+2+2^2+2^3+2^4)+...+2^{2019}(1+2+2^2+2^3+2^4)$$

$A = 2+2^2+2^3+31\cdot(2^4+2^9+...+2^{2019}) \Rightarrow$ Numărul A este de forma $14+31\cdot k$.

Prin urmare, restul împărțirii lui A la n este 14……………………………………………………………..**(3p)**

Problema III. (7 puncte)

Din teorema împărțirii cu rest avem: $\overline{abcd} = \overline{cd} \cdot (\overline{ab} + 1) + \overline{ab} + 48$,unde $\overline{ab} + 48 \langle \overline{cd}$………………….…(**1p**)

$100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{cd} \cdot \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ab} + 48 \Rightarrow 99 \cdot \overline{ab} = \overline{cd} \cdot \overline{ab} + 48 \Rightarrow \overline{ab} \cdot (99 - \overline{cd}) = 48$…………….....**(1p)**

Dar, numărul 48 se poate scrie ca produs de doua numere ,în care unul din numere să fie de două cifre în următoarele moduri: $48 \cdot 1 = 24 \cdot 2 = 16 \cdot 3 = 12 \cdot 4$

Dacă: $\overline{ab} = 48 \Rightarrow 99 - \overline{cd} = 1 \Rightarrow \overline{cd} = 98 \Rightarrow \overline{abcd} = 4898$…………………………………………….…………..(**1p**)

$\overline{ab} = 24 \Rightarrow 99 - \overline{cd} = 2 \Rightarrow \overline{cd} = 97 \Rightarrow \overline{abcd} = 2497$...(**1p**)

$\overline{ab} = 16 \Rightarrow 99 - \overline{cd} = 3 \Rightarrow \overline{cd} = 96 \Rightarrow \overline{abcd} = 1696$...(**1p**)

$\overline{ab} = 12 \Rightarrow 99 - \overline{cd} = 4 \Rightarrow \overline{cd} = 95 \Rightarrow \overline{abcd} = 1295$...(**1p**)

$S = 4898 + 2497 + 1696 + 1295 = 10386$ ....(**1p**)

Problema IV. (7 puncte)

a) $a = (2^{750} \cdot 3^{300} \cdot 7^{50})^2\ p.p.$; $b = (2^{500} \cdot 3^{100} \cdot 5^{300})^3\ c.p.$ ....(**3p**)

b) $a \cdot b \cdot c = 2^{3000} \cdot 3^{977} \cdot 5^{2023} \cdot 7^{120} =$
$= 2^{2023} \cdot 2^{977} \cdot 3^{977} \cdot 5^{2023} \cdot 7^{120} =$
$= (2^{2023} \cdot 5^{2023}) \cdot 2^{977} \cdot 3^{977} \cdot 7^{120} =$
$= 10^{2023} \cdot 6^{977} \cdot 7^{120}$ ....(**1p**)

Deci numărul de zerouri de la sfârșitul produsului $a \cdot b \cdot c$ este 2023. ....(**1p**)

c) Ultima cifră nenulă a numărului $a \cdot b \cdot c$ este ultima cifră a numărului $6^{977} \cdot 7^{120}$(din b),
Deci $u(6^{977} \cdot 7^{120}) = u(6^{977}) \cdot u(7^{120}) = 6 \cdot 1 = 6$ ....(**2p**)