Barem clasa a VI-a
(OLM 2023-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

$n = 2023 \cdot (2023 - 1) - 2022 = 2023 \cdot 2022 - 2022 = 2022 \cdot (2023 - 1) = 2022^2$……………..…..**(3p)**

$\frac{\frac{x}{2022}}{6^{2k+1}} = \frac{337^{2k+1}}{2022^2} \Rightarrow \frac{x}{2022} \cdot 2022^2 = 6^{2k+1} \cdot 337^{2k+1}$ ………………………………………………..…..**(2p)**

$x \cdot 2022 = 2022^{2k*1} \mid : 2022$ ……………………………………………………………...………**(1p)**

$x = 2022^{2k} = (2022^k)^2$ care este pătrat perfect…………………………………………..…………..**(1p)**

Problema II. (7 puncte)

Notăm cu $d(n)$ numărul divizorilor naturali ai lui n, $n \in N^*$.

Avem $d(n^3) = (3x+1)(3y+1) = 247 = 13 \cdot 19$ ……………………………………………………………..**(2p)**

prin urmare, obținem că: $3x+1=13$ și $3y+1=19$ sau $3x+1=19$ și $3y+1=13 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$……..**(2p)**

Întrucât $d(n^p) = (x \cdot p+1)(y \cdot p+1) = 4187$, iar $D_{4187} = \{1, 53, 79, 4187\}$, obținem $p = 13$. …………………..**(2p)**

În concluzie puterea a 13-a a lui n generează 4187 de divizori. ……………………………………………...**(1p)**

Problema III. (7 puncte)

$(a;b) = d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = xd;\ b = yd;\ (x;y) = 1,\ x, y \in \mathbb{N}^*$ ....…..**(1p)**

$(a;b) \cdot [a;b] = a \cdot b \Rightarrow d \cdot [a,b] = d^2 \cdot xy \Rightarrow [a,b] = dxy$ ....**(1p)**

$6 \cdot dxy + 6a + b = 2022 \cdot d \Rightarrow 6xy + 6x + y = 2022 \Rightarrow (6x+1) \cdot (y+1) = 2023$ ....**(2p)**

$2023 = 1 \cdot 2023 = 7 \cdot 289 = 17 \cdot 119 = 119 \cdot 17 = 289 \cdot 7 = 2023 \cdot 1$ ....**(1p)**

$\left.\begin{array}{r} 6x+1=1 \\ 6x+1=7 \\ 6x+1=17 \\ 6x+1=119 \\ 6x+1=2023 \end{array}\right\}$ nu convin , dar din $6x + 1 = 289 \Rightarrow x = 48$ și $y = 6$ (nu sunt prime între ele)

Soluția este mulțimea vidă ....…..**(2p)**

aProblema IV. (7 puncte)

Deoarece măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOM$ şi $\sphericalangle MON$ sunt invers proporţionale cu numerele 0,2 şi 0,25,

obţinem $\frac{\sphericalangle AOM}{5} = \frac{\sphericalangle MON}{4} = k$, deci $\sphericalangle AOM = 5k$ şi $\sphericalangle MON = 4k$. ....**(2p)**

Deoarece măsurile unghiurilor $\sphericalangle MON$ şi $\sphericalangle NOB$ sunt direct proporţionale cu numerele 2 şi 3,

obţinem $\frac{\sphericalangle MON}{2} = \frac{\sphericalangle NOB}{3}$, deci $\frac{\sphericalangle NOB}{3} = 2k$, de unde avem $\sphericalangle NOB = 6k$. ....**(2p)**

Caz 1. Dacă semidreapta OM este interioară $\sphericalangle AON$ avem $\sphericalangle AOM + \sphericalangle MON + \sphericalangle NOB = 105°$,

deci $15k = 105°$, iar $\sphericalangle MON = 28°$..**(2p)**

Caz 2. Dacă semidreapta ON este interioară $\sphericalangle AOM$ obţinem $\sphericalangle AON + \sphericalangle NOB = 105°$,

deci $7k = 105°$, iar $\sphericalangle MON = 60°$..**(1p)**