Barem clasa a X-a
(OLM 2023-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

Oricare ar fi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ $(*)$ ....**(2p)**

Din $f(f(x)) = x^{2023} - 2022f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă $f(f(x_1)) = x_1^{2023} - 2022f(x_1)$ $(**)$

şi $f(f(x_2)) = x_2^{2023} - 2022f(x_2)$. $(***)$ ....**(2p)**

Din $(*)$, $(**)$ şi $(***)$ rezultă $x_1^{2023} - 2022f(x_1) = x_2^{2023} - 2022f(x_2)$ şi cum $f(x_1) = f(x_2)$

obţinem $x_1^{2023} = x_2^{2023}$ de unde $x_1 = x_2$. ....**(2p)**

Deci $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Rezultă că f este injectivă. ....**(1p)**

Problema II. (7 puncte)

Notăm $log_2^x = a, log_2^y = b, log_2^z = c \Rightarrow x = 2^a, y = 2^b, z = 2^c$..**(1p)**

$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt[4]{2}} = 2^a \cdot 2^{b^2} + 2^b \cdot 2^{c^2} + 2^c \cdot 2^{a^2} \overset{m_a \geq m_g}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{2^a \cdot 2^{b^2} \cdot 2^b \cdot 2^{c^2} \cdot 2^c \cdot 2^{a^2}}$..**(2p)**

$\frac{3}{\sqrt[4]{2}} \geq 3 \cdot 2^{\frac{a^2+b^2+c^2+a+b+c}{3}} \Rightarrow 2^{\frac{-1}{4}} \geq 2^{\frac{a^2+b^2+c^2+a+b+c}{3}} \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2+a+b+c}{3} + \frac{1}{4} \leq 0$..**(2p)**

$(2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 \leq 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2} \Rightarrow$..**(1p)**

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = \frac{1}{\sqrt{2}}$..**(1p)**

Problema III. (7 puncte)

a) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x+y+z)}{xyz} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$............**(4p)**

b) $\log_a ab + \log_b bc + \log_c ca = 3 + \log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3 + 3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 6$......................**(3p)**

Problema IV. (7 puncte)

$x^2 + 2yz - 3 = x^2 + 2yz - (xy + yz + zx) = x^2 - xy - xz + yz = (x-y)(x-z)$ ....**(1p)**

$y^2 + 2xz - 3 = y^2 + 2xz - (xy + yz + zx) = y^2 - xy - yz + zx = (y-z)(y-x)$ ....**(1p)**

$z^2 + 2xy - 3 = z^2 + 2xy - (xy + yz + zx) = z^2 - xz - yz + xy = (z-y)(z-x)$ ....**(1p)**

Din b) avem $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 = 0 \Rightarrow x = y$ sau $x = z$ sau $y = z$. ....**(1p)**

Dacă, de exemplu, $x = y$, din a) $\Rightarrow x^2 + 2xz = 3 \Rightarrow z = \frac{3-x^2}{2x} \Rightarrow \bar{z} = \frac{3-\bar{x}^2}{2\bar{x}}$, dar $\bar{x} = \frac{1}{x}$ (modulul 1)

$\Rightarrow \bar{z} = \frac{3x^2-1}{2x}$, $\bar{z} = \frac{1}{z}$ (modulul 1) $\Rightarrow \frac{3x^2-1}{2x} = \frac{2x}{3-x^2} \Rightarrow 3(x^2-1)^2 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$ ....**(2p)**

Pentru $x = y = 1 \Rightarrow z = 1$, pentru $x = y = -1 \Rightarrow z = -1$ Analog cazurile $x = z$ și $y = z$

Avem 2 soluții: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ și $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$ ....**(1p)**