Barem clasa a IX-a
(OLM 2023-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

Inegalitatea este echivalentă cu:

$a^2+2a+1+b^2+c^2-2c+1 \geq ab+bc+ca-a+c-1$ .... **(3p)**

$\Leftrightarrow\ (a+1)^2+b^2+(c-1)^2 \geq ab+b-b+bc+a(c-1)+c-1$ .... **(2p)**

$\Leftrightarrow\ (a+1)^2+b^2+(c-1)^2 \geq (a+1)b+b(c-1)+(c-1)(a+1)$, ... **(2p)**

ceea ce este adevărat, conform inegalității: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.

Problema II. (7 puncte)

Notăm membrul stâng cu S şi avem:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{86}+\frac{1}{87}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{87}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{86}\right)=$$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{87}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{43}=\frac{1}{44}+\frac{1}{45}+\cdots+\frac{1}{87}$ .... **(4p)**

Această ultimă sumă se mai poate scrie astfel:

$S=\left(\frac{1}{44}+\frac{1}{45}+\cdots+\frac{1}{65}\right)+\left(\frac{1}{87}+\frac{1}{86}+\cdots+\frac{1}{66}\right)=\sum_{k=44}^{65}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{131-k}\right)=\sum_{k=44}^{65}\frac{131}{k(131-k)}$ .... **(2p)**

Cum 131 este număr prim, el nu se divide cu nici un factor de la numitor, prin urmare numărul S reprezentat de fracţia $\frac{p}{q}$, are numărătorul divizibil cu 131 .... **(1p)**

Problema III. (7 puncte)

Se arată că punctul D se găsește pe cerc .... **(2p)**

a) Aplicând relația lui Sylvester avem $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$;
$\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ .... **(2p)**
Atunci $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{H_2H_3}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{H_3H_1}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$ .... **(1p)**
Finalizare .... **(1p)**

b) Se observă că $\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OH_3}}{2}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH_2}}{2}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OH_1}}{2}$, deci segmentele AH_3, BH_2 și CH_1 au același mijloc .... **(1p)**

Problema IV. (7 puncte)

$[a] \leq a, \forall a \in R \Rightarrow \left[\sqrt{n}\right]+\left[\frac{n-2}{3}\right]+1 \leq \sqrt{n}+\frac{n-2}{3}+1$ .... **(3p)**

Prin ridicare la pătrat, efectuând calculele, obținem $4n^2+1 \leq 13n, n \in N$ .... **(2p)**

Așadar $n < 4 \Rightarrow n \in \{0,1,2,3\}$ .... **(1p)**

$n=3$ nu verifică ecuația dată $\Rightarrow S=\{0,1,2\}$ .... **(1p)**