MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Ştiinţe Matematice din România,

Filiala Caraş - Severin

CARAŞ-SEVERIN

Olimpiada Naţională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraş – Severin, 18.02.2023,

Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Pentru a şi b numere reale pozitive, arătaţi că $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

b) Demonstraţi că $\frac{\sqrt{7}+17}{2}\cdot\frac{17+\sqrt{2023}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2023}+\sqrt{7}}{2}>2023$.

a) $a+b\geq 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow(a+b)^2\geq 2ab\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$, oricare ar fi a şi b numere reale pozitive.	2p
b) Folosind inegalitatea mediilor sau prelucrând inegalitatea anterioară se obține $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\geq abc$.	3p
$\frac{\sqrt{7}+17}{2}\cdot\frac{17+\sqrt{2023}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2023}+\sqrt{7}}{2}>\sqrt{7}\cdot 17\cdot\sqrt{2023}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{7}+17}{2}\cdot\frac{17+\sqrt{2023}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2023}+\sqrt{7}}{2}>2023$	2p

Problema 2 Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara AD. Fie G_1 , G_2 , G_3 , G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor ΔABC, ΔDBC, ΔDAB, respectiv ΔDAC. Demonstraţi că:

a) $G_1G_2\perp G_3G_4$

b) $AD=BC\Leftrightarrow G_1G_2=G_3G_4$

Supliment GM 11/2022

a) Fie M mijlocul laturii AB, N mijlocul laturii AC şi P mijlocul laturii BC G_1- centrul de greutate al triunghiului ΔABC, G_2- centrul de greutate al triunghiului ΔABC şi $\frac{PG_1}{PA}=\frac{PG_2}{PD}=\frac{1}{3}$, aplicând reciproca teoremei lui Thales avem $G_1G_2\parallel AD$	***2p***

$\frac{DG_3}{DM}=\frac{DG_4}{DN}=\frac{2}{3}$, aplicând reciproca teoremei lui Thales avem $G_3G_4 \parallel MN$, dar $MN \parallel BC$ și $AD \perp (ABC)$, rezultă $G_1G_2 \perp G_3G_4$	***2p***
b) $G_1G_2=\frac{AD}{3}$, $G_3G_4=\frac{2}{3}\cdot MN$, $MN=\frac{BC}{2}$, deci $AD=BC \Leftrightarrow G_1G_2=G_3G_4$	***3p***

Problema 3. Fie patru puncte necoplanare A,B,C,D astfel încât planele (ABC) și (ABD) sunt perpendiculare și BC=AC. Dacă M este mijlocul segmentului (AD) și CM=BD, determinați măsura unghiului dintre CM și BD.

Supliment GM 10/2022

În $\Delta ABC, AC=BC$, fie $CE \perp AB$, deci E este mijlocul lui AB.	1p
Arătăm că triunghiul CEM este dreptunghic	2p
$m(\angle CM, BD)=m(\angle CM, EM)=60^0$	4p

Problema 4.Fie $x, y \in R$ cu $y \in [-1,3)$ și $x-y+1=0$. Aflați cel mai apropiat număr întreg de numărul $a=\sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}+\sqrt{x^2+y^2+4x+2y+5}$

ONGM 2022 Et I

$a=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}$	2p
$a=\sqrt{2(y-3)^2}+\sqrt{2(y+1)^2}$	2p
$a=\sqrt{2}(\lvert y-3\rvert+\lvert y+1\rvert)$	1p
$a=4\sqrt{2}$	1p
Cel mai apropiat întreg de numărul a este 6.	1p