Olimpiada Naţională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraş – Severin, 18.02.2023

Clasa a IX-a (Subiecte/bareme orientative de rezolvare + notare)

Problema 1. Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n , numărul $x_n = \left(5^n - 1\right) \cdot \left(4^n + 15n - 1\right)$ se divide cu 36.

***

$\left(5^n - 1\right)$ se divide cu 4 (orice justificare corectă şi completă se punctează corespunzător) **3 p**

$\left(4^n + 15n - 1\right)$ se divide cu 9 (inductiv) **3 p**

Cum 4 şi 9 sunt prime între ele, rezultă concluzia. **1 p**

Problema 2. Pentru orice număr real x se notează $E(x) = \frac{2x+1}{3}, F(x) = \frac{4x+5}{3}$ şi $[x]$ partea întreagă a numărului x.

(a) Determinaţi mulţimea $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |3 \cdot E(x)| + |6 \cdot F(-x)| = 5 \right\}$.

(b) Arătaţi că, pentru orice număr întreg m, există cel mult un număr natural k astfel încât $[E(k)] + [F(k)] = m$.

Concurs Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro, etapa 1, 2023

(a) Se obţine ecuaţia $|2x+1| + |10-8x| = 5$ **1 p**

Se analizează cele 3 cazuri posibile şi se ajunge la $H = \left\{1, \frac{7}{5}\right\}$. **3 p**

(b) Notăm $a = \frac{2k+1}{3}$ şi astfel egalitatea din enunţ (via identitatea lui Charles Hermite: $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a]$) conduce la: $\left[\frac{4k+2}{3}\right] = m$. **1 p**

Din $m \le \frac{4k+2}{3} < m+1$, ajungem la $\frac{3m-2}{4} \le k < \frac{3m+1}{4}$ şi, deoarece $\frac{3m+1}{4} - \frac{3m-2}{4} = \frac{3}{4} < 1$, concluzia se impune. **2 p**

Problema 3. Fie a, b, c strict pozitive cu $a + b + c = 1$.

a) Arătaţi că $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} \ge 2$

b) Arătaţi că $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b+1}{\sqrt{b+ac}} + \frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \ge \frac{2}{a^2+b^2+c^2}$

a) Scrie $a=1-b-c$	**1p**
Ridică la pătrat si obține $(2-b-c)^2 \geq 4(1-b+bc-c)$	**1p**
Relație echivalentă cu $(b-c)^2 \geq 0$	**1p**
b) Conform a) obținem $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{b+1}{\sqrt{b+ac}}+\frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq 6$	**1p**
Demonstrează $6=\frac{6}{(a+b+c)^2} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2}$	**2p**
Finalizare	**1p**

Problema 4. Se consideră un punct *P* în interiorul unui triunghi *ABC* şi punctele *D,E, F* pentru care există numerele $t,u,v \in (0,\infty)$ astfel încât $\overrightarrow{BD}=t\cdot\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{CE}=u\cdot\overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{AF}=v\cdot\overrightarrow{FB}.$

Demonstraţi că:

(a) Dacă $t=u=v$, atunci triunghiurile *DEF* şi *ABC* au acelaşi centru de greutate.

(b) Dacă *PD, PE, PF* sunt respectiv bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BPC, \sphericalangle CPA, \sphericalangle APB$, atunci dreptele *AD, BE* şi *CF* sunt concurente.

Supliment Gazeta Matematică 10/2022, enunţ modificat

(a) Dacă *G* este centrul de greutate al triunghiului *DEF*, atunci: $\overrightarrow{GD}=\frac{1}{t+1}\cdot\overrightarrow{GB}+\frac{t}{t+1}\cdot\overrightarrow{GC}$,

$\overrightarrow{GE}=\frac{1}{t+1}\cdot\overrightarrow{GC}+\frac{t}{t+1}\cdot\overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{GF}=\frac{1}{t+1}\cdot\overrightarrow{GA}+\frac{t}{t+1}\cdot\overrightarrow{GB}$ **2 p**

Deducem astfel că $\vec{0}=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$, aşadar *G* este şi centrul de greutate al triunghiului *ABC*. **2 p**

(b) Teorema bisectoarei conduce la: $\frac{PB}{PC}=\frac{BD}{DC},\frac{PC}{PA}=\frac{CE}{EA},\frac{PA}{PB}=\frac{AF}{FB} \Rightarrow$ **2 p**

$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$; conform reciprocei teoremei lui Ceva, *AD, BE* şi *CF* sunt concurente. **1 p**