MINISTERUL EDUCAȚIEI Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Filiala Caraş - Severin	

Olimpiada Naţională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraş – Severin, 18.02.2023, Clasa a XII-a

○Timp de lucru: 180 de minute. ○ Fiecare problemă se punctează cu 0 – 7 puncte.

Problema 1. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y + xy$ şi se notează $x_n = \underbrace{x * x * ... * x}_{n \text{ de } x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi:

(a) numerele reale x care, în raport cu legea $"*"$, sunt egale cu simetricele lor.

(b) numerele reale y pentru care $y_6 = 63$.

(c) Numerele reale k pentru care mulţimea $M = [k, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $"*"$.

Problema 2. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ şi $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{x + f(x) - g(x) - 1}{x + e^x + f(x)}$.

(a) Determinaţi numerele reale $a \in (0, \pi)$ pentru care $\int_0^a \left(f(x) + \sqrt{3} \cdot g(x) \right) dx = 1 + \sqrt{2}$.

(b) Determinaţi numărul real $p = \int_0^{\pi} h(x) dx$.

Problema 3. Se consideră un grup finit multiplicativ G. Arătaţi că, dacă $f : G \to G, f(x) = x^2$ este un automorfism al grupului G, atunci grupul este abelian şi ordinul grupului este un număr impar.

Problema 4. Se consideră funcţia $f : [0, m] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^6}}, m \in (0,1)$.

(a) Determinaţi numărul real t ştiind că $\int_0^t x^2 \cdot f(x) dx = \dfrac{\pi}{18}$.

(b) Arătaţi că $\dfrac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \le \dfrac{\pi}{6}$.