MINISTERUL EDUCAȚIEI **Societatea de Ştiinţe Matematice din România,** **Filiala Caraş - Severin**	CARAŞ-SEVERIN

Olimpiada Naţională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraş – Severin, 18.02.2023,

Clasa a IX-a

○Timp de lucru: 180 de minute.

○ Fiecare problemă se punctează cu 0 – 7 puncte.

Problema 1. Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $x_n=\left(5^n-1\right)\cdot\left(4^n+15n-1\right)$ se divide cu 36.

Problema 2. Pentru orice număr real x se notează $E(x)=\dfrac{2x+1}{3}, F(x)=\dfrac{4x+5}{3}$ şi $[x]$ partea întreagă a numărului x.

(a) Determinaţi mulţimea $H=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|3\cdot E(x)|+|6\cdot F(-x)|=5\}$.

(b) Arătaţi că, pentru orice număr întreg m, există cel mult un număr natural k astfel încât $[E(k)]+[F(k)]=m$.

Problema 3. Fie a,b,c strict pozitive cu $a+b+c=1$.

a) Arătaţi că $\dfrac{a+1}{\sqrt{a+bc}}\geq 2$

b) Arătaţi că $\dfrac{a+1}{\sqrt{a+bc}}+\dfrac{b+1}{\sqrt{b+ac}}+\dfrac{c+1}{\sqrt{c+ab}}\geq\dfrac{2}{a^2+b^2+c^2}$

Problema 4. Se consideră un punct P în interiorul unui triunghi ABC şi punctele D,E,F pentru care există numerele $t,u,v\in(0,\infty)$ astfel încât $\overrightarrow{BD}=t\cdot\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{CE}=u\cdot\overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{AF}=v\cdot\overrightarrow{FB}$.

Demonstraţi că:

(a) Dacă $t=u=v$, atunci triunghiurile DEF şi ABC au acelaşi centru de greutate.

(b) Dacă PD, PE, PF sunt respectiv bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BPC,\sphericalangle CPA,\sphericalangle APB$, atunci dreptele AD, BE şi CF sunt concurente.