Olimpiada Naţională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraş – Severin, 18.02.2023, Clasa a XII-a

(barem de evaluare + notare)

Problema 1. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+xy$ şi se notează $x_n=\underbrace{x*x*...*x}_{n \text{ de } x},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Determinaţi:

(a) numerele reale x care, în raport cu legea "$*$", sunt egale cu simetricele lor.

(b) numerele reale y pentru care $y_6=63$.

(c) Numerele reale k pentru care mulţimea $M=[k,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$".

(a) Elementul neutru este $e=0$ şi simetricul lui $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ este $x'=-\frac{x}{1+x}$; se obţine $x\in\{0,2\}$.	**2 p**
(b) Se demonstrează inductiv că $x_n=(x+1)^n-1,\forall n\in\mathbb{N}^*$	**1 p**
$y\in\{-3,1\}$	**1 p**
(c) Una dintre metodele posibile: pentru $x=y=k$ se obţine $k^2+2k\ge k$, de unde $k\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$. Pentru $k<-1$, luăm $x=k$ şi avem că există $y\in M, y>0,$ suficient de mare, astfel încât $x*y<k$ (de exemplu, pentru $y=k^2$, se obţine $x*y=k(k^2+k+1)<k$). Aşadar $k\in\{-1\}\cup[0,+\infty)$.	**2 p**
Se demonstrează imediat că,într-adevăr, $H=[-1,+\infty)$ este stabilă faţă de legea "$*$" şi că $M=[k,+\infty)$ este stabilă pentru orice $k\ge 0$.	**1 p**

Problema 2. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ şi $h:[0,\pi]\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{x+f(x)-g(x)-1}{x+e^x+f(x)}$.

(a) Determinaţi numerele reale $a\in(0,\pi)$ pentru care $\int_0^a\left(f(x)+\sqrt{3}\cdot g(x)\right)dx=1+\sqrt{2}$.

(b) Determinaţi numărul real $p=\int_0^{\pi} h(x)dx$.

(a) Egalitatea din enunţ conduce la $\sqrt{3}\sin a-\cos a=\sqrt{2}$	**2 p**
Una dintre metodele posibile: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a-\frac{1}{2}\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin\left(a-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $a\in\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\}$.	**2 p**
(b) Considerând funcţia $u:[0,\pi]\to\mathbb{R}, u(x)=x+e^x+f(x)$, deducem: $h(x)=\frac{u(x)-u'(x)}{u(x)}$ şi deci, dacă $H'(x)=h(x)$, atunci $H(x)=x-\ln\left(x+e^x+\sin x\right)+C$; numărul cerut este $p=\pi-\ln\left(\pi+e^{\pi}\right)$.	**3 p**

Problema 3. Se consideră un grup finit multiplicativ *G*. Arătaţi că, dacă $f:G\to G, f(x)=x^2$ este un automorfism al grupului *G*, atunci grupul este abelian şi ordinul grupului este un număr impar.

$f(xy)=f(x)f(y),\forall x,y\in G\Rightarrow xyxy=xxyy,\forall x,y\in G$; prin simplificare la stânga cu *x* şi la dreapta cu *y* se obţine că grupul este abelian.	**4 p**
Deoarece $f(e)=e,$ se deduce că $f(x)\neq e,\forall x\in G\setminus\{e\}$, aşadar $x\neq x^{-1},\forall x\in G\setminus\{e\}$; putem grupa astfel elementele mulţimii $G\setminus\{e\}$ în perechi diferite de elemente distincte de forma $\left(x,x^{-1}\right)$, aşadar $G\setminus\{e\}$ are un număr par de elemente şi concluzia se impune.	**3 p**

Problema 4. Se consideră funcţia $f:[0,m]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}, m\in(0,1)$.

(a) Determinaţi numărul real *t* ştiind că $\int_0^t x^2\cdot f(x)dx=\frac{\pi}{18}$. (b) Arătaţi că $\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx\le\frac{\pi}{6}$.

(a) $\int_0^t x^2\cdot f(x)dx=\frac{1}{3}\cdot\int_0^t\frac{\left(x^3\right)'}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}=\frac{1}{3}\cdot\arcsin\left(t^3\right)=\frac{\pi}{18}\Rightarrow t=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.	**3 p**
(b) Pentru orice $x\in[0,m]$ sunt adevărate inegalităţile $1-x^2\le 1-x^6\le 1$ şi se ajunge astfel	**4 p**

imediat la $1 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \le \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.	