Olimpiada Naţională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraş – Severin, 18.02.2023, Clasa a XI-a

(Barem de evaluare + notare)

Problema 1. Se consideră un triunghi *ABC* precum şi, folosind notaţiile uzuale, determinanţii:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & \cos 2A & a^2\\ 1 & \cos 2B & b^2\\ 1 & \cos 2C & c^2\end{vmatrix},\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & \sin A & a^2\\ 1 & \sin B & b^2\\ 1 & \sin C & c^2\end{vmatrix}.$$ Arătaţi că:

(a) $\Delta_1=0$. (b) dacă $\Delta_2=0$, atunci triunghiul *ABC* este isoscel.

***

(a) Folosind, de exemplu, formula $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, teorema sinusurilor şi proprietăţile determinanţilor se obţine $\Delta_1=0$.	**3 p**
(b) Folosin, de exemplu, aceeaşi teoremă, se ajunge la $\Delta_2=\frac{1}{2R}\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$ şi, din $\Delta_2=0$, se deduce $(c-b)(c-a)(b-a)=0$, de unde concluzia cerută.	**4 p**

Problema 2. Se spune că o matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este *interesantă* dacă $A^2-A=7\cdot I_2$. Arătaţi că:

(a) există cel puţin două matrice *interesante* cu elementele numere întregi.

(b) Dacă matricea *A* este *interesantă,* atunci matricea $B=A+2\cdot I_2$ este inversabilă.

***

(a) De exemplu (cu justificare): $A_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 7 & 1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	**4 p**
(b) Egalitatea dată se poate scrie $A^2-A-6\cdot I_2=(A+2I_2)\cdot(A-3I_2)=(A-3I_2)\cdot(A+2I_2)=I_2$, aşadar *B* este inversabilă, cu $B^{-1}=A-3\cdot I_2$	**3 p**

Problema 3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-x^2$, precum şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=f(a_n),\forall n\geq 1.$

(a) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent şi determinaţi limita sa.

(b) Determinaţi numărul întreg *k* pentru care $\lim\limits_{x\to2}\frac{2-f(x)}{\sin k\pi x}=\frac{1}{2\pi}$.

* * *

(a) se demonstrează (de exemplu inductiv) că şirul este mărginit: $a_n\in(0,1),\forall n\in\mathbb{N}^*$	**1 p**
$a_{n+1}-a_n=-a_n^{\,2}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este strict descrescător	**1 p**
Şirul este convergent, cu limita 0 (evident: justificare)	**1 p**
(b) $L=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)}{\sin k\pi x}=3\cdot\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)}{\sin k\pi x}$	**2 p**
Notăm $x-2=t$ şi astfel $L=3\cdot\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sin k\pi t}=\frac{3}{k\pi}\Rightarrow k=6.$	**2 p**

Problema 4. (a) Daţi un exemplu de trei şiruri $(a_n)_{n\ge1},(b_n)_{n\ge1},(c_n)_{n\ge1}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}c_n=-\infty$ astfel încât: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=\frac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n+c_n)=\frac{\pi}{2}$.

(b)Demonstraţi că şirul $x_n=\sum_{k=1}^{n}arctg\frac{1}{k^2-k+1},\forall n\ge1,$ este convergent şi are limita egală cu $\frac{\pi}{2}$.

Supliment Gazeta Matematică 10/2022(enunţ puţin modificat)

(a) De exemplu: $a_n=\frac{1}{2n},b_n=n\pi,c_n=\frac{\pi}{2}-n\pi,n\ge1.$	**3 p**
(b) $arctg\frac{1}{k^2-k+1}=...=arctgk-arctg(k-1)$	**2 p**
$x_n=arctgn$ are limita finită $\frac{\pi}{2}$, deci este convergent.	**2 p**