Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 18.02.2023, Clasa a VII-a

(Barem de evaluare + notare)

Problema 1. Considerăm numerele $A=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 300}$ și

$B=\sqrt{\frac{1}{7}+\left(\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+\ldots+\frac{70}{441}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{63}\right)}$. Calculați $A\cdot B+\frac{1}{100}$

Supliment GM 9 /2022

$A=\frac{1}{3}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100})$	**1p**
$A=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{33}{100}$	**2p**
$B=\sqrt{\frac{1}{7}+\left(\frac{9}{14}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{10}{21}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{70}{441}-\frac{1}{63}\right)}$	**1p**
$B=\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{7}}=\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 63}=3$	**2p**
$A\cdot B+\frac{1}{100}=1$	**1p**

Problema 2. Fie $a,b\in\Re$, $a-4b+3=0$ și $0\le b<2$, aflați valoarea expresiei

$$\sqrt{(a+3)^2+(3b)^2}+\sqrt{\frac{3}{2}(a-5)^2+(b-2)^2}$$

ONGM 2022

$a=4b-3$	***1p***
$\sqrt{(a+3)^2+(3b)^2}+\sqrt{\frac{3}{2}(a-5)^2+(b-2)^2}==$	***1p***
$\sqrt{(4b-3+3)^2+(3b)^2}+\sqrt{\frac{3}{2}(4b-3-5)^2+(b-2)^2}$	***1p***

$\sqrt{(4b)^2+(3b)^2}+\sqrt{\frac{3}{2}(4b-8)^2+(b-2)^2}$	***1p***
$\sqrt{16b^2+9b^2}+\sqrt{\frac{3}{2}\cdot 16(b-2)^2+(b-2)^2}=$	***1p***
$\sqrt{25b^2}+\sqrt{25(b-2)^2}=5\vert b\vert+5\vert b-2\vert$	***1p***
$=5b+5(-b+2)=10$	***1p***

Problema 3. Se consideră pătratul ABCD. În exteriorul său construim triunghiul echilateral ΔMAB.Notăm cu T intersecția dreptelor MC și AB, iar cu S un punct pe latura AD astfel încât $m(\angle STC)=60^0$. Arătați că triunghiul CST este echilateral.

Supliment GM 9/2022

ΔMBC este isoscel, $m(\angle BCM)=15^0$, $m(\angle BTC)=75^0$	2p
ΔAST dreptunghic isoscel, deci AS=AT	2p
$\Delta DSC\equiv\Delta BTC$ (cazul IC), deci SC=CT	2p
ΔCST isoscel, $m(\angle STC)=60^0\Rightarrow\Delta CST$ echilateral	1p

Problema 4. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $m(\angle ABC)=2\cdot m(\angle BAC)$. Dacă O este centrul cercului circumscris ΔABC, M este punctul în care bisectoarea $\angle ABC$ intercsectează a doua oară cercul circumscris ΔABC, $BM\cap AC=\{N\}$, iar $m(\angle BOM)=144^0$, aflați $m(\angle ANB)$.

(AM- bisectoarea $\angle ABC\Rightarrow\angle ABM\equiv\angle CBM$ $\angle ABM\equiv\angle CBM\equiv\angle BAC\Rightarrow\widehat{AM}\equiv\widehat{CM}\equiv\widehat{BC}$	***2p***
$m(\angle ANB)=\dfrac{m(\widehat{AB})+m(\widehat{CM})}{2}$	***1p***
Se analizează două cazuri: $O\in Int\angle ABM$ și $O\in Int\angle CBM$	***3p***
$m(\angle ANB)=108^0$, dacă ΔABC este ascuțitunghic	***1p***