Olimpiada Naţională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraş – Severin, 18.02.2023,

Clasa a X-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale *a* pentru care $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}=2.$

Supliment GM 10/2022

Notăm $x=\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}}, y=\sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}$ şi astfel $\left(x+y\right)^3=8\Rightarrow x^3+y^3+3xy(x+y)=8$	**3 p**
Se obţine imediat $14+6\cdot\sqrt[3]{49-2a^2}=8\Rightarrow a\in\{-5,5\}.$	**4 p**

Problema 2. (a) Arătaţi că, dacă $A=\log_7 98$ şi $B=\log_2 28$, atunci $C=\frac{1}{A-1}+\frac{1}{B-1}$ este număr raţional.

Supliment GM 11/2022

(b) Rezolvaţi ecuaţia $a^{x-2}=(1-a)\cdot x+4a-3$, unde $a>0, a\neq 1$, este un număr real fixat.

***

(a) $\log_7 2=A-2, \log_2 7=B-2$	**1 p**
$A-1=\log_7 14, B-1=\log_2 14$	**1 p**
$C=\frac{1}{A-1}+\frac{1}{B-1}=1\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}.$	**1 p**
(b) Pentru $a\in\left(1,+\infty\right)$ funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a, g(x)=(1-a)\cdot x+4a-3$ sunt strict monotone, de monotonii diferite	**2 p**
Analog pentru $a\in\left(0,1\right)$; aşadar $x=3$ este unica soluţie a ecuaţiei.	**2 p**

Problema 3. Fie $z\in\mathbb{C}$ și $a>0$, astfel încât $\left|z\right|\leq a$. Demonstrați că $\text{Re}\left(\frac{1}{z+a}\right)\geq\frac{1}{a^2+1}$.

$\text{Re}\left(z\right)=\frac{z+\bar{z}}{2}$	**1p**

$\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z+a}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+a}+\dfrac{1}{\overline{z}+a}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z+\overline{z}+2a}{z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}+a^{2}}$	**1p**
$\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z+a}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\operatorname{Re}(z)+2a}{\lvert z\rvert^{2}+2\operatorname{Re}(z)+a^{2}}=\dfrac{\operatorname{Re}(z)+a}{\lvert z\rvert^{2}+2\operatorname{Re}(z)+a^{2}}$	**1p**
$\lvert z\rvert\le a\Rightarrow\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z+a}\right)\ge\dfrac{\operatorname{Re}(z)+a}{\lvert a\rvert^{2}+2a\operatorname{Re}(z)+a^{2}}=\dfrac{1}{2a}$	**2p**
Arată $\dfrac{1}{2a}\ge\dfrac{1}{a^{2}+1}$ pentru $a>0$ și finalizează	**2p**

Problema 4. (a) Daţi un exemplu de funcţie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care este injectivă, dar nu este surjectivă şi un exemplu de funcţie $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care este surjectivă, dar nu este injectivă.

(b) Determinaţi numărul $h(2023)$ ştiind că $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie injectivă cu proprietăţile:

(I) $h(1)\neq 1$.

(II) $h(x)\cdot h(y)=x\cdot h(y)+y\cdot h(x)-h(xy), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Etapa a II a, ONGM 2021

(a) Exemplu corect şi justificat de funcţie *f*, exemplu de funcţie *g* (la fel, corect...)	**2 p**
(b) Pentru $x=y=0$ se obţine $h(0)=0$ sau $h(0)=-1$.	**1 p**
Dacă $h(0)=0$, atunci, pentru $x=y=1$, aceeaşi egalitate (II) conduce la $h(1)=0$ (contradicţie cu injectivitatea) sau $h(1)=1$, contradicţie cu (I).	**2 p**
Aşadar $h(0)=-1$ şi, pentru $y=0$ în (II), se obţine $h(x)=x-1$.	**1 p**
Această funcţie verifică (!!!) ecuaţia din ipoteză, deci $h(2023)=2022$.	**1 p**