Olimpiada Naţională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraş – Severin, 18.02.2023,

Clasa a VI-a

Problema 1.

a) Dacă $(a+b+c+d)\vdots 27$ arătați că $\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)\vdots 9$.

b) Folosind toate cifrele $0,1,2,...9$ luate o singură dată se formează două sau mai multe numere de cifre distincte. Demonstrați că suma numerelor formate este multiplu de 9.

a) $\overline{ab}+\overline{cd}=10a+b+10c+d=9(a+c)+(a+b+c+d)=M_9+M_{27}$	**3p**
b) Dacă a_k este o cifră folosită, în general $a_k\cdot 10^n=a_k\cdot \underbrace{10...0}_{n\ ori}=a_k\cdot \underbrace{99...9}_{n\ ori}-a_k=9b_k-a_k$. Cum se vor folosi toate cifrele $\Rightarrow S=9b_1+...+9b_{10}+(a_1+...+a_{10})$, unde	**2p**
$a_1+...+a_{10}=0+1+2+...+9=45$. $\Rightarrow S=9N+45$.	**2p**

Problema 2. Numerele naturale x,y, z sunt direct proporționale cu numerele prime p,q,r. Dacă $p\cdot q\cdot r=30$ și $x+y+z=100$, aflați suma ultimelor 2023 de cifre ale numărului $A=x^{2022}+y^{2022}+z^{2022}$

Enunț modificat ONGM 2021 Et II

$\{p,q,r\}=\{2,3,5\}$	***1p***
$\{x,y,z\}=\{20,30,50\}$	***1p***
$A=20^{2022}+30^{2022}+50^{2022}$	***1p***
$A=10^{2022}\left(2^{2022}+3^{2022}+5^{2022}\right)$	***1p***
Ultima cifră a numărului $\left(2^{2022}+3^{2022}+5^{2022}\right)$*este 8, iar ultimele 2022 de cifre ale numărului A sunt zerouri*	***2p***
Suma ultimelor 2023 de cifre ale numărului A este egală cu 8.	***1p***

Problema 3. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)$, $m(\sphericalangle A)>90^0$ și punctul D situat pe semidreapta $(AC$, astfel încât $C\in(AD)$. Semidreapta opusă bisectoarei unghiului BCD

intersectează dreapta AB în punctul E. Știind că măsura unghiului BEC este de 30°, determinați măsurile unghiurilor triunghiului**.**

În ΔBEC avem relația $m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle BCE)+m(\sphericalangle E)=180^\circ$	**2p**
$2\cdot m(\sphericalangle B)+\dfrac{m(\sphericalangle BCD)}{2}+30^\circ=180^\circ$	**2p**
$m(\sphericalangle BCD)=180^\circ-m(\sphericalangle B)$	**1p**
deducem că $m(\sphericalangle B)=40^\circ$ și $m(\sphericalangle A)=100^\circ$	**2p**

Problema 4. În jurul punctului O se formează unghiuri cu următoarele măsuri: $m(\sphericalangle AOA_1)=1^\circ, m(\sphericalangle A_1OA_2)=2^\circ, m(\sphericalangle A_2OA_3)=3^\circ, ..., m(\sphericalangle A_{n-1}OA_n)=n^\circ$ și $m(\sphericalangle A_nOA)=p^\circ$, unde $n, p\in\mathbb{N}$.

a) Aflați valoarea maximă a lui n și $m(\sphericalangle A_nOA)$;

b) Demonstrați că semidreptele $(OA_5$ și $(OA_{14}$ sunt perpendiculare în situația când numărul natural n este maxim

a) $1^\circ+2^\circ+3^\circ+.......+n^\circ+p^\circ=360^\circ$	**1p**
Cum $p\geq 0$, deducem că $\dfrac{n(n+1)}{2}\leq 360^\circ$	**2p**
Obținem valoarea maximă $n=26^\circ$	**1p**
De unde $p=9^\circ$	**1p**
b) $m(\sphericalangle A_5OA_{14})=6^\circ+7^\circ+.....+14^\circ=90^\circ$, deci $(OA_5$ și $(OA_{14}$ sunt perpendiculare	**2p**