BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a XI-a M1
Olimpiada de matematică - Etapa locală18.02.2023

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

1. a) Calculul determinantului și demonstrarea relației..**3p**

b) $a.b.c \in Z \Rightarrow$ două dintre ele au aceeași paritate$\Rightarrow$diferența lor este pară$\Rightarrow \det(A)$,fiind un produs de numere întregi cu un factor par, este număr întreg par..**2p**

c) Presupunem prin reducere la absurd că $A^{-1} \in M_3(Z)$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$

$A, A^{-1} \in M_3(Z) \Rightarrow \det(A) \in Z, \det(A^{-1}) \in Z$ **1p**

$\Rightarrow \det(A) = \det(A^{-1}) = 1$ sau $\det(A) = \det(A^{-1}) = -1$, cf b $\det(A)$ este par,contradicție.......**1p**

2. a) Calcul direct (sau T. Hamilton Cayley), înmulțirea primei relații cu A^{n-1} **1p**

b) Demonstrația prin metoda inducției matematice..**2p**

c) $\det(A^n) = (\det A)^n$ și cf b) $\det(A^n) = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2$,iar $(\det A)^n = (-1)^n \Rightarrow$ relația...........**2p**

d) Din $A^n \cdot A^m = A^{m+n}, \forall n \in N, \forall m \in N^*$, egalând elementele corespondente rezultă relația....**2p**

3. $x_n^4 - x_n^2 \geq x_n^3 x_{n+1} + 2x_n + 1 \Rightarrow$

$(\mathbf{1})$ $x_n^3(x_{n+1} - x_n) \leq -(1 + x_n)^2 \leq 0, (\forall)\, n \geq 1$ **2p**

Cum $(x_n)_{n\geq1}$, este strict crescător $(x_{n+1} - x_n > 0) \Rightarrow x_n^3 \leq 0 \Rightarrow x_n \leq 0, (\forall)\, n \geq 1$

$\Rightarrow x_n \in [x_1, 0], (\forall) n \geq 1 \Leftrightarrow (x_n)_{n\geq1}$, mărginit$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent **2p**

Fie $l = \lim_{n\to\infty} x_n$, deci $l \leq 0$, . Trecem la limită in relația **(1)** și obținem:

$l^3(l-l) \leq -(1+l)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -(1+l)^2 \leq 0 \Rightarrow l = -1 \Rightarrow x_n < -1, (\forall) n \geq 1$ **3p**

4. $AX + AY = X^2 - Y^2 \Rightarrow \mathrm{A(X+Y)} = \mathrm{(X-Y)(X+Y)}$ (matricele X și Y comută și $X + Y = I_n$) $\Rightarrow A = X - Y$ **2p**

Din $A = X - Y$ și $X + Y = I_n \Rightarrow X = \frac{1}{2}(I_n + A), Y = \frac{1}{2}(I_n - A)$ **1p**

Din $AX = X^2 \Rightarrow \frac{1}{2}A(A + I_n) = \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I_n) \Rightarrow A^2 = I_n$ **2p**

$\Rightarrow A^{2k} = I_n$, $A^{2k+1} = A$ $, \forall k \in N, k \geq 1 \Rightarrow A^{2023} = A$ și $A^{2023} = -I_n \Rightarrow A = -I_n$ **2p**