OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a 10-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor ***)

a) Rezolvați ecuația $\log_2 x - \log_x 27 = \log_3 x - \log_x 8$.

b) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=10\cdot 9^x - 21\cdot 6^x + 9\cdot 4^x$. Arătați că $f\left(\frac{\lg 3-\lg 5}{\lg 3-\lg 2}\right)=f(1)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Ecuația se scrie $a+\frac{3}{a}=b+\frac{3}{b}$, unde $a=\log_2 x$, $b=\log_3 x$	**2p**
Obținem I) $a=b$, de unde $x=1$, care nu convine și II) $ab=3$, de unde $(\log_2 x)^2 = 3\log_2 3$, $x=2^{\pm\sqrt{3\log_2 3}}$	**2p**
b) $f(1)=0$	**1p**
$f(x)=0 \Leftrightarrow 10\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 21\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x} + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{3}{2}$ sau $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{3}{5}$, deci a doua soluție a ecuației $f(x)=0$ este $\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{5}=\frac{\lg 3-\lg 5}{\lg 3-\lg 2}$, de unde concluzia	**2p**

Problema 2, (autor *Sânziana Dumitran*, GM 11/2022)

Determinați minimul expresiei $f(z)=\frac{\operatorname{Re}(z^4)}{(\operatorname{Re} z)^4}$, când z parcurge mulțimea numerelor complexe care au partea reală nenulă.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $z=r(\cos a + i\sin a)$, cu $r\in\mathbb{R}^*$, $a\in\mathbb{R}$ și $\cos a\neq 0$, atunci $f(z)=\frac{\cos 4a}{\cos^4 a}$	**2p**
$\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$, $f(z)=8+\frac{1-8t}{t^2}$, unde $t=\cos^2 a$	**2p**
$\frac{1-8t}{t^2}=x \Leftrightarrow xt^2+8t-1=0$, iar $\Delta = 64+4x\geq 0 \Rightarrow x\geq -16 \Rightarrow f(z)\geq -8$	**2p**
Avem $x=-16$ pentru $t=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$, deci $\min f(z)=-8$, deoarece valoarea -8 se atinge	**1p**

Problema 3, (autor ***)

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{x+23}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Observăm că 4 este soluție	**2p**
Arătăm că $\sqrt{x}<\sqrt[3]{x+4}$ (1) și $\sqrt{x+5}<\sqrt[3]{x+23}$ (2) pentru $x\in[0,4)$, iar $\sqrt{x}>\sqrt[3]{x+4}$ (3) și $\sqrt{x+5}>\sqrt[3]{x+23}$ (4) pentru $x>4$, deci 4 este soluție unică	**1p**
$(\sqrt{x})^3-(\sqrt[3]{x+4})^3=x(\sqrt{x}-1)-4\begin{cases}<4(2-1)-4=0, \text{ pentru } x\in[0,4)\\ >4(2-1)-4=0, \text{ pentru } x>4\end{cases}\Rightarrow$ (1) și (3)	**2p**
$x=4$ $(\sqrt{x+5})^3-(\sqrt[3]{x+23})^3=(x+5)(\sqrt{x+5}-1)-18\begin{cases}<9(3-1)-18=0, \text{ pentru } x\in[0,4)\\ >9(3-1)-18=0, \text{ pentru } x>4\end{cases}$ $\Rightarrow$ (2) și (4)	**2p**

Problema 4, autor *Mihail Bălună*

Determinați numerele întregi n pentru care există o mulțime finită A de numere reale nenule și o funcție bijectivă $f:A\to A$ cu proprietatea $f(x)+f(f(x))=nx$, oricare ar fi $x\in A$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Pentru $a\in A$ de modul maxim avem $\|na\|=\|f(a)+f(f(a))\|\le\|f(a)\|+\|f(f(a))\|\le 2\|a\|$ (1) și $\|a\|>0$, deci $\|n\|\le 2$	**2p**
Pentru $n=2$ luăm A oarecare și $f=1_A$, deci $n=2$ convine	**1p**
Pentru $n=0$ luăm $A=\{-a,a\}$, $a\in\mathbb{R}^*$ și $f(x)=-x$, deci $n=0$ convine	**1p**
Pentru $n=-1$ luăm $A=\{a,b,c\}$ cu $a+b+c=0$ și $f(a)=b, f(b)=c, f(c)=a$, deci $n=-1$ convine	**1p**
Pentru $n=-2$ și $a\in A$ de modul maxim inegalitățile din (1) devin egalități, deci $\|f(a)\|=\|f(f(a))\|=\|a\|$ și $\operatorname{sgn} f(a)=\operatorname{sgn} f(f(a))$, de unde $f(a)=f(f(a))$, ceea ce duce la $a=f(a)=f(f(a))$, contradicție; $n=-2$ nu convine	**1p**
Pentru $n=-1$, $a\in A$ de modul maxim și $b\in A$ astfel încât $f(f(b))=a$ avem $a+f(b)=b$ și $f(a)+a=f(b)$, de unde $2a=b-f(a)$, ceea ce duce la $a=b=-f(a)$. Reiese $a=f(a)+f(f(a))=-a+a=0$, fals; $n=-1$ nu convine	**1p**