CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 -

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H2

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$, cu $x\in\mathbb{R}$.

3p **a)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $A^4(x)=A(2x^2)\cdot A\left(\frac{2}{x}\right)$.

4p **b)** Fie matricea $B=\sum_{k=1}^{2023} A(2^k)\cdot A\left(\frac{1}{2^{2k+1}}\right)$ și α suma elementelor lui B. Arătați că $\alpha\in(3,4)$.

Subiectul 2

Într-un reper cartezian se consideră punctele $A_n(n,n^2-4n+3)$, cu $n\in\mathbb{N}$.

3p **a)** Determinați numărul real α astfel încât punctele A_1, A_2 și $B(-1,\alpha)$ să fie coliniare.

4p **b)** Arătați că, pentru orice $m,n,p\in\mathbb{N}$, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este număr natural.

Subiectul 3

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} \ln(x+1)-\ln\frac{2}{3}, x\le 0 \\ \frac{(a+1)^x-a^x}{x^2+x}, x>0 \end{cases}$, unde $a\in[1,\infty)$.

4p **a)** Determinați $a\in[1,\infty)$ pentru care funcția are limită în $x=0$.

3p **b)** Dacă $l_a=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ și $b=l_1+l_2+...+l_{127}$, arătați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b}{7}\right)^x=0$.

Subiectul 4

Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+3}{x+2a}$, cu $a\in\mathbb{R}^*$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

4p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{a\cdot\sin\frac{1}{x}}}=\frac{1}{e}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$.

3p **b)** Determinați parametrul real a pentru care funcția f admite, spre $+\infty$, asimptota de ecuație $y=x+a+2$.