OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 10.02.2023
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a IX- a

- *Nu se acorda puncte din oficiu.*
- *Pentru orice solutie corecta, diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.*
- *Fiecare exercitiu este punctat de la 0 la 7.*

SUBIECTUL I (7 puncte)

a) Calculati: $\left[\dfrac{1}{5\sqrt{2}-7}\right]$ ***3p***

$\left[{}^{5\sqrt{2}+7)}\dfrac{1}{5\sqrt{2}-7}\right]=\left[\dfrac{5\sqrt{2}+7}{50-49}\right]$ *1p*

$1,4<\sqrt{2}<1,5 \Leftrightarrow 7<5\sqrt{2}<7,5 \Leftrightarrow 14<5\sqrt{2}+7<14,5 \Rightarrow \left[\dfrac{1}{5\sqrt{2}-7}\right]=14$ *2p*

b) Sa se arate ca $f(n)=\left[\dfrac{n^2}{3}\right]+\left[\dfrac{(n+1)^2}{3}\right]+\left[\dfrac{(n+2)^2}{3}\right]$, unde $[x]$ este partea intreaga a numarului , este patrat perfect. ***4p***

$f(3k)=\left[\dfrac{(3k)^2}{3}\right]+\left[\dfrac{(3k+1)^2}{3}\right]+\left[\dfrac{(3k+2)^2}{3}\right]=\left[3k^2\right]+\left[3k^2+2k+\dfrac{1}{3}\right]+\left[3k^2+4k+1+\dfrac{1}{3}\right]=(3k+1)^2$ *1p*

$f(3k+1)=(3k+2)^2$ *1p*

$f(3k+2)=(3k+3)^2$ *1p*

$f(n)=(n+1)^2,(\forall)n\in\mathbb{N}$ *1p*

SUBIECTUL II (7 puncte)

Fie sirul $(a_n)_{n\geq1}$ de numere naturale ai carui termeni formeaza o progresie aritmetica cu $a_1=1$. Fie $m\in\mathbb{N}^*$ astfel incat $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_m}+\sqrt{a_{m+1}}}=\dfrac{4}{5}$. Determinati restul impartirii lui m la 16.

${}^{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})}\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+{}^{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})}\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+{}^{\sqrt{a_m}-\sqrt{a_{m+1}})}\dfrac{1}{\sqrt{a_m}+\sqrt{a_{m+1}}}=$ *1p*

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-r}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-r}+\ldots+\frac{\sqrt{a_m}-\sqrt{a_{m+1}}}{-r}=\frac{1-\sqrt{a_{m+1}}}{-r}=\frac{\sqrt{a_{m+1}}-1}{r}$$ 1p

$$\frac{\sqrt{1+mr}-1}{r}=\frac{4}{5}$$ 1p

$$\sqrt{1+mr}=\frac{4r+5}{5}\Leftrightarrow 1+mr=\frac{16r^2+40r+25}{25}\Leftrightarrow m=\frac{16r+40}{25}$$ 2p

$m=\dfrac{16(r+2)+8}{25}\Leftrightarrow$ restul impartirii lui m la 16 este 8. 2p

SUBIECTUL III (7 puncte)

a) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2+z^2=1$. Arătați că $-\sqrt{3}\le x+y+z\le\sqrt{3}$. **4p**

$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\ge 0$, rezultă $2x^2+2y^2+2z^2\ge 2xy+2xz+2yz$, rezultă 2p

$3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$

Cum $x^2+y^2+z^2=1$, rezultă $(x+y+z)^2\le 3$, $-\sqrt{3}\le(x+y+z)\le\sqrt{3}$ 2p

b) Să se arate că $\frac{\sqrt{12}}{7}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\cdots+\frac{\sqrt{1011\cdot1012}}{2023}\le\frac{505}{2}$ **3p**

Folosim inegalitatea $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$, $a,b\ge0$ 1p

$\sqrt{3\cdot4}\le\dfrac{3+4}{2}$, $\sqrt{5\cdot6}\le\dfrac{5+6}{2}$, $\sqrt{7\cdot8}\le\dfrac{7+8}{2}$, …, $\sqrt{1011\cdot1012}\le\dfrac{1011+1012}{2}$ 1p

$$\frac{\sqrt{12}}{7}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\cdots+\frac{\sqrt{1011\cdot1012}}{2023}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.+\frac{1}{2}=\frac{505}{2}$$ 1p

SUBIECTUL IV (7 puncte)

a) Determinați numerele reale x și y astfel încât $x\overrightarrow{QM}+y\overrightarrow{QN}=\vec{0}$. **4p**

$\overrightarrow{QM}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{QA}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{QB}$ unde $k=\frac{3}{2}$, $\overrightarrow{QN}=\frac{1}{1+l}\overrightarrow{QA}+\frac{l}{1+l}\overrightarrow{QC}$ unde $l=\frac{1}{2}$ 2p

Obținem $x\overrightarrow{QM}+y\overrightarrow{QN}=\left(\frac{2x}{5}+\frac{2y}{3}\right)\overrightarrow{QA}+\frac{3x}{5}\overrightarrow{QB}+\frac{y}{3}\overrightarrow{QC}$ 1p

Rezultă $x=4\alpha$, $y=\alpha$, $unde\ \alpha\in\mathbb{R}$ 1p

b) Arătați că punctele P, Q, C sunt coliniare. **3p**

$\overrightarrow{QP}=\frac{1}{1+m}\overrightarrow{QA}+\frac{m}{1+m}\overrightarrow{QB}$ unde $m=\frac{18}{17}$, $\overrightarrow{QP}=\frac{17}{35}\overrightarrow{QA}+\frac{18}{35}\overrightarrow{QB}$ $deci$ $70\overrightarrow{QP}=34\overrightarrow{QA}+36\overrightarrow{QB}=5\overrightarrow{CQ}$ 2p

$70\overrightarrow{QP}=5\overrightarrow{CQ}$, $14\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{CQ}$ $rezultă\ P, Q, C\ coliniare$. 1p