CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 –

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H2

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$, cu $x\in\mathbb{R}$.

3p **a)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $A^4(x)=A(2x^2)\cdot A\left(\frac{2}{x}\right)$.

4p **b)** Fie matricea $B=\sum_{k=1}^{2023} A(2^k)\cdot A\left(\frac{1}{2^{2k+1}}\right)$ și α suma elementelor lui B. Arătați că $\alpha\in(3,4)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A(x)\cdot A(y)=A(2xy),\forall x,y\in\mathbb{R}$	**1p**
$A^4(x)=A(8x^4)$ și $A(2x^2)\cdot A\left(\frac{2}{x}\right)=A(8x)$	**1p**
Egalitatea matriceală este echivalentă cu $8x^4=8x$, cu soluția $x_2=0$ care nu convine și $x_2=1$ care convine	**1p**
b) $A(2^k)\cdot A\left(\frac{1}{2^{2k+1}}\right)=A\left(\frac{1}{2^k}\right)$	**1p**
$B=\begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & s \end{pmatrix}$, unde $s=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}=1-\frac{1}{2^{2023}}$	**2p**
$\alpha=4s=4-\frac{1}{2^{2021}}\in(3,4)$	**1p**

Enunț subiect 2:

Într-un reper cartezian se consideră punctele $A_n(n,n^2-4n+3)$, cu $n\in\mathbb{N}$.

3p **a)** Determinați numărul real α astfel încât punctele A_1, A_2 și $B(-1,\alpha)$ să fie coliniare.

4p **b)** Arătați că, pentru orice $m,n,p\in\mathbb{N}$, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este număr natural.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Punctele A_1, A_2 și $B(-1,\alpha)$ sunt coliniare dacă $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$	**1p**
$\alpha - 2 = 0$, de unde $\alpha = 2$	**2p**
b) $A_{\triangle A_m A_n A_p} = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} m & m^2-4m+3 & 1 \\ n & n^2-4n+3 & 1 \\ p & p^2-4p+3 & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & m & m^2-4m+3 \\ 1 & n & n^2-4n+3 \\ 1 & p & p^2-4p+3 \end{vmatrix}\right\| \overset{C_3-3C_1+4C_2}{=}$ $= \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 1 & n & n^2 \\ 1 & p & p^2 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(p-n)(p-m)(n-m)\right\|$.	**2p**
Deoarece numerele *m, n* și *p* sunt naturale, două dintre ele vor avea aceeași paritate și deci produsul $(p-n)(p-m)(n-m)$ este par și în consecință $A_{\triangle A_m A_n A_p} \in \mathbb{N}$.	**2p**

Enunț subiect 3:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) - \ln\frac{2}{3}, x \le 0 \\ \frac{(a+1)^x - a^x}{x^2+x}, x > 0 \end{cases}$, unde $a \in [1,\infty)$.

4p **a)** Determinați $a \in [1,\infty)$ pentru care funcția are limită în $x = 0$.

3p **b)** Dacă $l_a = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x)$ și $b = l_1 + l_2 + \ldots + l_{127}$, arătați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b}{7}\right)^x = 0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} a^x \cdot \frac{\left(\frac{a+1}{a}\right)^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = \ln\frac{a+1}{a}$	**2p**
$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$;	**1p**
$\ln\frac{a+1}{a} = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow a = 2$	**1p**
b) $b = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{128}{127} = \ln 128$	**2p**
$\frac{b}{7} = \ln 2 \in (0,1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b}{7}\right)^x = 0.$	**1p**

Enunț subiect 4:

Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+3}{x+2a}$, cu $a \in \mathbb{R}^*$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

4p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{a\cdot\sin\frac{1}{x}}}=\frac{1}{e}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$.

3p **b)** Determinați parametrul real a pentru care funcția f admite, spre $+\infty$, asimptota de ecuație
$y=x+a+2$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{a\cdot\sin\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax+3}{x^2+2ax}\right)^{\frac{1}{a\cdot\sin\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3-ax}{x^2+2ax}\right)^{\frac{1}{a\cdot\sin\frac{1}{x}}}=$	**1p**
$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3-ax}{x^2+2ax}\right)^{\frac{x^2+2ax}{3-ax}}\right]^{\frac{3-ax}{x^2+2ax}\cdot\frac{1}{a\cdot\sin\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{3x-ax^2}{x^2+2ax}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{a\cdot\sin\frac{1}{x}}}=$	**2p**
$=e^{-a\cdot\frac{1}{a}}=\frac{1}{e}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$	**1p**
b) Dreapta de ecuație $y=x+a+2$ este asimptotă oblică cu $m=1$ și $n=a+2$	**1p**
$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-ax+3}{x+2a}=-a\Rightarrow\ -a=a+2$, deci $a=-1$	**2p**