OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a VI-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor ***

Determinați numerele prime a, b, c, știind că $51a + 24b + 17c = 2023$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$51 \vdots 17, 2023 \vdots 17 \Rightarrow 24b \vdots 17$. Cum $(24,17) = 1 \Rightarrow b \vdots 17$ b fiind număr prim $\Rightarrow b = 17$	2p
Obținem $3a + c = 95 \Rightarrow$ unul din numere trebuie să fie par $\Rightarrow a = 2$ sau $c = 2$	1p
$a = 2 \Rightarrow c = 89$, număr prim, deci $a = 2, b = 17, c = 89$	2p
$c = 2 \Rightarrow a = 31$, număr prim, deci $a = 31, b = 17, c = 2$	2p

Enunţ subiect 2, autor Vasile Scurtu, S.G.M. 11/2022

Aflați numerele naturale x și y, știind că $5^x - 5^y = 15000$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$5^y \cdot (5^{x-y} - 1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$	3p
$x > y \Rightarrow 5 \nmid 5^{x-y} - 1 \Rightarrow y = 4$ și $5^{x-4} - 1 = 24 \Rightarrow x = 6$	4p

Enunţ subiect 3, autor Traian Preda

Se consideră trei unghiuri în jurul unui punct, având măsurile direct proporționale cu trei numere naturale consecutive. Arătați că unghiul format de bisectoarele a două dintre unghiuri este congruent cu cel de-al treilea unghi.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm cu $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$ cele 3 unghiuri și cu n numărul mai mic. Atunci $\frac{\sphericalangle AOB}{n} = \frac{\sphericalangle BOC}{n+1} = \frac{\sphericalangle COA}{n+2} = \frac{\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COA}{n+n+1+n+2} = \frac{360°}{3n+3} = \frac{120°}{n+1}$ $\Rightarrow \sphericalangle BOC = 120°$	4p
Fie $(OM$ și $(ON$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și, respectiv $\sphericalangle COA$ Atunci $\sphericalangle MON = \sphericalangle AOM + \sphericalangle AON = \frac{\sphericalangle AOB}{2} + \frac{\sphericalangle COA}{2} = \frac{360° - \sphericalangle BOC}{2} = 120°$ $\Rightarrow \sphericalangle MON = \sphericalangle BOC = 120°$.	3p

Enunţ subiect 4, autor Flavian Georgescu

Pentru $n \in \boldsymbol{N}^*, n \geq 3$, o mulțime nevidă $M \subseteq \{0,1,2, \dots, n-1\}$ se numește $n - bun$ă dacă are proprietatea că, pentru orice două numere x și y din mulțimea M, restul împărțirii lui $x + y$ la n este și el în mulțimea M.

a) Determinați mulțimile $3 - bune$.
b) Dacă M este mulțime $n - bun$ă, iar $1 \notin M$ și $3 \in M$, demonstrați că $n \vdots 3$.
c) Câte mulțimi $2023 - bune$ există?

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $1 \in M \Rightarrow 1 + 1 = 2 \in M$. Cum $1 + 2 = 3 \Rightarrow 0 \in M \Rightarrow M = \{0,1,2\}$ Dacă $2 \in M$, cum $2 + 2 = 4 \Rightarrow 1 \in M$ $\Rightarrow$ mulțimile $3 - bune$ sunt $\{0,1,2\}$ și $\{0\}$	1p
b) Dacă $n = 3k + 1$, cum $3 \in M \Rightarrow 3m \in M$, pentru orice $m \leq k \Rightarrow 3k \in M \Rightarrow 2 \in M$. Dar $3k \in M, 2 \in M \Rightarrow 1 \in M$, contradicție!	1p
Dacă $n = 3k + 2$, cum $3 \in M \Rightarrow 3m \in M$, pentru orice $m \leq k \Rightarrow$ $3k \in M, 2 \in M \Rightarrow 1 \in M$, contradicție! $\Rightarrow n \vdots 3$	1p
c) Dacă $1 \in M \Rightarrow 1 + 1 \in M \Rightarrow 1 + 2 \in M \Rightarrow 4,5, \dots, 2022 \in M \Rightarrow 0 \in M \Rightarrow$ $M = \{0,1,2, \dots, 2022\}$	1p
Fie $a \in M, a > 1$, cel mai mic element nenul din M, dacă există. Dacă n este cel mai mic număr natural cu proprietatea că $na \geq 2023 \Rightarrow$ $2023 > na - a \Rightarrow a > 2023 - na$ Avem $na - 2023 = r \in M, r < a$. Dacă $r > 0$ contradicție, a minim! Dacă $r = 0 \Rightarrow na = 2023 \Rightarrow a \mid 2023 \Rightarrow a \in \{7,17,7 \cdot 17,17^2\}$	2p
Mulțimile $2023 - bune$ sunt $A = \{0,1,2, \dots, 2022\}, \{0\}, A \cap M_7, A \cap M_{17}$, $A \cap M_{119}, A \cap M_{289}$, în total 6 mulțimi $2023 - bune$.	1p