CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 –

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H1

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

7p Se consideră $P(x)=x^{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}}\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}}\cdot\ldots\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Calculați partea întreagă a numărului $a=\dfrac{1+3+3^2+3^3+3^4}{P\left(\left(\sqrt[4]{\sqrt[5]{3}}\right)^{\sqrt{101}+1}\right)}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$P(x)=x^{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}}=x^{\sqrt{101}-1}$	**3p**
$P\left(\left(\sqrt[4]{\sqrt[5]{3}}\right)^{\sqrt{101}+1}\right)=\left[\left(\sqrt[20]{3}\right)^{\sqrt{101}+1}\right]^{\sqrt{101}-1}=3^5$	**1p**
Cum $1+3+3^2+3^3+3^4=\dfrac{3^5-1}{2}$, atunci $a=\dfrac{3^5-1}{2\cdot 3^5}$	**2p**
$a=\dfrac{3^5-1}{2\cdot 3^5}\in(0,\ 1)$, deci $[a]=0$	**1p**

Enunț subiect 2:

7p Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}^*\ \middle|\ \log_{x+\frac{1}{x}}(9-2^x)>\log_{x+\frac{1}{x}}(4^{x-1}+1)\right\}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Condițiile de existență sunt: $x+\dfrac{1}{x}>0, x+\dfrac{1}{x}\neq 1, 9-2^x>0\Rightarrow x\in(0,\log_2 9)$	**2p**
Pentru $x\in(0,\log_2 9)$ se obține că $x+\dfrac{1}{x}>1$, deci inegalitatea din enunț devine $9-2^x>4^{x-1}+1\Leftrightarrow 36-4\cdot 2^x>2^{2x}+4\Leftrightarrow 2^{2x}+4\cdot 2^x-32<0$	**2p**
Notând $2^x=t>0$, inecuația $t^2+4t-32<0$ are soluția $t\in(-8,4)$	**1p**
Cum $x\in(0,\log_2 9)$, atunci $2^x=t\in(1,9)\cap(-8,4)=(1,4)$, deci $x\in(0,2)$	**2p**

Enunț subiect 3:

7p Se consideră ecuația $az^2+bz+c=0$, cu $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ și $|a|=|b|=|c|$. Arătați că ecuația are cel puțin o soluție de modul 1 dacă și numai dacă $b^2=ac$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă z_1,z_2 sunt soluțiile ecuației, atunci $\lvert z_1+z_2\rvert=\left\lvert -\frac{b}{a}\right\rvert=1$ și $\lvert z_1z_2\rvert=\left\lvert\frac{c}{a}\right\rvert=1$	**1p**
Considerăm că ecuația are cel puțin o soluție de modul 1 și demonstrăm că $b^2=ac$: Dacă z_1 este o soluție cu $\lvert z_1\rvert=1$, atunci $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_2\rvert=\left\lvert\frac{c}{a}\right\rvert=1$	**1p**
Dar $\lvert z_1+z_2\rvert^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$, deci $1=\lvert z_1\rvert^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+\lvert z_2\rvert^2$ Obținem $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-1\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-1\Rightarrow z_1^2+z_2^2=-z_1z_2\Rightarrow(z_1+z_2)^2=z_1z_2$ $\Rightarrow\left(-\frac{b}{a}\right)^2=\frac{c}{a}\Rightarrow b^2=ca$	**2p**
Considerăm $b^2=ac$ și demonstrăm că ecuația are cel puțin o soluție de modul 1: Dacă $b^2=ca$, atunci $\left(-\frac{b}{a}\right)^2=\frac{c}{a}$, deci $(z_1+z_2)^2=z_1z_2\Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_1z_2=0$	**1p**
Obținem $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\frac{z_1}{z_2}+1=0$ și atunci $\alpha=\frac{z_1}{z_2}$ este o soluție a ecuației $z^2+z+1=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\alpha\rvert=\lvert z_2\rvert$; dar $\lvert z_1z_2\rvert=\left\lvert\frac{c}{a}\right\rvert=1\Rightarrow\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=1$	**2p**

Enunț subiect 4:

7p Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}mx+2, & x<1\\ 2x+3-2m, & x\geq 1\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

Determinați valorile parametrului real m pentru care funcția f este inversabilă.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Considerăm $x<1$, pentru care $f(x)=mx+2$: Dacă $m=0$, $f(x)=0$ nu este injectivă, fiind funcție constantă; deci pentru $m=0$ funcția nu este bijectivă și, prin urmare, nici inversabilă	**1p**
Dacă $m<0$, cum $x<1\Rightarrow mx+2>m+2\Rightarrow f(x)\in(m+2,+\infty)\Rightarrow f((-\infty,1))=(m+2,+\infty)$ (1) Dacă $m>0$, cum $x<1\Rightarrow mx+2<m+2\Rightarrow f(x)\in(-\infty,m+2)\Rightarrow f((-\infty,1))=(-\infty,m+2)$ (2)	**2p**
Considerăm $x\geq 1$, pentru care $f(x)=2x+3-2m$: Din $x\geq 1\Rightarrow 2x+3-2m\geq 5-2m\Rightarrow f(x)\in[5-2m,+\infty)\Rightarrow f([1,+\infty))=[5-2m,+\infty)$ (3)	**1p**
Funcția f este inversabilă $\Leftrightarrow f$ bijectivă $\Leftrightarrow f((-\infty,1))\cup f([1,+\infty))=\mathbb{R}$ și $f((-\infty,1))\cap f([1,+\infty))=\varnothing$ (4)	**1p**
Pentru $m<0$, din relațiile (1) și (3), obținem $f((-\infty,1))\cap f([1,+\infty))\neq\varnothing$, deci $m<0$ nu convine.	**1p**
Pentru $m>0$, din relațiile (2) și (3), obținem condițiile (4) $\Leftrightarrow m+2=5-2m$, deci $m=1>0$.	**2p**