OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a 12-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 *(Gazeta Matematică)*

Determinaţi funcţiile $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ care au simultan proprietăţile:
a) f este bijectivă, derivabilă, cu $f'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (0, \infty)$;
b) f admite o primitivă F cu proprietatea că $F \circ f^{-1}$ este o primitivă a funcţei f^{-1}.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Ştiind că $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in (0, \infty))$ şi că $(F \circ f^{-1})'(x) = f^{-1}(x)$ se obţine $x = f'\left(f^{-1}(x)\right) f^{-1}(x), \forall x \in (0, \infty)$.	**2p**
Deducem că $f(x) = f'(x) \cdot x, \forall x \in (0, \infty))$.	**2p**
Integrând obţinem $\ln\left(f(x)\right) = \ln x + c, \forall x \in (0, \infty)$ cu $c \in \mathbb{R}$.	**1p**
De aici se obţine $f(x) = kx, \forall x \in (0, \infty)$, unde k este un număr real pozitiv.	**2p**

Problema 2 (autor *Ovidiu Șontea*)

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea asociativă $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$. Determinaţi numerele reale a şi b pentru care mulţimea $G = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + b = 0\} \subset [2,4]$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea dată, iar $(G, \circ)$ este grup.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Se observă că $\lvert G \rvert \leq 2$. Din $e \circ e = e$ obţinem $e = 3$ sau $e = 4$	**2p**
Dacă $e = 3$ atunci $x \circ e = 3, \forall x \in G$, deci $G = \{3\}$, de unde $a = -6, b = 9$	**2p**
Dacă $e = 4$, atunci $G = \{4\}$ - caz în care $a = -8, b = 16$	**2p**
sau $G = \{4, x\}$, cu $x \circ x = 4$, de unde $x = 2$, caz în care $a = -6, b = 8$	**1p**

Problema 3 (autori *Costel Chiteş , Vlad Drinceanu*)

Să se calculeze : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x \cdot tgx \cdot (1 - \cos x)} \cdot \int_0^{x^4} \frac{\sin t}{t \cdot \cos t^2} dt$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**

Funcţia $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases} 1, t=0 \\ \frac{\sin t}{t\cdot\cos t^2}, t>0 \end{cases}$ este continuă.	**2p**
Prin aplicarea teoremei de medie, deducem existenţa $c_x\in(0,x^4)$ $a.i.$ $\int_0^{x^4}\frac{\sin t}{t\cdot\cos t^2}dt=x^4\cdot\frac{\sin c_x}{c_x\cdot\cos^2 c_x}$.	**2p**
Cum $\lim_{x\to0}c_x=0$, $\lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$, deducem că valoarea limitei este 2.	**3p**

Problema 4 (***)

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit pentru care există un automorfism al său $f: G\to G$ având proprietăţile: $f(x)\neq x, \forall x\in G\setminus\{e\}$ şi $(f\circ f)(x)=x, \forall x\in G$.

a) Arătaţi că funcţia $\sigma: G\to G$, $\sigma(x)=x^{-1}\cdot f(x)$ este bijectivă;

b) Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Într-adevăr, se presupune că $x,y\in G$ cu $\sigma(x)=\sigma(y)$; atunci $x^{-1}\cdot f(x)=y^{-1}\cdot f(y)$ şi $f(x\cdot y^{-1})=x\cdot y^{-1}$. Cum $f(x)=x$ implică $x=e$, deducem că $x=y$, deci σ este injectivă, iar cum G este finit, va rezulta că σ este bijectivă.	**3p**
b)Din a) deducem că fiecare element $x\in G$ poate fi scris în mod unic ca $x=y^{-1}f(y)$ pentru un $y\in G$.	**2p**
Astfel, avem $f(x)=f(y)^{-1}f\big(f(y)\big)=f(y)^{-1}y=x^{-1}$ deci pentru orice $a,b\in G$, avem $b^{-1}a^{-1}=(ab)^{-1}=f(ab)=f(a)f(b)=a^{-1}b^{-1}$.	**2p**