CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI” – ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 -

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H1

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Pe mulțimea $M=\left(0,\frac{1}{4}\right)$, se consideră legea de compoziție $x*y=\frac{xy}{20xy-4x-4y+1}$, pentru orice $x,y\in M$.

2p **a)** Arătați că $x*y=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}-4\right)\left(\frac{1}{y}-4\right)+4}$, pentru orice $x,y\in M$.

2p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție.

3p **c)** Fie mulțimea $A=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right\}$, unde $n,m\in\mathbb{N}, n>m>4$. Arătați că mulțimea A nu este parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție dată.

Subiectul 2

Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție $z_1*z_2=az_1^2+bz_2+c$, unde a,b,c sunt numere reale nenule fixate.

3p **a)** Determinați numerele $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ pentru care are loc egalitatea

$$\left[i*(-i)\right]+\left[(2i)*(-2i)\right]+\ldots+\left[(ni)*(-ni)\right]=5n\left[10-(n+1)(2n+1)-4(n+1)i\right],$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

4p **b)** Arătați că $|z|<2\left|\frac{c}{b}\right|$, pentru orice $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, cu proprietatea că $z*z=0$.

Subiectul 3

2p **a)** Arătați că $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{2^x+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^x\sin^2 x}{2^x+1}dx$ și că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$.

5p **b)** Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră $I_n=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2^x+1}\cdot\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx$.

Arătați că $I_n=\frac{\pi}{4}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul 4

Fie funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^{\operatorname{arctg} x}e^{\operatorname{tg}^2 t}dt$.

3p **a)** Arătați că $f'(x)=e^{x^2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

4p **b)** Arătați că $\int_0^1\frac{x\cdot f(x)}{e^{x^2}}dx+\frac{1}{2e}\int_0^1\frac{e^{x^2}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}$.