OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a 9-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor *Flavian Georgescu*)

Determinați toate mulțimile M, cu elementele numere întregi, care respectă simultan următoarele două condiții:

i) $1 \notin M$, $2 \notin M$, $3 \in M$

ii) Oricum am lua $x, y \in M$, nu neapărat distincte, avem $x - y \in M$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$3-3=0\in M$	**1p**
$0-3=-3\in M$, $3-(-3)=6\in M$, $6-(-3)=9\in M$, inductiv $3n\in M,\forall n\in\mathbb{N}$	**2p**
$0-3n=-3n\in M,\forall n\in\mathbb{N}$, deci $3n\in M,\forall n\in\mathbb{Z}$	**1p**
Dacă $x\in M$ și $3n<x<3n+3, n\in\mathbb{Z}$, atunci $y=3n+3-x\in M$ și $y\in\{1,2\}$ - fals	**2p**
În concluzie, $M=\{3n\mid n\in\mathbb{Z}\}$	**1p**

Problema 2 (autor *Vlad Petru*, SGM 12/2022)

Rezolvați ecuația $\left\{\frac{2x+1}{6}\right\}+\left\{\frac{x+5}{3}\right\}=\frac{5x+4}{12}$ în mulțimea numerelor reale. Prin $\{a\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real a.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Ecuația este echivalentă cu $\left[\frac{2x+1}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{3}\right]=\frac{x+6}{4}$, sau $\left[\frac{2x+1}{6}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]=\frac{x+2}{4}$	**2p**
Înlocuim $x=4t-2, t\in\mathbb{Z}$ și obținem $\left[\frac{4t}{3}-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{4t}{3}\right]=t$, $t\in\mathbb{Z}$	**2p**
Folosind identitatea Hermite, sau analizând cazuri modulo 3, obținem $t=1$	**2p**
$x=2$	**1p**

Problema 3 (autor ***)

Se consideră un triunghi ABC care nu este dreptunghic. Notăm centrul cercului său circumscris cu O și punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C, în acest cerc, cu A', B', respectiv C'. Notăm ortocentrele triunghiurilor $A'BC$, $AB'C$, ABC' cu H_a, H_b respectiv H_c. Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{AH_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}$;

b) Centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $H_aH_bH_c$ coincid.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\overrightarrow{AH_a} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH_a}$	**1p**
$\overrightarrow{OH_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'}$ (Sylvester)	**2p**
$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$, deci $\overrightarrow{AH_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}$	**1p**
b) $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC	**1p**
Ținând cont și de a), dacă G' este centrul de greutate al triunghiului $H_aH_bH_c$, atunci $3\overrightarrow{OG'} = \sum \overrightarrow{OH_a} = \sum(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH_a}) = \sum \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OG}$, deci $G = G'$	**2p**

Problema 4 (autor *Simion Petre*)

a) Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $a + 2b + 3c = 1$. Aflați valoarea maximă posibilă a expresiei $(a+c)(b+c)$.

b) Numerele reale pozitive x, y, z, p verifică relația $xyz(x+y+z) = p^4$. Demonstrați că $x + 2y + 3z \geq 4p$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $1 = (a+c) + 2(b+c) \geq 2\sqrt{2(a+c)(b+c)}$, deci $E = (a+c)(b+c) \leq \frac{1}{8}$	**2p**
Pentru $a = \frac{3}{8}, b = \frac{1}{8}, c = \frac{1}{8}$ obținem $a + 2b + 3c = 1$ și $E = \frac{1}{8}$, deci $\max E = \frac{1}{8}$	**1p**
b) $x + 2y + 3z = (x+z) + 2(y+z) \geq 2\sqrt{2(x+z)(y+z)}$	**2p**
$2\sqrt{2(x+z)(y+z)} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy + z(x+y+z)} \geq 2\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{xyz(x+y+z)}} = 4p$	**2p**