CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 –

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H1

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB = A$ și $BA = B$.

4p **a)** Arătați că $\det(A) = \det(B) \in \{0,\ 1\}$.

3p **b)** Arătați că $A^n = A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $AB = A \Rightarrow \det(AB) = \det(A) \Rightarrow \det(A) \cdot \det(B) = \det(A)$ $BA = B \Rightarrow \det(BA) = \det(B) \Rightarrow \det(B) \cdot \det(A) = \det(B)$, deci $\det(A) = \det(B)$	**2p**
$(\det(A))^2 = \det(A) \Rightarrow \det(A)(\det(A) - 1) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$ sau $\det(A) = 1$	**2p**
b) Egalitatea se demonstrează prin inducție: Pentru $n = 2$ avem $A^2 = A \cdot A = (AB)A = A(BA) = AB = A$	**2p**
Presupunem că $A^n = A$ pentru un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ oarecare fixat și arătăm că $A^{n+1} = A$ $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$	**1p**

Enunț subiect 2:

Se consideră determinanții $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b-a & c-a & a-2c \\ b-a & c-a & b-2c \\ a-c & b-c & -a \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a-c & b-c & 2a \\ b-a & c-a & a+2b \\ a-c & b-c & 2a+c \end{vmatrix}$, iar $\Delta = (a+b)\Delta_1 + c\Delta_2$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3p **a)** Arătați că Δ este număr întreg divizibil cu $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$, pentru orice a, b, $c \in \mathbb{Z}$.

4p **b)** Dacă a, b, c, sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci arătați că $\Delta = 0$ dacă și numai dacă triunghiul este echilateral sau dreptunghic.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\Delta_1 \overset{L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-b \\ b-a & c-a & b-2c \\ a-c & b-c & -a \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ a-c & b-c \end{vmatrix}$	**1p**

$\Delta_2 \overset{L_1-L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -c \\ b-a & c-a & a+2b \\ a-c & b-c & 2a+c \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ a-c & b-c \end{vmatrix}$	1p
$\Delta = \left(a^2-b^2-c^2\right)\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ a-c & b-c \end{vmatrix} = \left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$ Cum $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $\Delta \in \mathbb{Z}$ și $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ divide Δ.	1p
b) $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right) \Leftrightarrow a^2-b^2-c^2=0$ sau sau $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$ sau $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow$	2p
$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$ sau $a=b=c \Leftrightarrow$ triunghiul este dreptunghic sau echilateral	2p

Enunț subiect 3:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+2}+3\sqrt{x^2+3}+\ldots+n\sqrt{x^2+n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

3p **a)** Determinați numărul $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{f(x)}=e^{5050}$.

4p **b)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\dfrac{n(n+1)}{2}x\right)=0$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{f(x)}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+1}} =$	1p
$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+3\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\ldots+n\sqrt{1+\frac{n}{x^2}}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = e^{1+2+3+\ldots+n} = e^{\frac{n(n+1)}{2}}$	1p
$\dfrac{n(n+1)}{2}=5050 \Rightarrow n=100$	1p
b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\dfrac{n(n+1)}{2}x\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+2}+3\sqrt{x^2+3}+\ldots+n\sqrt{x^2+n}-x-2x-3x-\ldots-nx\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x^2+2}-2x\right)+\ldots+\lim\limits_{x\to\infty}\left(n\sqrt{x^2+n}-nx\right)=$	2p
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^2}{\sqrt{x^2+2}+x}+\ldots+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{x^2+n}+x}=0$	2p

Enunț subiect 4:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(a^2+1)x^3+bx^2+1}, & x<0\\ \left(\dfrac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{2\sqrt{a^2+1}}\right)^{2x}, & x\geq 0\end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

3p **a)** Determinați numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcției f admite, spre $-\infty$, asimptota de ecuație $y=x+1$.

4p **b)** Arătați că, pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$, graficul funcției f admite, spre $+\infty$, asimptota orizontală de ecuație $y=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{a^2+1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\sqrt[3]{a^2+1}$; iar $m=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{a^2+1}=1\Leftrightarrow a=0$	**1p**
$n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+bx^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+bx^2+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+bx^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+bx^2+1}+x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(b+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+1\right)}=\dfrac{b}{3}$; iar $n=1\Leftrightarrow b=3$	**2p**
b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}}{\sqrt{a^2+1}}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{a^2+1}\right)^{x}$	**2p**
$0\leq\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leq 1$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $0\leq\left(\dfrac{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{a^2+1}\right)^{x}\leq\left(\dfrac{1}{a^2+1}\right)^{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $0<\dfrac{1}{a^2+1}<1$, $\forall a\in\mathbb{R}^*$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{a^2+1}\right)^{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ și dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**