**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”**
**– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 –**

**CLASA a IX-a**
**SECȚIUNEA H2**

**SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Enunț subiect 1:**

**3p** **a)** Demonstrați că $\dfrac{1}{k(k+3)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+3}\right), \forall k\in\mathbb{N}^*$.

**4p** **b)** Arătați că numărul $S=\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\ldots+\dfrac{1}{2020\cdot2023}$ aparține intervalului $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| **a)** $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+3}=\dfrac{k+3-k}{k(k+3)}=\dfrac{3}{k(k+3)}$ | **2p** |
| $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+3}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{k(k+3)}=\dfrac{1}{k(k+3)}$. | **1p** |
| **b)** $S=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right)+\ldots+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2023}\right)$ | **1p** |
| $S=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\ldots+\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2023}\right)\Rightarrow S=\dfrac{1}{3}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2023}\right)$ | **2p** |
| Cum $0<1-\dfrac{1}{2023}<1$, se obține $S\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$ | **1p** |

**Enunț subiect 2:**

Numărul $m\sqrt{n}$ se numește număr „statornic” dacă $m,n\in\mathbb{N},\ 2\le m<20,\ 2\le n<10$, iar $m$ și $n$ sunt numere prime.

**3p** **a)** Arătați că $\sqrt{2023}$ este un număr „statornic”.

**4p** **b)** Arătați că suma tuturor numerelor „statornice” este mai mică decît 770.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| **a)** $2023=17^2\cdot7\Rightarrow\sqrt{2023}=17\sqrt{7}$ | **2p** |
| $m=17<20, n=7<10$ numere prime $\Rightarrow \sqrt{2023}$ număr „statornic” | **1p** |
| **b)** Notăm suma cu S și obținem<br>$S=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{2}+\ldots+19\sqrt{7}=$ | **1p** |
| $=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+\ldots+19\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)=$<br>$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\cdot(2+3+5+7+11+13+17+19)=77\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$ | **1p** |
| $S<77(2+2+3+3)=77\cdot10=770$ | **2p** |

**Enunț subiect 3:**

O progresie aritmetică are primul termen egal cu 10 și rația $\frac{1}{10}$.

**3p** **a)** Determinați al câtelea termen al progresiei este 2023.

**4p** **b)** Calculați suma termenilor progresiei care sunt mai mici ca 50 și nu sunt numere naturale.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| **a)** Din $a_n = a_1 + (n-1)r$ obținem că $2023 = 10 + (n-1)\frac{1}{10} \Rightarrow 2013 = \frac{n-1}{10}$ | **2p** |
| $n-1 = 20130 \Rightarrow n = 20131$ și numarul 2023 este al 20131-lea termen al progresiei | **1p** |
| **b)** $50 = 10 + (n-1)\cdot\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{n-1}{10} = 40 \Rightarrow n = 401$, deci $a_{401} = 50$ | **1p** |
| Progresia are 400 de termeni mai mici decat 50 și $S_{400} = \frac{(a_1 + a_{400})\cdot 400}{2} = 11980$ | **1p** |
| Suma termenilor progresiei mai mici decat 50 care sunt numere naturale este $10+11+12+...+49 = (1+2+...+49)-(1+2+...+9) = 1225-45 = 1180$ | **1p** |
| Rezultatul căutat este $11980 - 1180 = 10800$ | **1p** |

**Enunț subiect 4:**

Fie un triunghi $ABC$, în care lungimea laturii $AB$ este strict mai mică decât lungimea laturii $AC$, $M$ este mijlocul laturii $BC$ și $D$ este piciorul înălțimii duse din $A$ pe $BC$.

**3p** **a)** Calculați $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

**4p** **b)** Știind că $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, aflați numărul real $x$ pentru care $\overrightarrow{MD} = x\cdot\overrightarrow{DC}$.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| **a)** Întrucât $M$ este mijlocul laturii $BC$, obținem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ | **1p** |
| $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ | **2p** |
| **b)** $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} =$ | **1p** |
| $= \frac{1}{4}\cdot 2\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}\right)$ | **1p** |
| $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow D$ este mijlocul lui $BM$ | **1p** |
| Obținem $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DM} + 2\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{DM} = -3\overrightarrow{MD} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ | **1p** |