CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 -

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H2

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3\cdot e^x$.

3p **a)** Determinați numărul punctelor de inflexiune ale unei primitive oarecare a funcției *f*.

4p **b)** Determinați primitiva *G* a funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)+\sqrt{x}\cdot f'(x)$, cu proprietatea că $G(1)=e+1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a lui f, atunci $F'(x)=f(x)$ și $F''(x)=x^2(x+3)e^x, \forall x\in\mathbb{R}$	**1p**
$F''(x)=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$ și $x_3=-3$	**1p**
$F''(x)<0, \forall x\in(-\infty,-3)$ și $F''(x)>0, \forall x\in(-3,\infty)$, deci $x=-3$ este unicul punct de inflexiune al funcției F	**1p**
b) $g(x)=\left(\sqrt{x}\cdot f(x)\right)', \forall x\in(0,\infty)$	**1p**
Dacă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui g, atunci $G(x)=\sqrt{x}\cdot f(x)+k$, cu $k\in\mathbb{R}$	**1p**
$G(1)=e+k \Rightarrow k=1$, deci $G(x)=x^3\sqrt{x}\cdot e^x+1$	**2p**

Enunț subiect 2:

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}, n\in\mathbb{N}^*$.

3p **a)** Arătați că $\int_0^1 f_1(x)\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot e^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$.

4p **b)** Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{2023\sqrt{2}}\le\int_0^1 f_{2022}(x)dx\le\frac{1}{2023}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$	**1p**
$\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big\vert_0^1 = \frac{e-2}{e}$	**2p**
b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \le 1, \forall x \in [0,1]$	**1p**
$\frac{x^{2022}}{\sqrt{2}} \le \frac{x^{2022}}{\sqrt{x^2+1}} \le x^{2022}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2022}}{\sqrt{2}} dx \le \int_0^1 \frac{x^{2022}}{\sqrt{x^2+1}} dx \le \int_0^1 x^{2022} dx$	**1p**
$\int_0^1 x^{2022} dx = \frac{1}{2023}$ și finalizare	**2p**

Enunț subiect 3:

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = 1 - 2(x-1)(y-1)$.

3p **a)** Arătați că $x \circ \frac{1}{x} \le 1, \forall x \in (-\infty, 0)$.

4p **b)** Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $x \circ \frac{1}{x} = 1 + 2\frac{(x-1)^2}{x}$	**1p**
$(x-1)^2 \ge 0$ și $x < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0)$ $\Rightarrow 1 + 2\frac{(x-1)^2}{x} \le 1$, $\forall x \in (-\infty, 0)$	**2p**
b) Definiția elementului simetrizabil	**1p**
Determinarea elementului neutru $e = \frac{1}{2}$	**1p**
$x \circ x' = e$ și $x' = x \Rightarrow x \circ x = e$	**1p**
$1 - 2(x-1)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = \frac{3}{2}$	**1p**

Enunț subiect 4:

Pe mulțimea $M = [4, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt{(x^2-16)(y^2-16)+16}$.

3p **a)** Calculați $E = 3^{\log_3 4} \circ 4^{\log_4 5} \circ \ldots\ldots \circ 2022^{\log_{2022} 2023} \circ 2023^{\log_{2023} 2024}$.

4p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care funcția $f : M \to [0; +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$ verifică relația $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in M$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $E = 4 \circ 5 \circ ...... \circ 2023 \circ 2024$	**1p**
$x \circ 4 = 4 \circ x = 4, (\forall) x \in [4, +\infty)$	**1p**
Deoarece legea este „$\circ$”este asociativă, $E = (3 \circ 4) \circ (5 \circ ... \circ 2023) = 4 \circ (5 \circ ... \circ 2023) = 4$	**1p**
b) Pentru orice $x, y \in M$, $f(x \circ y) = \sqrt{(x^2 - 16)(y^2 - 16) + 16 + a}$ și $f(x) \cdot f(y) = \sqrt{(x^2 + a)(y^2 + a)}$	**1p**
$f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow (x^2 + y^2)(a + 16) + a^2 - a - 272 = 0, (\forall) x, y \in M$	**1p**
$\begin{cases} a + 16 = 0 \\ a^2 - a - 272 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -16 \\ a \in \{-16; 17\} \end{cases}$, deci $a = -16$	**2p**