OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023

CLASA a 11-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiectul 1, *autori Ana-Maria și Daniel Petriceanu*

a) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ și $A^{2023} = B^{2023} = I_n$. Demonstrați că $det(A+B) \neq 0$.
b) Demonstrați că nu există $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $det(A^2 - 2I_2) = 0$ și $\det(A^2 - 3I_2) = 0$.

Detalii rezolvare		**Barem asociat**
a)	Din ipoteză: $(A+B)(A^{2022} - A^{2021}B + \cdots + B^{2022}) = A^{2023} + B^{2023} = 2I_n$	**2p**
	Rezultă $A+B$ este inversabilă, deci $\det(A+B) \neq 0$.	**1p**
b)	Presupunem că există A cu proprietățile cerute. Avem $det(A - \sqrt{2}I_2)(A + \sqrt{2}I_2) = 0$ $\Leftrightarrow\ det(A - \sqrt{2}I_2) = 0$ sau $det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$.	**2p**
	Fie $det(A - \sqrt{2}I_2) = 0$, rezultă $det(A) + 2 - \sqrt{2}\, tr(A) = 0$. Deoarece $det(A)$, $tr(A) \in \mathbb{Q}$, rezultă $tr(A) = 0$ și $det(A) = -2$.	**1p**
	Din teorema Hamilton- Cayley rezultă $A^2 - 2I_2 = O_2$, iar $det(A^2 - 3I_2) = 1$. Fals. Analog pentru $\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$. Obs. Se poate folosi în rezolvare polinomul caracteristic al unei matrice.	**1p**

Enunţ subiectul 2, *autori Costel Chiteș și Daniel Petriceanu*

Fie mulțimea $M = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ și $f: M \to M, f(A) = A^*$, unde A^* reprezintă matricea adjunctă a matricei A.
a) Dacă n este număr par, demonstrați că f este funcție bijectivă.
b) Este f funcție bijectivă dacă n este număr impar?

Detalii rezolvare		Barem asociat
a)	Fie $B \in M, f(A) = B$. Atunci $A^* = B$. Notăm $d = det(A), d \neq 0$. Deoarece A este inversabilă, atunci $A^* = (det\, A) \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^* = dA^{-1}$, rezultă $dA^{-1} = B \Rightarrow \det(dA^{-1}) = \det(B) \Leftrightarrow d^{n-1} = \det(B) \Leftrightarrow d = \sqrt[n-1]{\det(B)}, n-1$ este număr impar.	**3p**
	Am obținut că $\left(\sqrt[n-1]{det\, B}\right)A^{-1} = B \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\det(B)}}B$	**1p**
	Obținem că $A = \sqrt[n-1]{det(B)}\, B^{-1} \epsilon M$. Ecuația considerată are soluție unică, deci funcția f este bijectivă.	**1p**
b)	Fie $A_1 = I_n$ și $A_2 = -I_n$. Deoarece $det(A_1) = 1$ și $det(A_2) = -1$, rezultă $A_1, A_2 \in M$. $f(A_1) = I_n$, iar $f(A_2) = I_n$. Rezultă că funcția f nu este injectivă, deci nu este bijectivă.	**2p**

Enunţ subiectul 3, *autor Nicolae Mușuroia (Gazeta Matematică)*

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenii strict pozitivi dat de relația $a_{n+1} = ln(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), n \geq 1$. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)e^{a_n}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Relația de recurență se poate scrie $a_{n+1} = ln(e^{a_n} + a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $a_n > 0$, rezultă $ln(e^{a_n} + a_n) > ln\, e^{a_n} = a_n$, atunci $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 1$. Am demonstrat că $(a_n)_{n\geq 1}$ este șir strict crescător.	**3p**
Din teorema lui Weierstrass pe $\overline{\mathbb{R}}$ rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L,\ L \in \overline{\mathbb{R}}$. Presupunem că $L \in \mathbb{R}$, din relația de recurență obținem $L = ln(e^L + L) \Leftrightarrow L = 0$. Fals. Rezultă că $L = \infty$.	**2p**
Pe de altă parte $a_{n+1} - a_n = ln\left(1 + \frac{a_n}{e^{a_n}}\right)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{e^{a_n}} = 0$.	**1p**
Obținem $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)e^{a_n} = \frac{ln\left(1+\frac{a_n}{e^{a_n}}\right)}{\frac{a_n}{e^{a_n}}}$, rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)e^{a_n} = 1$.	**1p**

Enunţ subiectul 4, *autor Daniel Petriceanu*

a) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_{n+1} = |x_n - 1|, \forall n \geq 1, x_1 = a, a \in \mathbb{R}$. Determinați toate valorile lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ să fie convergent.

b) Demonstrați că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$, definit prin $y_n = sinn^2$, $\forall n \geq 1$, nu are limită.

Detalii rezolvare		**Barem asociat**
a)	Dacă $a \geq 0$, notăm $p = [a]$, rezultă $x_{p+1} = a - [a] = \{a\}$, $x_{p+1} \in [0;1)$.	**1p**
	Avem $x_{p+2} = \lvert x_{p+1} - 1 \rvert = 1 - x_{p+1}$, $x_{p+3} = \lvert x_{p+2} - 1 \rvert = x_{p+1}$. Obținem $x_{p+n} = x_{p+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, n număr impar și $x_{p+n} = 1 - x_{p+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, n par. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă $x_{p+1} = 1 - x_{p+1} \Leftrightarrow x_{p+1} = \{a\} = \frac{1}{2}$. Rezultă $a = p + \frac{1}{2}, p \in \mathbb{N}$.	**2p**
	Dacă $a < 0$, atunci $x_2 > 1$, din cazul precedent rezultă $a = j + \frac{1}{2}$, $j \in \mathbb{Z}^*$, $j < 0$. Soluția problemei este $a = j + \frac{1}{2}, j \in \mathbb{Z}$.	**1p**
b)	Presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L, L \in [-1;1]$. Avem $y_{3n} + y_{21n} =$ $2y_{15n}\, cos(216n^2)$, rezultă $L = 0$ sau există $\lim\limits_{n\to\infty} cos(216n^2) = 1$.	**1p**
	Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} cos(216n^2) = 1$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} sin(216n^2) = 0$, rezultă există $\lim\limits_{n\to\infty} sin(432n^2) = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} sin(1296n^2) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_{36n} = 0$, rezultă $L = 0$.	**1p**
	Avem $y_{n+1} = y_n\, cos(2n+1) + cos(n^2)\, sin(2n+1)$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} cos(n^2)\, sin(2n+1) = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} sin(2n+1) = 0$. Notăm $z_n = sin(2n+1)$. Deoarece $z_{2n+1} - z_{2n-1} = 2\, sin\, 2\, cos(4n+1)$, rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} cos(4n+1) = 0$. Fals. Așadar, șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ nu are limită.	**1p**