INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 18.02.2023
CLASA a V-a
BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

- *Nu se acorda puncte din oficiu.*
- *Pentru orice solutie corecta, diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.*
- *Fiecare exercitiu este punctat de la 0 la 7.*

1. Arătați că numărul:

$$n=[2^{15}\cdot2^{24}+(963:9-11\cdot3^2)^{13}+(2^3)^{20}:4^{10}]:2^{41}-2^0$$

este cub perfect.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$[2^{13+26}+(107-11\cdot9)^{13}+(2^3)^{20}:2^{2\cdot10}]:2^{41}-1$	2p
$(2^{39}+8^{13}+2^{3\cdot20}:2^{2\cdot10}):2^{41}-1$	1p
$(2^{39}+2^{3\cdot13}+2^{3\cdot20}:2^{2\cdot10}):2^{41}-1$	1p
$(2^{39}+2^{39}+2^{60}:2^{20}):2^{41}-1$	1p
$(2^{40}+2^{40}:):2^{41}-1$	1p
Finalizare $2^{41}:2^{41}-1=1-1=0$ cub perfect	1p

Prof.Chira Elisabeta Micamarianna

2. Aflați numerele naturale a,b,c pentru care: $2^a+4^b+8^c=16^{100}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$2^a+2^{2b}+2^{3c}=2^{400}$	1p
Dacă 3c=399 atunci c=133 și $2^a+2^{2b}=2^{399}$	1p
Dacă a=399, atunci $2^{2b}=0$. contradicție. Deci $a \leq 398$. Atunci $2^a+2^{2b}\leq2^{398}+2^{398}$ sau $2^a+2^{2b}\leq2^{399}$.Egalitatea are loc pentru a=398,b =199	2p
Dacă3c<399.atunci $3c\leq396$ și deducem $2^a+2^{2b}+2^{3c}\leq2^a+2^{398}+2^{396}\leq2^{399}+2^{398}+2^{396}<2^{399}+2^{398}+2^{398}=2^{400}$	2p
a= 398,b= 199,c=133	1p

Prof.Chira Elisabeta Micamarianna, G.M.11.2018

3. Să se arate că dublul sumei numerelor naturale care împărțite la 2023 dau câtul și restul egale se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie n număr natural astfel încât n : 2023 =c rest r , c = r	1p
Din teorema împărțirii cu rest avem 1) n=2023 ·c +r și 2) r< 2023	1p
Deci r poate fi egal cu 0,1,2,3,...,2022	1p
Deoarece c=r rezultă n=2023·r +r , deci n= 2024·r	1p

Pentru $r=0$ avem $n=2024\cdot 0$ $r=1$ avem $n=2024\cdot 1$ $r=2$ avem $n=2024\cdot 2$ ... $r=2022$ avem $n=2024\cdot 2022$	1p
Suma numerelor este egală cu $2024\cdot(0+1+2+...+2022)=$ $=2024\cdot[(2022\cdot 2023):2]=$ $=2024\cdot 1011\cdot 2023$	1p
Dublul sumei numerelor cu proprietatea din enunt este egală cu $2\cdot 2024\cdot 1011\cdot 2023=2022\cdot 2023\cdot 2024$ Deci poate fi scris ca produsul a trei numere naturale consecutive	1p

Prof.Iuga Elena

4. a) Să se determine numărul de pagini al unui dicționar, dacă pentru numerotarea paginilor acestuia sunt necesare 2022 cifre.

   b) Să se scrie numărul 2021^{2023} ca suma a 5 pătrate perfecte.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) De la pagina 1 la pagina 9 folosim pentru numerotare 9 cifre De la pagina 10 la pagina 99 Avem $(99-10)+1=89+1=90$ pagini folosim pentru numerotare $90\cdot 2=180$ cifre Am folosit $9+180=189$ (cifre) Au rămas $2022-189=1833$ cifre de folosit pentru paginile care vor fi numerotate cu numere formate din 3 cifre $1833:3=611$ De la pagina 100 la pagina 710 Avem $(710-100)+1=610+1=611$ pagini folosim pentru numerotare $611\cdot 3=1833$ cifre Deci $2022=9+180+1833$ Dicționarul are 710 pagini	1p 1p 1p 1p
b) $2021^{2023}=2021\cdot 2021^{2022}=$ $=(1600+400+16+4+1)\cdot 2021^{2022}=$ $=(40^2+20^2+4^2+2^2+1^2)\cdot(2021^{1011})=$ $=40^2\cdot(2021^{1011})^2+20^2\cdot(2021^{1011})^2+4^2\cdot(2021^{1011})^2+2^2\cdot(2021^{1011})^2+1^2\cdot(2021^{1011})^2=$ $=(40\cdot 2021^{1011})^2+(20\cdot 2021^{1011})^2+(4\cdot 2021^{1011})^2+(2\cdot 2021^{1011})^2+(1\cdot 2021^{1011})^2$ Ceea ce demonstrează faptul că numărul dat poate fi scris ca suma a cinci pătrate perfecte.	1p 1p 1p