OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023

CLASA a 11 -a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

SUBIECTE

1. **a)** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ și $A^{2023} = B^{2023} = I_n$. Demonstrați că $det(A + B) \neq 0$.

b) Demonstrați că nu există $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $det(A^2 - 2I_2) = 0$ și $\det(A^2 - 3I_2) = 0$.

2. Fie mulțimea $M = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ și $f: M \to M, f(A) = A^*$, unde A^* reprezintă matricea adjunctă a matricei A.

a) Dacă n este număr par, demonstrați că f este funcție bijectivă.

b) Este f funcție bijectivă dacă n este număr impar?

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenii strict pozitivi dat de relația $a_{n+1} = ln(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), n \geq 1$. Determinați $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) e^{a_n}$.

4. **a)** Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_{n+1} = |x_n - 1|, \forall n \geq 1, x_1 = a, a \in \mathbb{R}$. Determinați toate valorile lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ să fie convergent.

b) Demonstrați că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, definit prin $y_n = sin(n^2)$, $\forall n \geq 1$, nu are limită.