CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 –

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H1

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Pe mulțimea $M=\left(0,\frac{1}{4}\right)$, se consideră legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy}{20xy-4x-4y+1}$, pentru orice $x,y\in M$.

2p **a)** Arătați că $x*y=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}-4\right)\left(\frac{1}{y}-4\right)+4}$, pentru orice $x,y\in M$.

2p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție.

3p **c)** Fie mulțimea $A=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right\}$, unde $n,m\in\mathbb{N}, n>m>4$. Arătați că mulțimea A nu este parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție dată.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}-4\right)\left(\frac{1}{y}-4\right)+4}=\dfrac{1}{\frac{(1-4x)(1-4y)}{xy}+4}=\dfrac{1}{\frac{1-4y-4x+16xy+4xy}{xy}}=x*y$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**
b) Legea are element neutru dacă există $e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x, \forall x\in M$ $x*e=x\Rightarrow \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}-4\right)\left(\frac{1}{e}-4\right)+4}=x$ deci $\left(\frac{1}{x}-4\right)\left(\frac{1}{e}-4\right)+4=\frac{1}{x}\Rightarrow\left(\frac{1}{x}-4\right)\left(\frac{1}{e}-5\right)=0$	**1p**
$\frac{1}{e}-5=0\Rightarrow e=\frac{1}{5}\in M$; $\frac{1}{5}*x=x$, deci $e=\frac{1}{5}$	**1p**
c) Mulțimea A este parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție „$*$” dacă $\frac{1}{n}*\frac{1}{m}\in A$, deci putem avea $\frac{1}{n}*\frac{1}{m}=\frac{1}{n}$ sau $\frac{1}{n}*\frac{1}{m}=\frac{1}{m}$	**1p**
$\frac{1}{n}*\frac{1}{m}=\dfrac{1}{(n-4)(m-4)+4}=\frac{1}{n}\Rightarrow(n-4)(m-4)+4=n\Rightarrow(n-4)(m-5)=0$	**1p**

cum $n \neq 4 \Rightarrow m = 5$ și $A = \left\{\frac{1}{n}, e\right\}$	
$\frac{1}{n} * \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow (n-4)(n-4)+4 = n \Rightarrow n = 5$ care nu convine sau $\frac{1}{n} * \frac{1}{n} = \frac{1}{5} \Rightarrow (n-4)(n-4)+4 = 5 \Rightarrow n = 3$ sau $n = 5$ care nu convin În concluzie, mulțimea A nu este parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție dată	**1p**

Enunț subiect 2:

Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = az_1^2 + bz_2 + c$, unde a, b, c sunt numere reale nenule fixate.

3p **a)** Determinați numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ pentru care are loc egalitatea
$$\left[i*(-i)\right] + \left[(2i)*(-2i)\right] + \ldots + \left[(ni)*(-ni)\right] = 5n\left[10-(n+1)(2n+1)-4(n+1)i\right],$$
pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

4p **b)** Arătați că $|z| < 2\left|\frac{c}{b}\right|$, pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cu proprietatea că $z * z = 0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\left[i*(-i)\right] + \left[(2i)*(-2i)\right] + \ldots + \left[(ni)*(-ni)\right] = -a\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right) - bi(1+2+\ldots+n) + nc$	**1p**
Egalitatea din enunț este echivalentă cu $n\left[c - \frac{a(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{b(n+1)}{2}i\right] = 5n\left[10-(n+1)(2n+1)-4(n+1)i\right], \ \forall n \in \mathbb{N}^*$	**1p**
$a = 30$, $b = 40$ și $c = 50$	**1p**
b) $z * z = 0 \Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0$ care, fiind o ecuație cu coeficienți reali, va avea ca soluții numerele z și $\bar{z}$; folosind relațiile lui Viète, obținem $z + \bar{z} = -\frac{b}{a}$ și $z\bar{z} = \frac{c}{a}$, deci $\left\|z+\bar{z}\right\| = \left\|-\frac{b}{a}\right\|$ și $\left\|z\bar{z}\right\| = \left\|\frac{c}{a}\right\|$	**2p**
Rezultă $\|b\| = \|a\| \cdot \|z+\bar{z}\|$ și $\|c\| = \|a\| \cdot \|z\|^2$, de unde $\left\|\frac{c}{b}\right\| = \frac{\|z\|^2}{\|z+\bar{z}\|}$	**1p**
Avem $\|z+\bar{z}\| < \|z\| + \|\bar{z}\| = \|z\| + \|z\| = 2\|z\|$ și inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\|z\| < 2\frac{\|z\|^2}{\|z+\bar{z}\|} \Leftrightarrow \|z+\bar{z}\| < 2\|z\|$, deci este adevărată	**1p**

Enunț subiect 3:

2p **a)** Arătați că $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{2^x+1}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \sin^2 x}{2^x+1}dx$ și că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

5p **b)** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^x+1} \cdot \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$.

Arătați că $I_n = \frac{\pi}{4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Pentru $x=-t$ obținem: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{2^x+1}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(-t)}{2^{-t}+1}(-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^t \sin^2 t}{2^t+1}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \sin^2 x}{2^x+1}$	**1p**
Pentru $x=\frac{\pi}{2}-t$ obținem $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$	**1p**
b) Pentru $x=-t$ obținem $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^t}{2^t+1} \cdot \frac{\sin^{2n} t}{\sin^{2n} t + \cos^{2n} t}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x}{2^x+1} \cdot \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$ (1)	**1p**
Adunând relația (1) cu relația $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^x+1} \cdot \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$, rezultă: $2I_n = I_n + I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x+1}{2^x+1} \cdot \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$	**2p**
Pentru $t=\frac{\pi}{2}-x$ obținem $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx$, de unde rezultă că	**1p**
$2I_n = I_n + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_n = \frac{\pi}{4}$	**1p**

Enunț subiect 4:

Fie funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{\operatorname{tg}^2 t}dt$.

3p **a)** Arătați că $f'(x) = e^{x^2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{x \cdot f(x)}{e^{x^2}}dx + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $g:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}; g(x)=e^{\mathrm{tg}^2 x}$ și $G:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa $\int_0^{\mathrm{arctg}x} e^{\mathrm{tg}^2 t}dt=G(t)\Big\vert_0^{\mathrm{arctg}x}=G(\mathrm{arctg}x)-G(0)$	**1p**
$f'(x)=\left(G(arctgx)-G(0)\right)'=G'(\mathrm{arctg}x)\cdot(\mathrm{arctg}x)'=g(\mathrm{arctg}x)\cdot\frac{1}{x^2+1}=e^{x^2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$	**1p**
b) $I=\int_0^1\frac{x\cdot f(x)}{e^{x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{-x^2}\right)'\cdot f(x)dx=-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\cdot f(x)\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^{-x^2}\cdot f'(x)dx\right)=$	**2p**
$=-\frac{1}{2}\left(\frac{f(1)}{e}-f(0)-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\mathrm{tg}^2 t}dt-\mathrm{arctg}x\Big\vert_0^1\right)=-\frac{1}{2e}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\mathrm{tg}^2 t}dt+\frac{\pi}{8}$ Aplicând substituția $t=\mathrm{arctg}x$,se obține $I=-\frac{1}{2e}\int_0^1 e^{x^2}\frac{1}{x^2+1}dx+\frac{\pi}{8}$	**2p**