CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală

Clasa a IX-a - H2 - STIINTELE NATURII

Subiectul 1.

a) Arătați că media aritmetică a două numere reale pozitive este întotdeauna mai mare sau egală cu media lor geometrică;
b) Arătați că $\left(a+\frac{b}{ac}\right)\left(b+\frac{c}{ab}\right)\left(c+\frac{a}{bc}\right) \geq 8$, pentru orice a,b,c $\in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Subiectul 2.

a) Dacă numerele $x=\frac{1}{b-a}, y=\frac{1}{2b}, z=\frac{1}{b-c}$, unde $a \neq b \neq c, a, b, c \in \mathbb{R}^{*}$ sunt în progresie aritmetică, arătați că a, b, c sunt în progresie geometrică;
b) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Calculați suma:

$$S=\frac{1}{a_1 a_3}+\frac{1}{a_3 a_5}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2} a_n}.$$

Subiectul 3.

a) Arătați că numărul $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}$ este natural;
b) Rezolvați ecuația: $\sqrt{a^2}+\sqrt{(5-a)^2}-3\sqrt{a^2-6a+9}$=-7, unde $a \in (-\infty, 0)$.

Subiectul 4.

a) Se dă triunghiul ABC și punctele M,N și P astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Aflați x și y astfel încât $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$;
b) Arătați că punctele M,N,P sunt coliniare.

<u>Notă</u>: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*