OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 18.02.2023
CLASA a XI-a M1

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{pmatrix}\in M_3(Z)$.

(3p) a) Arătați că $\det(A)=(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.

(2p) b) Arătați că $\det(A)$ este număr întreg par, pentru orice numere întregi a,b,c.

(2p) c) Arătați că, dacă A este inversabilă, A^{-1} nu are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și șirul $(F_n)_{n\geq o}$ definit prin relația de recurență $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, cu $F_0=0, F_1=1$.

(1p) a) Arătați că $A^2=A+I_2$ și $A^{n+1}=A^n+A^{n-1},(\forall)n\in N, n\geq 2$.

(2p) b) Arătați, utilizând eventual metoda inducției matematice, că $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix},(\forall)n\in N^*$.

(2p) c) Folosind eventual proprietățile determinanților, arătați că $F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n,(\forall)n\in N^*$.

(2p) d) Arătați că $F_{n+m}=F_{n+1}\cdot F_m+F_n\cdot F_{m-1},(\forall)n\in N,(\forall)m\in N^*$.

(7p) 3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$,strict crescător, cu proprietatea $x_n^2(x_n^2-1)\geq x_n^3x_{n+1}+2x_n+1, \forall n\geq 1, n\in N$. Arătați că $x_n<-1, (\forall)n\geq 1$.

(7p) 4. Fie $n\geq 2$ un număr natural. Determinați toate matricele $A\in M_n(\mathbb{C})$ cu $A^{2023}=-I_n$, pentru care există $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$ care comută și verifică relațiile $X+Y=I_n$, $AX=X^2$ și $AY=-Y^2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se vor scrie rezolvările complete.

Timp de lucru 3 ore.