INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 18.02.2023

CLASA a XII-a H2-SN

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & \frac{-x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in R$ şi mulţimea

   $G = \{A_x \mid x \in R\} \subset M_3(R)$.

   a) Să demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y \in R$.

   b) Să se arate că $G = \{A_x \mid x \in R\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

2. Pe mulțimea H = (0,1) se definește legea de compoziție $x \circ y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$.

   a) Determinanți elementul neutru al legii,

   b) Arătați că funcția $f:(0,\infty) \to H, f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, are proprietatea $f(xy) = f(x) \circ f(y), (\forall) x, y \in (0,\infty)$

   c) Rezolvați în H ecuația $x \circ x \circ x = \dfrac{1}{2}$.

3. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x}, x > 1 \\ \dfrac{x-1}{x}, 0 < x \le 1 \end{cases}$

   a) Arătaţi că f admite primitive pe $(0,\infty)$

   b) Determinați o primitivă a funcției f pe (0,1], știind că graficul conține punctul A(1,2).

   c) Calculați $\int f^2(\sqrt{x})dx$, x > 1.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$.

   a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

   b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$,

   c) Să se demonstreze că $\dfrac{1}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx \le \dfrac{2}{5}$