CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 18 februarie 2023

Clasa a X-a – H1- TEHN

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Subiectul 1

a) Transformăm radicalii în puteri cu exponent rational și obținem $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{7}{4}}$ și $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{10}{3}}$ **2p**

Deoarece baza puterii este $\frac{1}{6} \in (0,1)$ și $\frac{7}{4} < \frac{10}{3}$ rezultă că $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{7}{4}} > \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{10}{3}}$, adică $x > y$. **1p**

b) Din relația $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) = 1$ obținem $\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$. **1p**

Așadar, trebuie comparate numerele $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ și $\left(2+\sqrt{3}\right)^{1-\sqrt{3}}$. **1p**

Deoarece $2+\sqrt{3} \in (1,\infty)$ și $\sqrt{3}-\sqrt{2} > 1-\sqrt{3}$, rezultă că **1p**

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{1-\sqrt{3}}$, adică $x > y$. **1p**

Subiectul 2

a)

$$\mathrm{c} = \log_{24} 2 = \frac{\log_{60} 2}{\log_{60} 24} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\log_{60} 4}{\log_{60} 4 + \log_{60} 6} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a}{a+b} = \frac{a}{2(a+b)}$$ **3p**

b) $\log_a bc \cdot \log_b ac \cdot \log_c ab$

$$= (\log_a b + \log_a c)\cdot(\log_b a + \log_b c)\cdot(\log_c a + \log_c b) \geq$$ **1p**

$$2\sqrt{\log_a b \cdot \log_a c}\cdot 2\sqrt{\log_b a \cdot \log_b c}\cdot 2\sqrt{\log_c a \cdot \log_c b} = 8$$ **3p**

Subiectul 3

a) $z = ((1-i)^2)^2 + ((1+i)^2)^2 =$ **1p**

$$= (-2i)^2 + (2i)^2 = 4i^2 + 4i^2 = -4-4 = -8$$ **2p**

b) Fie $z = x + yi,\ unde\ x, y \in R \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$ **1p**

$|z^2| = |2i|$, deci $x^2 + y^2 = 2$ **1p**

$x^2 = 1$ $și$ $y^2 = 1$ și conform celei de-a doua ecuații din sistem obținem $x = y = 1$sau $x = y = -1$, deci $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$ **1p**

1p

sau $z^2 = (1+i)^2$, și deci $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$

Subiectul 4

a) $f(f(x)) = 2x^2 - 3x + 2 \Rightarrow f\big(f(1)\big) = 1$ **1p**

$f\Big(f\big(f(1)\big)\Big) = 2f^2(1) - 3f(1) + 2$. adică **1p**

$$f(1) = 1$$ **1p**

b) Funcția este bijectivă (funcție de gradul I) și inversa ei este $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = x$, unde $y = f(x)$. **1p**

Din $y = -3x + 9$ se obține $x = \frac{9-y}{3} = 3 - \frac{y}{3}$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, adică **1p**

$$f^{-1}(y) = -\frac{y}{3} + 3$$ **1p**

Din condiția $g = f^{-1}$ se obține $g(x) = f^{-1}(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și ca urmare se obține $2m + 1 = -\frac{1}{3}$, adică $m = -\frac{2}{3}$. **1p**