OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023

CLASA a 9 -a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

SUBIECTE

Problema 1

Determinați toate mulțimile M, cu elementele numere întregi, care respectă simultan următoarele două condiții:

i) $1 \notin M$, $2 \notin M$, $3 \in M$;

ii) Oricum am lua $x, y \in M$, nu neapărat distincte, avem $x - y \in M$.

Problema 2

Rezolvați ecuația $\left\{\frac{2x+1}{6}\right\} + \left\{\frac{x+5}{3}\right\} = \frac{5x+4}{12}$ în mulțimea numerelor reale. Prin $\{a\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real a.

Problema 3

Se consideră un triunghi ABC care nu este dreptunghic. Notăm centrul cercului său circumscris cu O și punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C, în acest cerc, cu A', B', respectiv C'. Notăm ortocentrele triunghiurilor $A'BC$, $AB'C$, ABC' cu H_a, H_b respectiv H_c. Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{AH_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}$;

b) Centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $H_aH_bH_c$ coincid.

Problema 4

a) Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $a + 2b + 3c = 1$. Aflați valoarea maximă posibilă a expresiei $(a+c)(b+c)$.

b) Numerele reale pozitive x, y, z, p verifică relația $xyz(x+y+z) = p^4$. Demonstrați că $x + 2y + 3z \geq 4p$.