OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 18 februarie 2023

Clasa a X-a

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Subiectul 1

a) $3^{1+\log_3 7} = 3 \cdot 7 = 21$ **1p**

$2^{\log_4 121} = 2^{\log_2 \sqrt{121}} = \sqrt{121} = 11$ **1p**

$3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$ adevărată (logaritmând în baza 2) **1p**

$a = 21 - 11 = 10$, $b = 0$ și media aritmetică $\frac{a+b}{2} = 5$ **1p**

b) $$\frac{\log_a b + \log_b c + \log_c a}{3} \geq \sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a}$$ **1p**

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \frac{lgb}{lga} \cdot \frac{lgc}{lgb} \cdot \frac{lga}{lgc} = 1$$ **1p**

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3 \cdot 1$$ **1p**

Subiectul 2

a) $f(2) = 2$ și $f(4) = 2 \Rightarrow f(2) = f(4) \Rightarrow f$ nu este injectivă **2p**

b) f este crescătoare pe $[0,2]$, adică $Imf = [1,5]$ **1p**

$(a, b) = (1, \sqrt{5})$ sau $(a, b) = (-\sqrt{5}, -1)$ **2p**

c) Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Presupunem, prin reducere la absurd, că f nu este surjectivă. Atunci $Imf \neq A$, adică Imf are cel mult $n - 1$ elemente $\Rightarrow$ **1p**
cel puțin două elemente din domeniu au aceeași imagine $\Rightarrow$
f nu e injectivă, contradicție **1p**

Subiectul 3

$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ **1p**

$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ **2p**

$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2(4 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})$ **1p**

$B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}{2}} = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ **2p**

$$A^2 + B^2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \in N \subset Q$$ **1p**

Subiectul 4

Notăm $\left|z+\frac{1}{z}\right|=r$ => $r \geq 0$ și avem $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 = z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right)$ **1p**

$$\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3\right| = \left|z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right| \leq \left|z^3+\frac{1}{z^3}\right| + 3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right| \leq 2+3r$$ **3p**

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|^3 \leq 2+3r \quad => \ r^3 \leq 2+3r \ => \ r^3-3r-2 \leq 0$$ **1p**

$$r^3-3r-2=(r+1)^2(r-2)$$ **1p**

$r \epsilon [0,2]$, adică $r \leq 2$ => $\left|z+\frac{1}{z}\right| \leq 2$ **1p**