# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
# ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
# CLASA a V-a
# SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Enunţ subiect 1, autor *****

a) Aflați câte numere naturale de 3 cifre se împart exact la 31.

b) Cu câte zerouri se termină produsul acestor numere?

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| a) Cel mai mic număr este $124 = 31 \cdot 4$, iar cel mai mare $992 = 31 \cdot 32$, | 2p |
| în total 29 de numere de 3 cifre care se împart exact la 31. | 1p |
| b) Obținem 0 la finalul unui produs prin înmulțire cu $10 = 5 \cdot 2$ | 1p |
| Factorii de 5 apar de la numerele $31 \cdot 5, 31 \cdot 10, 31 \cdot 15, 31 \cdot 20, 31 \cdot 25$ și $31 \cdot 30$ | 1p |
| Dar $25 = 5 \cdot 5 \Rightarrow$ produsul se va termina în 7 zerouri. | 2p |

**Enunţ subiect 2, autor Manuela Popescu. G.M. 9/2022**

Un număr natural, scris în baza 10, are 3 cifre și, împărțit la răsturnatul său, dă câtul 2 și restul 100. Aflați produsul cifrelor numărului.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| $\overline{abc} = \overline{cba} \cdot 2 + 100$ număr par $\Rightarrow c$ cifră pară | 1p |
| Cum $\overline{cba} \cdot 2 + 100 < 1000 \Rightarrow \overline{cba} < 450 \Rightarrow c \leq 4$ | 1p |
| $Cazul\ I\ c = 4 \Rightarrow \overline{ab4} = \overline{4ba} \cdot 2 + 100 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow$<br>$u.c.(\overline{9b4}) = u.c.(\overline{4b9} \cdot 2 + 100) \Leftrightarrow 4 = 8$ Fals! | 2p |
| $Cazul\ II\ c = 2 \Rightarrow \overline{ab2} = \overline{2ba} \cdot 2 + 100 \Rightarrow u.c.(a \cdot 2) = 2 \Rightarrow a = 1$ sau $a = 6$<br>Cum $\overline{ab2} > 500 \Rightarrow a = 6$ | 2p |
| Din $\overline{6b2} = \overline{2b6} \cdot 2 + 100 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 692 \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 108$. | 1p |

**Enunţ subiect 3, autor Traian Preda**

Profesorul scrie pe tablă 25 de numere naturale consecutive. Andrei afirmă că suma numerelor pare scrise pe tablă este cu 2023 mai mare decât suma numerelor impare scrise pe tablă, iar Bogdan că suma numerelor impare este mai mare cu 2023 decât suma celor pare. Știind că una dintre cele două afirmații este adevărată, aflați numerele scrise pe tablă.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| Notăm numerele consecutive cu $a, a+1, a+2, .., a+24$ și cu $S_p, S_i$ sumele numerelor pare, respectiv impare, dintre cele 25 de numere scrise pe tablă. Numerele $a, a+2, \dots, a+24$ au aceeași paritate, iar $a+1, a+3, \dots, a+23$ cealaltă paritate. Diferența sumelor va fi întotdeauna $S_1 - S_2 = a + (a+2) - -(a+1) + (a+4) - (a+3) + \cdots + (a+24) - (a+23) = a+12$ | 2p |
| I. $a$ par $\Rightarrow$ avem 13 numere pare și 12 impare, iar $S_p > S_i \Rightarrow S_p - S_i = a+12$ Dacă afirmația lui Andrei ar fi corectă, atunci $a + 12 = 2023 \Rightarrow a = 2011$ Dar 2011 este impar, $a$ par, deci Andrei nu poate spune adevărul. | 2p |
| II. $a$ impar $\Rightarrow$ avem 13 numere impare și 12 pare, $S_i > S_p \Rightarrow S_i - S_p = a+12$ Atunci $a + 12 = 2023 \Rightarrow a = 2011$, număr impar, deci afirmația lui Bogdan este cea corectă, iar numerele de pe tablă sunt 2011,2012, 2013, … ,2035. | 3p |

**Enunţ subiect 4, autori Cristian Olteanu și Traian Preda**

a) Determinați ultima cifră a numărului $n = (6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2)^{2023}$.

b) Fie numărul $N = \underbrace{20232023 \ldots 2023}_{2024\ cifre}$. Scrieți numărul $N$ ca suma a 2024 pătrate perfecte distincte și nenule.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| a) $n = 2023^{2023}$ are ultima cifră 7 | 2p |
| b) $N = 2023 \cdot 10^{2020} + 2023 \cdot 10^{2016} + \cdots + 2023 \cdot 10^4 + 2023 =$ | 2p |
| $(6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2) \cdot 10^{2020} + (6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2) \cdot 10^{2016} + \cdots +$ $(6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2) \cdot 10^4 + (6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2) =$ | 1p |
| $(6 \cdot 10^{1010})^2 + (9 \cdot 10^{1010})^2 + (15 \cdot 10^{1010})^2 + (41 \cdot 10^{1010})^2 + (6 \cdot 10^{1008})^2 +$ $+(9 \cdot 10^{1008})^2 + (15 \cdot 10^{1008})^2 + (41 \cdot 10^{1008})^2 + \cdots + 6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2$ | 2p |