CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 -

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H2

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3\cdot e^x$.

3p **a)** Determinați numărul punctelor de inflexiune ale unei primitive oarecare a funcției *f.*

4p **b)** Determinați primitiva *G* a funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)+\sqrt{x}\cdot f'(x)$, cu proprietatea că $G(1)=e+1$.

Subiectul 2

Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

3p **a)** Arătați că $\int_0^1 f_1(x)\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot e^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$.

4p **b)** Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{2023\sqrt{2}}\le\int_0^1 f_{2022}(x)dx\le\frac{1}{2023}$.

Subiectul 3

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=1-2(x-1)(y-1)$.

3p **a)** Arătați că $x\circ\frac{1}{x}\le 1, \forall x\in(-\infty,0)$.

4p **b)** Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

Subiectul 4

Pe mulțimea $M=[4,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{(x^2-16)(y^2-16)+16}$.

3p **a)** Calculați $E=3^{\log_3 4}\circ 4^{\log_4 5}\circ\ldots\circ 2022^{\log_{2022}2023}\circ 2023^{\log_{2023}2024}$.

4p **b)** Determinați valorile reale ale lui *a* pentru care funcția $f:M\to[0;+\infty), f(x)=\sqrt{x^2+a}$ verifică relația $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$ pentru orice $x,y\in M$.