OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 18.02.2023
CLASA a IX-a – H1- TEHN

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

1. Să se rezolve ecuația $\left[\frac{2x+1}{5}\right] = |1-x|$

Barem

$|1-x| = n\,, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 1-n \text{ sau } x = 1+n$ ……………… 1p

Pentru $x = 1-n \Rightarrow n \leq \frac{3-2n}{5} < n+1 \Rightarrow 5n \leq 3-2n < 5n+5$

$-3 \leq -7n < 2 \Rightarrow -2 < 7n \leq 3$

$-\frac{2}{7} < n \leq \frac{3}{7} \Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = 1$……………………………… 3p

Pentru $x = 1+n \Rightarrow n \leq \frac{3+2n}{5} < n+1 \Rightarrow 5n \leq 3+2n < 5n+5$

$-3 \leq -3n < 2 \Rightarrow -2 < 3n \leq 3$

$$-\frac{2}{3} < n \leq 1 \Rightarrow n = 0 \text{ sau } n = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ sau } x = 2$$

$S = \{1, 2\}$…………………………………………………………………… 3p

2. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Barem

Pentru n=1$\Rightarrow 1-\frac{1}{4} = \frac{1+2}{2\cdot 2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ……………………………………………………..
1p

Presupunem $P(n) = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$ adevarată si demostrăm că

$P(n+1) = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{n+3}{2(n+2)}$ $adevărată$ ….
1p

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) =$$

$= \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{(n+1)(n+3)\cdot}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)}$……………………………
……………5p

3. a) Arătați că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică și în progresie geometrică,

   atunci a = b = c . (4p)
   b) Să se rezolve, în mulțimea numerelor naturale, ecuația
   $$x + (x + 1) + \cdots + (x + x) = 45 \quad (3p)$$

Barem

a) a, b, c sunt în progresie aritmetică și în progresie geometrică=> $b = \frac{a+c}{2}$ $și\ b = \sqrt{ac}$

   $=> \frac{a+c}{2} = \sqrt{ac}$ ……………………………………………………………………………………
   2p
   $(a + c)^2 = 4ac \ => (a - c)^2 = 0 \ => a = c$
   …………………………………………1p
   Din $a = c$ și $b = \frac{a+c}{2}$ $=> b = a = c$
   ……………………………………………………………………1p

b) $x \in \mathbb{N} => suma\ este\ a\ unei\ progresii\ aritmetice\ cu\ r = 1, a_1 = x, a_n = x + x\ și\ n = x + 1$….1p

$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} => \frac{3x(x+1)}{2} = 45 => x(x + 1) = 30 => x = 5$
………………………………2p

4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A, B(3,4)$și $C(-4,3)$, astfel încât BOCA este paralelogram. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

Barem
BOCA este paralelogram=> $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$ ………………………………………… 1p
$\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\overrightarrow{OC} = -4\vec{i} + 3\vec{j} => \overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 7\vec{j} => A(-1,7)$…………………….……. 2p
$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25, AC^2 = 25$ $și$ $BC^2 = 50$……………………….. 3p
triunghiul ABC este dreptunghic isoscel ……………………………………………1p