

CONCURSUL NAȚIONAL CDE MATEMATICĂ “ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ, 18.02.2023

CLASA a XII-a H1- TEHN

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$
 - a) Să demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y-2xy}$, unde $x, y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
 - b) Să se arate că $G = \left\{A_x \mid x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 2023x - 2023y + 2023 \cdot 2024$
 - a) Determinanți elementul neutru al legii,
 - b) Arătați că $x \circ x \geq 2023, (\forall) x \in \mathbb{R}$,
 - c) Calculați valoarea numărului real $b = (-3000) \circ (-2099) \circ \dots \circ 2099 \circ 3000$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ xe^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$
 - a) Arătați că f admite primitive pe \mathbb{R}
 - b) Calculați $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
 - c) Să se demonstreze că, dacă funcția $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ și se știe că $\int_2^3 f(x) dx = \int_3^4 f(x) dx$, atunci numerele $F(2), F(3), F(4)$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
4. Se consideră funcția $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
 - a) Să se arate că $\int_{-1}^1 f^2(x) dx = \frac{148}{3}$
 - b) Să se demonstreze egalitatea $\int_{-4}^4 \frac{x}{f(x)} dx = 0$
 - c) Demonstrați că $0 \leq \int_0^a f(x) dx \leq 15, a \in [0, 3]$.