BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a VIII a
Olimpiada de matematică - Etapa locală 18.02.2023

- *Nu se acorda puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

Problema 1. . Se consideră expresiile $E(x)= 4x^4 -3x^3 -1$ și $G(x)= x(2x-1)(1-x)(2x+1)$

a) Arătați că $E(x)+G(x)= (x-1)(x+1)^2$
b) Demonstrați că $E(n)+G(n) \vdots 16$, pentru orice n, număr întreg impar.
c) Fie $A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{\sqrt{2022\cdot 2023}}$
Calculați E(a), știind că $a=\frac{[A\cdot\sqrt{2023}]}{43}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Soluție:

a) $E(x)= 4x^4 -4x^3 +x^3 -1= 4x^3 (x-1)+ (x-1)(x^2 +x+1)= (x-1)(4x^3+x^2 +x+1)$ 1p
$E(x)+G(x)= (x-1)(4x^3+x^2 +x+1-4x^3 +x)= (x-1)(x+1)^2$ 1p
b) $E(n)+G(n)= (n-1)(n+1)^2$, $n=2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$ 1p
$E(2k+1)+G(2k+1)=2k(2k+2)^2 =8k(k+1)^2 \vdots 16$, deoarece $k(k+1) \vdots 2$, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$.......1p

c) $A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{2022}\cdot\sqrt{2023}} - \frac{\sqrt{2022}}{\sqrt{2022}\cdot\sqrt{2023}}$ 1p

$A=1-\frac{1}{\sqrt{2023}} \Rightarrow a = \frac{[A\cdot\sqrt{2023}]}{43} = \frac{[\sqrt{2023}-1]}{43} = \frac{43}{43}=1$...1p
$E(a)=E(1)=0$...1p

Problema 2. Fie numerele reale x și y, astfel încât $x^2 +2x+1=y^2 +4$.

a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care este îndeplinită egalitatea.
b) Aflați perechile de numere întregi (x,y) care verifică egalitatea dată.

Soluție:

a) Din relația dată obținem $(x+1)^2 =y^2 +4\geq 4$, $\forall\, y \in \mathbf{R}$..1p

$|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}| \geq 2$..1p
x∈(-∞;-3] ∪ [1; +∞) 1p

b) Scriind egalitatea sub forma $(x+1)^2$ $-y^2$ =4 și descompunând în (x+1-y)(x+1+y)..........1p
Obținem șase sisteme de tipul $\begin{cases} x-y+1=-4 \\ \\ x+y+1=-1 \end{cases}$, corespunzătoare perechilor de numere întregi care au produsul egal cu 4..1p
Se obțin două soluții : (x,y) ∈{(-3,0); (1,0)}...2p

Problema 3. Pe planul rombului ABCD , cu m $(\sphericalangle A)=60^{\circ}$ $și$ AB=2a (unde a>0), se construiesc perpendicularele MA și PB, în același semiplan față de AB, astfel încât AM=BD=BP .

a)Arătați că d(P,AC)+d(M, BD)< 5a;

b)Demonstrați că planele (MBD) și (MAC) sunt perpendiculare

Soluție:

a) În rombul ABCD cu m $(\sphericalangle A)=60^{\circ}$ $și$ AB=2a diagonala BD=AB=2a 1p
Cu T3perpendiculare se obține d(P,AC)=PO și d(M,BD)=MO, unde {O}=AC∩BD...1p
PO=a$\sqrt{5}$, MO= a$\sqrt{7}$..1p
PO+MO=a($\sqrt{5}+\sqrt{7}$), cu $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$ =12+2$\sqrt{35}$ <12+12=24<25............................1p
Rezultă concluzia că d(P,AC)+d(M, BD)< 5a 1p

b) Din MA⊥(ABC), BD⊂ (ABC) rezultă MA ⊥ BD, deci BD⊥MA
Cu T3⊥, MO⊥ BD, deci BD⊥ MO și cum MA și MB sunt concurente, rezultă BD⊥ (MAO) (criteriul de perpendicularitate)..1p
Dar (MAO)=(MAC) și BD inclus în (MBD), de unde obținem (MBD) ⊥(MAC)...........1p

Problema 4. Un paralelipiped dreptunghic are suma ariilor a câte două fețe alăturate de 32 m^2, $35m^2$, respectiv $27m^2$. Aflați lungimea diagonalei paralelipipedului.

(Gazeta matematică S:E 22.360)

Soluție:

Fie a,b,c dimensiunile paralelipipedului. Atunci putem scrie, conform ipotezei:
ab+bc=32, bc+ca=35, ca+ab=27..1p
Însumând relațiile se deduce $A_{totală}=94m^2$ 1p
Din primele două relații avem ac-ab=3 și cum ac+ab=27, rezultă ac=15, iar ab=12...............1p
Din a doua relație rezultă bc=35-15=20 și, făcând raportul dintre ac și bc vom afla că 4a=3b...1p
Obținem din ab=12 că a=3, b=4, apoi va rezulta c=5...1p
Folosind formula de calcul prescurtat $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ și ținând cont de Valorile obținute anterior, aflăm că $d^2=144-94$, de unde $d=5\sqrt{2}$ m...2p