CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 –

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H2

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

7p Dacă $S_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$, determinați valoarea numărului natural n astfel încât $\log_2\left(1 - \frac{S_n}{2}\right) = 14 \cdot (1 - \log_2 3)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
S_n reprezintă suma a n numere aflate în progresie geometrică cu primul termen $\frac{2}{3}$ și rația $\frac{2}{3}$, de unde $S_n = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$	**3p**
Din $\log_2\left(1 - \frac{S_n}{2}\right) = 14 \cdot (1 - \log_2 3)$ se obține $\log_2\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = 14 \cdot (1 - \log_2 3)$	**1p**
$n \log_2\left(\frac{2}{3}\right) = 14 \cdot (1 - \log_2 3) \Rightarrow n(1 - \log_2 3) = 14 \cdot (1 - \log_2 3)$	**2p**
$n = 14$	**1p**

Enunț subiect 2:

Se dau numerele $a = \sqrt{45 + \sqrt{2023}}$ și $b = \sqrt{45 - \sqrt{2023}}$.

3p **a)** Arătați că $(a+b)^2 < 93$.

4p **b)** Arătați că $\frac{a^4 - b^4}{\sqrt{7}}$ este un număr natural divizibil cu 17.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $(a+b)^2 = 45 + \sqrt{2023} + 2\sqrt{(45 + \sqrt{2023})(45 - \sqrt{2023})} + 45 - \sqrt{2023} = 90 + 2\sqrt{2025 - 2023} = 90 + 2\sqrt{2}$	**2p**
Întrucât $2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow 90 + 2\sqrt{2} < 93 \Rightarrow (a+b)^2 < 93$	**1p**
b) $a^2 + b^2 = 45 + \sqrt{2023} + 45 - \sqrt{2023} = 90$	**1p**
$a^2 - b^2 = 45 + \sqrt{2023} - 45 + \sqrt{2023} = 2\sqrt{2023}$	**1p**
$\frac{a^4 - b^4}{\sqrt{7}} = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{\sqrt{7}} = \frac{90 \cdot 2 \cdot 17\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 90 \cdot 2 \cdot 17$ număr natural divizibil cu 17	**2p**

Enunț subiect 3:

Se consideră tabelul alăturat:

$\log_2 1$	$\log_2 2$	$\log_2 3$	......	$\log_2 2700$
$\log_4 1$	$\log_4 2$	$\log_4 3$	......	$\log_4 2700$
$\log_8 1$	$\log_8 2$	$\log_8 3$	......	$\log_8 2700$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\log_{2048} 1$	$\log_{2048} 2$	$\log_{2048} 3$	......	$\log_{2048} 2700$

3p **a)** Arătați că $10 < \log_2 2023 < 11$.

4p **b)** Calculați raportul dintre numărul tuturor elementelor tabelului și suma numerelor naturale din tabel .

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $10 = \log_2 1024$ și $11 = \log_2 2048$	**1p**
Deoarece $1024 < 2023 < 2048$ și funcția $f(x) = \log_2 x$ este strict crescătoare $\Rightarrow$ $10 < \log_2 2023 < 11$	**2p**
b) Tabelul are 11 linii și 2700 coloane, deci $11 \cdot 2700$ elemente	**1p**
$2048 = 2^{11} \Rightarrow$ pe prima linie sunt numerele naturale $\log_2 1 = 0, \log_2 2 = 1, ..., \log_2 2048 = 11$ Pe a doua linie sunt numerele naturale $\log_4 1 = 0, \log_4 4 = 1, ..., \log_4 1024 = 5$ Pe a treia linie sunt numerele naturale $\log_8 1 = 0,\ \log_8 8 = 1,\ \log_8 64 = 2,\ \log_8 512 = 3$ Pe a patra linie, numerele naturale sunt $\log_{16} 1 = 0, \log_{16} 16 = 1, \log_{16} 256 = 2$ Celelalte nr. naturale nenule sunt: $\log_{32} 32 = 1, \log_{32} 1024 = 2, \log_{64} 64 = 1,$ $\log_{128} 128 = 1, \log_{256} 256 = 1,\ \log_{512} 512 = 1, \log_{1024} 1024 = 1, \log_{2048} 2048 = 1$ În total, $(1+2+...+11)+(1+2+...+5)+(1+2+3)+1+2+1+2+6 = ... =$ $= 66+15+18 = 99$	**2p**
Raportul este $\dfrac{11 \cdot 2700}{99} = 300$	**1p**

Enunț subiect 4:

3p **a)** Arătați că produsul numerelor $z \in \mathbb{C}$, pentru care $z - \overline{z} = i$ și $\lvert z \rvert = 1$, este număr întreg.

4p **b)** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $\lvert z \rvert \le \dfrac{1}{3}$. Demonstrați că $\lvert (3+4i) \cdot z^2 + (5+12i) \cdot z \rvert < 5$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ și $\overline{z} = a - bi$ $z - \overline{z} = 2bi = i \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$	**1p**
$\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{4}} = 1$, de unde $a^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow a = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**1p**
Obținem $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i$ și $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i$, iar $z_1 \cdot z_2 = -1$ număr întreg	**1p**

b) $\left\|(3+4i)z^2+(5+12i)z\right\| \le \left\|(3+4i)z^2\right\|+\left\|(5+12i)z\right\|=$	**1p**
$=\|3+4i\|\left\|z^2\right\|+\|5+12i\|\|z\|=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\|z\|^2+\sqrt{5^2+12^2}\cdot\|z\|=$	**2p**
$=5\|z\|^2+13\|z\|\le 5\cdot\frac{1}{9}+13\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}+\frac{13}{3}=\frac{44}{9}<\frac{45}{9}=5$	**1p**