CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală-Barem

Clasa a IX-a - H2- STIINTELE NATURII

Subiectul 1.

a) Arătați că media aritmetică a două numere reale pozitive este întotdeauna mai mare sau egală cu media lor geometrică;

$m_a \geq m_g \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{a \cdot b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow$ $a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0,$ adevărat oricare ar fi a și b numere reale pozitive..2p

b) Arătați că $\left(a+\frac{b}{ac}\right)\left(b+\frac{c}{ab}\right)\left(c+\frac{a}{bc}\right) \geq 8$, pentru orice a,b,c $\in \mathbb{R}_+^*$.

Folosind punctul a) avem că $\frac{a+\frac{b}{ac}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{b}{ac}} \Rightarrow a+\frac{b}{ac} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}$ (1)

$\frac{b+\frac{c}{ab}}{2} \geq \sqrt{b \cdot \frac{c}{ab}} \Rightarrow b+\frac{c}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}$ (2)

$\frac{c+\frac{a}{bc}}{2} \geq \sqrt{c \cdot \frac{a}{bc}} \Rightarrow c+\frac{a}{bc} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ (3)............3p

Din (1), (2) și (3) rezultă că

$\left(a+\frac{b}{ac}\right)\left(b+\frac{c}{ab}\right)\left(c+\frac{a}{bc}\right) \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}} = 8\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 8$...........2p

Subiectul 2.

a) Dacă numerele $x=\frac{1}{b-a}, y=\frac{1}{2b}, z=\frac{1}{b-c}$, unde $a \neq b \neq c, a, b, c \in \mathbb{R}^*$ sunt în progresie aritmetică, arătați că a, b, c sunt în progresie geometrică;

Numerele x, y, z sunt în progresie aritmetică dacă $y=\frac{x+z}{2} \Rightarrow \frac{1}{2b}=\frac{\frac{1}{b-a}-\frac{1}{b-c}}{2} \Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{b-c+b-a}{(b-a)(b-c)} \Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{2b-c-a}{b^2-bc-ab+ac} \Rightarrow b^2-bc-ab+ac=$ $2b^2-ab-bc \Rightarrow b^2=ac \Rightarrow b=\sqrt{ac} \Rightarrow a, b, c$ sunt în progresie geometrică 3p

b) Fie șirul $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică. Calculați suma:

$$S = \frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2} a_n}.$$

Fie r = rația progresiei.

$\frac{1}{a_{n-2}a_n} = \frac{1}{a_{n-2}} \cdot \frac{1}{a_{n-2}+2r} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_{n-2}+2r}\right)$ 2p

$S = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_7} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) =$

$\frac{1}{2r}\left(\frac{a_n - a_1}{a_1 a_n}\right) = \frac{n-1}{2a_1 a_n}$...2p

Subiectul 3.

a) Arătați că numărul $n = \sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}$ este natural;

$$n = \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| + \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}} + \left|3+\sqrt{2}\right| =$$

$= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + 3 + \sqrt{2} = 3 + 2 = 5 \in \mathbb{N}$..................................2p

b) Rezolvați ecuația: $\sqrt{a^2} + \sqrt{(5-a)^2} - 3\sqrt{a^2-6a+9}$=-7, unde $a \in (-\infty, 0)$.

$|a| - |5-a| - 3\sqrt{(a-3)^2} = -7 \Leftrightarrow |a| - |5-a| - 3|a-3| = -7$.........2p

Cum a<0 avem $|a| = -a$;

$-a$>0 avem $5 - a > 0 \Longrightarrow |5-a| = 5-a$

$a < 0 \Longrightarrow a - 3 < 0 \Longrightarrow |a-3| = 3-a$

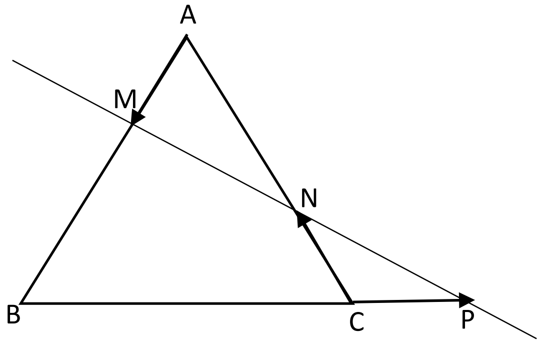
c) $-a + 5 - a - 3(3-a) = -7 \Longrightarrow -a + 5 - a - 9 + 3a = -7 \Longrightarrow a - 4 = -7 \Longrightarrow a = -7 - 4 \Longrightarrow a = -3 \in (-\infty, 0)$..3p

Subiectul 4.

a) Se dă triunghiul ABC și punctele M,N și P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Aflați x și y astfel încât $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, deci $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.........3p

b) Arătați că punctele M,N,P sunt coliniare.



$$\left.\begin{array}{l} \frac{MA}{MB} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{2}{3}AB} = \frac{1}{2} \\ \frac{BP}{CP} = \frac{\frac{4}{3}BC}{\frac{1}{3}BC} = 4 \\ \frac{NC}{NA} = \frac{\frac{1}{3}AC}{\frac{2}{3}AC} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{MA}{MB}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{NC}{NA} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 1 \xRightarrow{RT Menelaus} M, N, P \text{ coliniare..........4p}$$