CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 -

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H1

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB = A$ și $BA = B$.

4p **a)** Arătați că $\det(A) = \det(B) \in \{0,\ 1\}$.

3p **b)** Arătați că $A^n = A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Subiectul 2

Se consideră determinanții $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b-a & c-a & a-2c \\ b-a & c-a & b-2c \\ a-c & b-c & -a \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a-c & b-c & 2a \\ b-a & c-a & a+2b \\ a-c & b-c & 2a+c \end{vmatrix}$, iar $\Delta = (a+b)\Delta_1 + c\Delta_2$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3p **a)** Arătați că Δ este număr întreg divizibil cu $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

4p **b)** Dacă a, b, c, sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci arătați că $\Delta = 0$ dacă și numai dacă triunghiul este echilateral sau dreptunghic.

Subiectul 3

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 2\sqrt{x^2+2} + 3\sqrt{x^2+3} + \ldots + n\sqrt{x^2+n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

3p **a)** Determinați numărul $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{f(x)} = e^{5050}$.

4p **b)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - \dfrac{n(n+1)}{2}x\right) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(a^2+1)x^3 + bx^2 + 1}, & x < 0 \\ \left(\dfrac{\sqrt{3}\sin x + \cos x}{2\sqrt{a^2+1}}\right)^{2x}, & x \geq 0 \end{cases}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

3p **a)** Determinați numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției f admite, spre $-\infty$, asimptota de ecuație $y = x + 1$.

4p **b)** Arătați că, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, graficul funcției f admite, spre $+\infty$, asimptota orizontală de ecuație $y = 0$.