CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023 –

CLASA a IX-a
SECȚIUNEA H1

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

3p **a)** Arătați că numărul 2023 se poate scrie ca sumă de trei numere iraționale distincte.

4p **b)** Arătați că orice număr real se poate scrie ca sumă de 2023 de numere iraţionale distincte.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Găsirea unei descompuneri, ca de exemplu $2023=\left(2000-\sqrt{8}\right)+\left(23+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, cu	**2p**
$2000-\sqrt{8},\ 23+\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$ iraționale	**1p**
b) Dacă x este un număr rațional, se poate scrie, de exemplu: $x=\left(x-1-\sqrt{8}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}+a_1+\left(-a_1\right)+a_2+\left(-a_2\right)+...+a_{1010}+\left(-a_{1010}\right)$, unde a_1, ..., a_{1010} sunt numere iraționale distincte și diferite de $x-1-\sqrt{8},\ 1+\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$	**2p**
Dacă x este irațional, se poate scrie, de exemplu: $x=\frac{x-1011}{2023}+\frac{x-1010}{2023}+...+\frac{x-1}{2023}+\frac{x}{2023}+\frac{x+1}{2023}+...+\frac{x+1010}{2023}+\frac{x+1011}{2023}$	**2p**

Enunț subiect 2:

7p Arătați că $\left|x-1\right|+\left|x-2\right|+...+\left|x-2023\right|>\left[\frac{2023}{2}\right]^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\left\|x-a\right\|+\left\|x-b\right\|=\left\|x-a\right\|+\left\|b-x\right\|\geq\left\|x-a+b-x\right\|=\left\|b-a\right\|$, pentru orice x, a, $b\in\mathbb{R}$	**1p**
$\left\|x-1\right\|+\left\|x-2\right\|+...+\left\|x-2023\right\|=\left(\left\|x-1\right\|+\left\|x-2023\right\|\right)+\left(\left\|x-2\right\|+\left\|x-2022\right\|\right)+...+$ $+\left(\left\|x-1011\right\|+\left\|x-1013\right\|\right)+\left\|x-1012\right\|\geq$	**2p**
$\geq\left(2023-1\right)+\left(2022-2\right)+...+\left(1013-1011\right)+\left\|x-1012\right\|\geq2+4+...+2022=1011\cdot1012\geq$	**2p**
$\geq1011^2=\left[\frac{2023}{2}\right]^2$	**2p**

Enunț subiect 3:

Se consideră $(a_n)_{n\geq 1}$ șirul cu proprietatea $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2n^2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

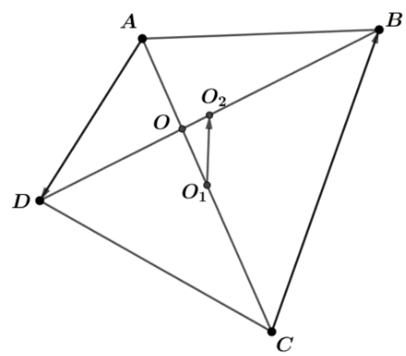
3p **a)** Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

4p **b)** Determinați cel mai mic număr natural k pentru care are loc inegalitatea $a_3 + a_5 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} > 57975(k+1)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $a_1 = 2 = 4\cdot 1 - 2$, $a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 4n - 2$, pentru orice $n \geq 2$, deci $a_n = 4n - 2$, pentru orice $n \geq 1$	**2p**
$a_{n+1} - a_n = 4$, pentru orice $n \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ progresie aritmetică, cu rația 4	**1p**
b) $\underbrace{a_3 + a_5 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3}}_{k+1 \text{ termeni}} = \frac{(a_3 + a_{2k+3})(k+1)}{2} = \frac{(10 + 8k + 10)(k+1)}{2} = (4k+10)(k+1)$	**2p**
$(4k+10)(k+1) > 57975(k+1) \overset{k\geq 1}{\Leftrightarrow} 4k + 10 > 57975 \Leftrightarrow 4k > 57965 \overset{4k\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 4k \geq 57968 \Leftrightarrow k \geq 14492$ Cel mai mic k este egal cu 14492.	**2p**

Enunț subiect 4:

7p În patrulaterul $ABCD$, O_1 este mijlocul diagonalei AC și O_2 este mijlocul diagonalei BD. Arătați că $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{O_1O_2}$.



Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Considerăm $ABCD$ paralelogram și demonstrăm că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{O_1O_2}$: Dacă $AC \cap BD = \{O\}$ și $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$	**1p**
În acest caz, $O_1 = O_2 = O \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ și $3\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{O_1O_2}$.	**2p**
Reciproc, considerăm că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{O_1O_2}$ și demonstrăm că $ABCD$ este paralelogram: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\left(\overrightarrow{OO_2} - \overrightarrow{OO_1}\right) = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$	**2p**
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram	**2p**