INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a XII-a
Olimpiada de matematică - Etapa locală 18.02.2023

- *Nu se acorda puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

1. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - a(x+y) + a(a+1), unde\ a \in \mathbb{Z}$.

   a)Arătați că $H = (a-1, a+1)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$ ” (4p)

   b)Demonstrați că (H, $*$) nu poate forma o structură de grup. (3p)

a) $x, y \in \text{H}. => \begin{cases} a-1 < x < a+1 \\ a-1 < y < a+1 \end{cases}$ 1p

$<=> \begin{cases} |x-a| < 1 \\ |y-a| < 1 \end{cases} => \ |x-a| \cdot |y-a| < 1$ 2p

$=> x * y \in H$ 1p

b) Proprietățile grupului 1p

$e = a + 1 \notin H$ 2p

2. Fie $\text{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\text{x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \text{x} \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătați că $(\text{G}, \ \cdot)$ este grup abelian și că grupurile $(\text{G}, \ \cdot)$ și $(\mathbb{Z}, +)$ sunt izomorfe

Fie $M(x), M(y) \in G, M(x) \cdot \ M(y) = M(x+y+1)$ 2p

Asociativitatea și comutativitatea 1p

Elementul neutru $M(-1)$ 1p

Simetricul lui $M(x)$ este $M(-2-x)$ 1p

$f: \mathbb{Z} \to G, \ \ f(x) = M(x)$ ete izomorfismul căutat. 2p

3.Calculați limita șirului $(a_n)_{\ n \geq 1}$ definit prin $a_n = \int_n^{2n} \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}\, dx, \ n \geq 1$.

Avem că $n \leq x \leq 2n, (\forall)\ n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow e^{\frac{1}{2n}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{n}}, (\forall) x \in [n, 2n]$ 2p

Înmulțind relația cu $\frac{1}{x}$ și integrând pe intervalul $[n, 2n]$, obținem:

$\int_n^{2n} \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{2n}}\, dx \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}\, dx \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{n}}\, dx \Rightarrow \ e^{\frac{1}{2n}} \cdot lnx \,|_n^{2n} \leq a_n \leq e^{\frac{1}{n}} \cdot lnx \,|_n^{2n} \Rightarrow$ 3p

$\Rightarrow \sqrt[2n]{e} \cdot ln2 \leq a_n \leq \sqrt[n]{e} \cdot ln2$. Folosind criteriul cleștelui se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ln2$ ……..2p

4. Fie $\in \mathbb{R}, a > 1$. Calculați $\int \frac{x+1-xlnxln(\log_a x)}{x(x+1)^2 lnx} dx$, $x \in (1, \infty)$

$\int \left[\frac{x+1}{x(x+1)^2 lnx} - \frac{xlnxln(\log_a x)}{x(x+1)^2 lnx}\right] dx$ = $\int \frac{1}{x(x+1)lnx} dx - \int \frac{ln(\log_a x)}{(x+1)^2} dx =$ …………………………………1p

$= \int \frac{1}{x+1} \cdot (\ln(lnx))' dx - \int \frac{\ln(lnx)-\ln(lna)}{(x+1)^2} dx = \frac{\ln(lnx)}{x+1} - \int \left(\frac{1}{x+1}\right)' \cdot \ln(lnx)\, dx - - \int \frac{\ln(lnx)}{(x+1)^2} dx +$
$\int \frac{\ln(lna)}{(x+1)^2} dx$ = ………3p
=$\frac{\ln(lnx)}{x+1} + \int \frac{\ln(lnx)}{(x+1)^2} dx - \int \cancel{\frac{\ln(lna)}{(x+1)^2}} dx - \cancel{\frac{\ln(lna)}{x+1}} + C = \frac{\ln(\log_a x)}{x+1} + C$……………………………………3p