OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023

CLASA a 12 -a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

SUBIECTE

Problema 1

Determinaţi funcţiile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care au simultan proprietăţile:
a) f este bijectivă, derivabilă, cu $f'(x)\neq 0$, pentru orice $x\in(0,\infty)$;
b) f admite o primitivă F cu proprietatea că $F\circ f^{-1}$ este o primitivă a funcţei f^{-1}.

Problema 2

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea asociativă $x\circ y=xy-3x-3y+12$. Determinaţi numerele reale a şi b pentru care mulţimea $G=\{x\in\mathbb{R}|x^2+ax+b=0\}\subset[2,4]$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea dată, iar $(G,\circ)$ este grup.

Problema 3

Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\cdot tgx\cdot(1-\cos x)}\cdot\displaystyle\int_0^{x^4}\frac{\sin t}{t\cdot\cos t^2}\,dt$.

Problema 4

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit pentru care există un automorfism al său $f:G\to G$ având proprietăţile: $f(x)\neq x,\forall x\in G\setminus\{e\}$ şi $(f\circ f)(x)=x,\forall x\in G$.
a) Arătaţi că funcţia $\sigma:G\to G$, $\sigma(x)=x^{-1}\cdot f(x)$ este bijectivă;
b) Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian.