OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023
Soluţii

Clasa a V-a

1. *În lumea poveştilor, numerele naturale se transformă în figuri geometrice respectând următoarele reguli:*

   (1) Numărul 0 se transformă în triunghi, numărul 1 se transformă în pătrat iar numărul 2 se transformă în cerc.

   (2) x şi $x+3$ se transformă în aceeaşi figură geometrică, pentru oricare număr natural x.

   Arătaţi că:

   (a) Orice număr natural se transformă în triunghi, pătrat sau cerc.

   (b) Suma a oricăror trei numere naturale care se transformă în figuri diferite este un număr care se împarte exact la trei.

   (c) Numărul 2023 nu se transformă în cerc.

Marinela Platon

Soluţie.

(a) Din ipoteză, rezultă că orice număr natural de forma $3k$ se transformă în triunghi, orice număr natural de forma $3k+1$ se transformă în pătrat şi orice număr natural de forma $3k+2$ se transformă în cerc. Cum orice număr natural este de una din formele de mai sus, rezultă că orice număr natural se transformă în triunghi, pătrat sau cerc. ....**3 puncte**

(b) Considerăm trei numere naturale x, y şi z care se transformă în triunghi, pătrat şi respectiv cerc. Atunci există numerele naturale a, b şi c astfel încât $x = 3a$, $y = 3b+1$ şi $z = 3c+2$. Atunci

$$x+y+z = (3a)+(3b+1)+(3c+2) = 3(a+b+c+1),$$

deci suma celor trei numere naturale se împarte exact la 3 .... **3 puncte**

(c) Avem $2023 = 3\cdot 674+1$. Atunci numărul 2023 se transformâ în pătrat, deci nu se transformă în cerc .... **1 punct**

2. *În Regatul Dragonilor există dragoni roşii şi dragoni verzi. Fiecare dragon roşu are 6 capete, 8 picioare şi 2 cozi. Fiecare dragon verde are 8 capete, 6 picioare şi 4 cozi. În total, dragonii au 44 de cozi. Se mai cunoaşte că picioarele verzi sunt cu 6 mai puţine decât capetele roşii. Aflaţi numărul dragonilor roşii din regat.*

Adriana Caţaron

Soluţie.
Notăm cu x numărul dragonilor roşii şi cu y numărul dragonilor verzi.........**1 punct**
Dragonii roşii au în total $6x$ capete, $8x$ picioare şi $2x$ cozi, iar dragonii verzi au în total $8y$ capete, $6y$ picioare şi $4y$ cozi. ....**1 punct**
Atunci $2x + 4y = 44$ şi $6y = 6x - 6$ .... **2 puncte**
Obţinem $x + 2y = 22$ şi $y = x - 1$.. **1 punct**
Găsim $x = 8$. Deci există 8 dragoni roşii .... **2 puncte**

3. *Într-o urnă sunt 5 bile roşii, 10 albastre, 7 verzi şi 12 galbene. Care este numărul minim de bile pe care trebuie să le extragem din urnă pentru a fi siguri că există două culori distincte astfel încât, printre bilele extrase, să găsim cel puţin câte două bile de fiecare din cele două culori?*

Andrei Caţaron

Soluţie.
Cerinţa nu este îndeplinită dacă extragem (cel mult) numărul total de bile dintr-o anumită culoare şi încă 3 bile..**3p**
Cum numărul maxim de bile de aceeaşi culoare este 12, cerinţa nu este indeplinită dacă extragem (cel mult) $12 + 3 = 15$ bile......................................**2p**
Conform principiului cutiei, cerinţa este îndeplinită dacă extragem cel puţin 16 bile. Deci numărul minim de bile impus de cerinţa problemei este 16..................**2p**

4. (a) *Arătaţi că numărul* 2022 *se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.*
   (b) *Arătaţi că numărul* 2022^{2023} *se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.*

Gazeta Matematică (enunţ modificat)

Soluţie.
(a) De exemplu, $2022 = 2^2 + 13^2 + 43^2$...................................... **3 puncte**
(b) $2022^{2023} = 2022^{2022} \cdot 2022 = 2022^{2022}\left(2^2 + 13^2 + 43^2\right)$..................... **2 puncte**
$2022^{2023} = \left(2022^{1011} \cdot 2\right)^2 + \left(2022^{1011} \cdot 13\right)^2 + \left(2022^{1011} \cdot 43\right)^2$ .... **2 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023
Soluţii

Clasa a VI-a

1. *Alexandra a cumpărat un atlas geografic pe care a plătit mai mult de 150 de lei şi mai puţin de 200 lei, dar nu îşi mai aduce aminte exact preţul. L-a achitat folosind bancnote de 5 şi de 10 lei. Alexandra a reţinut doar că raportul dintre numărul bancnotelor de 5 lei şi numărul bancnotelor de 10 lei folosite a fost de* $\frac{2}{3}$.

   O puteţi ajuta pe Alexandra să îşi amintească preţul atlasului şi cu câte bancnote de 5 lei şi respectiv de 10 lei a plătit cartea?

   Ioana Maşca

   Soluţie.
   Notăm cu x numărul bancnotelor de 5 lei folosite şi cu y numărul bancnotelor de 10 lei folosite. Atunci preţul albumului este $5x+10y$ .... **1 punct**
   Avem $150 < 5x+10y < 200$, deci $30 < x+2y < 40$ .... **1 punct**
   Deoarece $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, avem $2y = 3x$, iar x este un număr par .... **2 puncte**
   Rezultă $30 < 4x < 40$, deci $7,5 < x < 10$. .... **1 punct**
   Cum x este un număr par, obţinem $x = 8$ .... **1 punct**
   Prin urmare, Alexandra a folosit 8 bancnote de 5 lei, 12 bancnote de 10 lei pentru a cumpăra albumul de $8 \cdot 5$ lei$+12 \cdot 10$ lei $= 160$ lei .... **1 punct**

2. *Fie* $n > 4$ *un număr natural compus. Arătaţi că numărul* $N = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$ *se divide cu* n.

   Andrei Caţaron

   Soluţie.
   Există $a, b \in \{2, 3, ..., n-1\}$ astfel încât $n = ab$ .... **1 punct**
   Dacă $a \neq b$ atunci numerele naturale a şi b sunt doi factori distincţi ai produsului $2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$. Rezultă că N este divizibil cu $n = ab$ .... **3 puncte**
   Dacă $a = b$, atunci $n = a^2$. Cum $n > 4$, avem $a > 2$, deci $n > 2a$. Atunci numerele naturale a şi $2a$ sunt doi factori distincţi ai produsului $2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$. Rezultă că N este divizibil cu $n = a^2$ .... **3 puncte**

3. *Fie unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$, $(OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, $(ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{MOB}$, iar $(OP$ bisectoarea unghiului $\widehat{AON}$. Ştiind că $OP \perp OC$ şi $7\widehat{BOC} = 10\widehat{MOP}$, determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{AOC}$.*

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii

Soluţie.
Fie $8x$ măsura în grade a unghiului $\widehat{AOB}$ şi y măsura în grade a unghiului $\widehat{BOC}$.
$(OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM} = 4x$ .... **1 punct**
$(ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOM} \Rightarrow \widehat{BON} = \widehat{MON} = 2x$ .... **1 punct**
$\widehat{AON} = \widehat{AOM} + \widehat{MON} = 6x$;
$(OP$ bisectoarea unghiului $\widehat{AON} \Rightarrow \widehat{AOP} = \widehat{PON} = 3x$ .... **1 punct**
$\widehat{BOP} = \widehat{PON} + \widehat{BON} = 5x$ şi $\widehat{MOP} = \widehat{PON} - \widehat{MON} = x$ .... **1 punct**
$OP \perp OC \Rightarrow 5x + y = 90$ şi $7\widehat{BOC} = 10\widehat{MOP} \Rightarrow 7y = 10x$ .... **1 punct**
Atunci $180 = 10x + 2y = 9y$, de unde $y = 20$. Rezultă $10x = 140$, deci $x = 14$. Deducem $\widehat{BOC} = 20^\circ$ şi $\widehat{AOC} = 8 \cdot 14^\circ + 20^\circ = 132^\circ$ .... **2 puncte**

4. *Fie un număr natural $n \geq 3$. Pe un cerc se consideră punctele distincte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, astfel încât arcele $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\ldots$, $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$, $\overset{\frown}{A_nA_1}$ sunt congruente şi $A_1 \in \overset{\frown}{A_nA_2}$, $A_2 \in \overset{\frown}{A_1A_3}, \ldots, A_n \in \overset{\frown}{A_{n-1}A_1}$. Demonstraţi că printre punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ există două puncte diametral opuse, dacă şi numai dacă numărul natural n este par.*

Lucica Ghişe

Soluţie.
$\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \overset{\frown}{A_3A_4} = \ldots = \overset{\frown}{A_{n-1}A_n} = \overset{\frown}{A_nA_1} = \dfrac{360^\circ}{n}$ .... **1 punct**
I. Presupunem că n este un număr par. Atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 2k$. Avem $\overset{\frown}{A_1A_{k+1}} = \overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + \ldots + \overset{\frown}{A_{k-1}A_k} + \overset{\frown}{A_kA_{k+1}} = k \cdot \dfrac{360^\circ}{2k} = 180^\circ$. Rezultă că punctele A_1 şi A_{k+1} sunt diametral opuse .... **3 puncte**
II. Presupunem că există $p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p < q$, astfel încât punctele A_p şi A_q sunt diametral opuse. Atunci $180^\circ = \overset{\frown}{A_pA_q} = (q - p) \cdot \dfrac{360^\circ}{n}$. Rezultă $n = 2(q - p)$, deci n este un număr natural par .... **3 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023
Soluţii

Clasa a VII-a

1. *Numerele reale pozitive $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ verifică relaţia $a_1 + 2a_2 + \dots + 2023a_{2023} = 1$. Arătaţi că*
$$4\sqrt{a_1+1} + 4\sqrt{2(a_2+1)} + \dots + 4\sqrt{2023(a_{2023}+1)} \le 2024 \cdot 2025.$$

Lucica Ghişe

Soluţie.
Din inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt{a} \le \dfrac{a+1}{2},\ a > 0$ ... **1 punct**
Atunci
$4\sqrt{a_1+1} + 4\sqrt{2(a_2+1)} + \dots + 4\sqrt{2023(a_{2023}+1)}$
$\le 2(a_1+1+1) + 2(2a_2+2+1) + \dots + 2(2023a_{2023}+2023+1)$ ... **2 puncte**
$= 2(a_1 + 2a_2 + \dots + 2023a_{2023}) + 2023 \cdot 2024 + 2 \cdot 2023$ ... **2 puncte**
$= 2 \cdot 1 + 2023 \cdot 2024 + 2 \cdot 2023 = 2024 \cdot 2025$ ... **2 puncte**

2. *Fie $ABCD$ un patrulater convex cu proprietatea că, pentru orice latură a sa, segmentele care unesc extremităţile laturii cu mijlocul laturii opuse sunt congruente. Demonstraţi că $ABCD$ este dreptunghi.*

Ioana Maşca

Soluţie.
Fie M, N, P şi Q mijloacele laturilor AB, BC, CD şi respectiv DA.
$AP \equiv BP$ şi $MA \equiv MB$ implică $MP \perp AB$
$CM \equiv DM$ şi $PC \equiv PD$ implică $MP \perp CD$
Rezultă $AB \parallel CD$ ... **3 puncte**
Analog arătăm $BC \parallel AD$. Atunci $ABCD$ paralelogram. ... **1 punct**
$AP \equiv BP$, $AD \equiv BC$ şi $PD \equiv PC$ implică $\triangle ADP \equiv \triangle BCP$ (LLL) ... **1 punct**
Rezultă $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$. Dar $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 180°$. Atunci $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 90°$. Deducem că $ABCD$ este dreptunghi ... **2 puncte**

3. *Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\hat{A} > 90°$ şi $\hat{B} > 90°$. Demonstraţi $AB < CD$.*

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii (enunţ modificat)

Soluţie.
Considerăm semidreapta $(AX \perp AB$, unde X este un punct situat de aceeaşi parte cu vârfurile C şi D faţă de dreapta AB. În $\triangle ABC$, $\widehat{ABC} > 90°$. Rezultă $\widehat{BAC} < 90°$. Din $\widehat{BAC} < 90° = \widehat{BAX} < \widehat{BAD}$ rezultă că semidreapta $(AX$ este situată în interiorul unghiului $\widehat{CAD}$. Atunci semidreapta $(AX$ intersectează segmentul deschis (CD) într-un punct A'.. **2 puncte**
Analog, semidreapta $(BY \perp AB$, unde punctul Y este situat de aceeaşi parte cu vârfurile C şi D faţă de dreapta AB, intersectează segmentul deschis (CD) într-un punct B'..**2 puncte**
Deducem $A'B' < CD$..**1 punct**
Dacă $AB \parallel CD$, atunci $AA'B'B$ este dreptunghi, deci $AB = A'B' < CD$..........**1 punct**
Dacă $AB \nparallel CD$, construim $A'P \perp BB'$, $P \in BB'$. Atunci $AA'PB$ este dreptunghi. Rezultă $AB = A'P < A'B' < CD$...**1 punct**

4. *La o masă rotundă stau aşezate $n \geq 3$ persoane astfel încât vârsta fiecăreia este media aritmetică a vârstelor persoanelor alăturate. Arătaţi că suma vârstelor tuturor persoanelor este divizibilă cu n.*

Andrei Caţaron

Soluţie.
Presupunem că cea mai mare dintre vârstele persoanelor este v. Dacă o persoană are vârsta v, atunci v este media aritmetică a vârstelor v_1 şi v_2 ale vecinilor persoanei respective..**2 puncte**
Din relaţiile $v_1 \leq v$, $v_2 \leq v$ şi $v_1 + v_2 = 2v$ rezultă $v_1 = v_2 = v$....................**2 puncte**
Presupunem, prin absurd, că există persoane cu vârsta mai mică decât v. Atunci există o astfel de persoană care stă alături de o persoană cu vârsta v. Dar conform raţionamentului anterior, acestă situaţie nu este posibilă. Deci toate persoanele au vârsta v ...**2 puncte**
Suma vârstelor persoanelor este $n \cdot v$, de unde obţinem concluzia............... **1 punct**

Notă. Pentru demonstrarea cazului $n = 3$ se acordă **3 puncte**.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februiarie 2023
Soluţii

Clasa a VIII-a

1. *Fie numărul* $A = (9a^2 + 9a + 2)(9a^2 + 9a - 22) + 144$, *unde* $a \in \mathbb{N}^*$.

   (a) *Arătaţi că A este pătrat perfect pentru orice număr a natural, nenul.*

   (b) *Demonstraţi că pentru orice număr natual nenul a, A este divizibil cu 4.*

Mihaela Sintea

Soluţie.

(a) Notăm $n = 9a^2 + 9a + 2$. Atunci, $A = n(n-24) + 144 = (n-12)^2$ .... **2 puncte**
$A = (9a^2 + 9a - 10)^2$ .... **1 punct**

(b) $9a^2 + 9a - 10 = (3a-2)(3a+5)$ .... **1 punct**
Pentru $a = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$, $(3a-2)(3a+5) = 2(3k-1)(6k+5)$.
Pentru $a = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$, $(3a-2)(3a+5) = 2(6k+1)(3k+4)$.
Deci $9a^2 + 9a - 10$ este divizibil cu 2, pentru oricare $a \in \mathbb{N}^*$ ....**2 puncte**
Rezultă că A este divizibil cu 4... **1 punct**

2. *Arătaţi că numărul natural* $N = [\sqrt{1\cdot 4}] + [\sqrt{2\cdot 5}] + [\sqrt{3\cdot 6}] + \ldots + [\sqrt{2020\cdot 2023}]$ *este divizibil cu 2023, unde* $[x]$ *este partea întreagă a numărului real* x.

***

Soluţie.
Suma are termenul general $[\sqrt{n(n+3)}]$, unde $n \in \{1,2,\ldots,2000\}$................**2 puncte**
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea $(n+1)^2 \le n(n+3) < (n+2)^2$.................**2 puncte**
Rezultă $n+1 \le \sqrt{n(n+3)} \le n+2$, de unde $[\sqrt{n(n+3)}] = n+1$ ....**1 punct**
Atunci $N = 2+3+4+\ldots+2021 = \dfrac{2023\cdot 2020}{2} = 2023\cdot 1010$, deci N este divizibil cu 2023 ...**2 puncte**

3. *Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a. Fie M mijlocul lui AB, N mijlocul lui AD, iar O centrul feţei $ADD'A'$.*

   (a) *Demonstraţi că dreapta $C'O$ este perpendiculară pe planul $(A'MD)$.*

   (b) *Dacă P este mijlocul lui DC, iar Q mijlocul lui $A'B'$, demonstaţi că planele $(C'OB)$ şi (BPQ) sunt perpendiculare.*

Gazeta Matematică

Soluţie.

(a) Din $C'D' \perp (ADD')$ şi $D'O \perp A'D$, folosind teorema celor trei perpendiculare, deducem că $C'O \perp A'D$ ... **2 puncte**
Obţinem $C'O = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi $O'M = \frac{3a}{2}$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă $C'O \perp OM$.
Din $C'O \perp A'D$ şi $C'O \perp OM$, rezultă că $C'O \perp (A'MD)$ ... **2 puncte**

(b) Din $BP \| MD$ şi $BQ \| A'M$, rezultă $(BPQ) \| (A'MD)$.
Dar $C'O \perp (A'MD)$, deci $C'O \perp (BPQ)$ ... **2 puncte**
Din $C'O \perp (BPQ)$ şi $C'O \subset (C'OB)$, obţinem că că planele $(C'OB)$ şi (BPQ) sunt perpendiculare. ... **1 punct**

4. $ABCD$ este un tetraedru în care G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ACD, respectiv ABD.

   (a) Demonstraţi că $(G_1G_2G_3) \| (BCD)$.

   (b) Fie $M \in (AC)$, astfel încât $AM < \dfrac{AC}{2}$, E mijlocul segmentului $[BC]$ şi F mijlocul segmentului $[CD]$, iar $MG_1 \cap BC = \{P\}$ şi $MG_2 \cap CD = \{Q\}$. Ştiind că patrulaterele $AMEP$ şi $AMFQ$ sunt inscriptibile, demonstaţi că triunghiul BCD este isoscel.

Dorina Rapcea

Soluţie.

(a) În ΔAEF: $\dfrac{AG_1}{AE} = \dfrac{AG_2}{AF} = \dfrac{2}{3}$, de unde rezultă că $G_1G_2 \| EF$.
Cum $EF \subset (BCD)$, obţinem $G_1G_2 \| (BCD)$.
Analog, $G_1G_3 \| (BCD)$. Rezultă $(G_1G_2G_3) \| (BCD)$ ... **3 puncte**

(b) $CE \cdot CP = CM \cdot CA$ (puterea punctului C faţă de cercul circumscris patrulaterului $AMEP$).
$CF \cdot CQ = CM \cdot CA$ (puterea punctului C faţă de cercul circumscris patrulaterului $AMFQ$).
Rezultă $CE \cdot CP = CF \cdot CQ$, de unde $\dfrac{CE}{CF} \cdot \dfrac{CP}{CQ} = 1$ ... **2 puncte**
Din $G_1G_2 \| (BCD)$ deducem $PQ \| G_1G_2$. Cum $EF \| G_1G_2$, obţinem $PQ \| EF$. Dar $EF \| BD$ (linie mijlocie în $\triangle BCD$). Atunci $\dfrac{CE}{CF} = \dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{CB}{CD}$.
Rezultă $\dfrac{CB^2}{CD^2} = 1$, de unde $CB = CD$, deci $\triangle BCD$ este isoscel ... **2 puncte**