OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023
Soluţii

Clasa a IX-a

1. *Arătaţi că, pentru orice număr natural* $n \geq 1$, *cel puţin unul dintre numerele*

$$n,\ n+1,\ n+2,\ \dots,\ 2n$$

este pătrat perfect.

***

Soluţie.
Demonstrăm proprietatea prin inducţie matematică. Notăm cu $P(n)$ predicatul din enunţ. $P(1)$ este o propozitie adevărată. .... **1 punct**
Presupunem că $P(n)$ este adevărată pentru un număr oarecare $n \geq 1$, adică cel puţin unul dintre numerele $n,\ n+1,\ n+2,\ \dots,\ 2n$ este pătrat perfect. Demonstrăm că cel puţin unul dintre numerele $n+1,\ n+2,\ \dots,\ 2n+2$ este pătrat perfect.
.... **1 punct**
Dacă n nu este pătrat perfect, atunci, conform ipotezei de inducţie, rezultă că cel puţin unul dintre numerele $n+1,\ n+2,\ \dots,\ 2n$ este pătrat perfect, deci $P(n+1)$ este adevărată. .... **2 puncte**
Dacă $n = k^2,\ k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$n+1 = k^2+1 < (k+1)^2 \leq 2(k^2+1) = 2n+2,$$

deci $P(n+1)$ este adevărată. .... **3 puncte**
Soluţie alternativă.
Presupunem, prin absurd, că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât niciunul dintre numerele $n,\ n+1,\ n+2,\ \dots,\ 2n$ nu este pătrat perfect. .... **1 punct**
Atunci există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $m^2 < n < 2n < (m+1)^2$.................. **2 puncte**
Prin urmare, $m^2 \leq n-1 < 2n+1 \leq (m+1)^2$ .... **2 puncte**
Avem: $(m+1)^2 - m^2 \geq (2n+1) - (n-1) \implies 2m+1 \geq n+2 > m^2+2 \implies (m-1)^2 < 0$, contradicţie. .... **2 puncte**

2. *Fie triunghiul ascuţitunghic* ABC *cu ortocentrul în* H. *Notăm cu* S *şi* T *punctele de intersecţie dintre semidreptele* $(BH$ *şi respectiv* $(CH$ *cu cercul circumscris triunghiului* ABC. *Dacă* $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH}$, *arătaţi că* ABC *este triunghi echilateral.*

Gazeta Matematică

Soluţie.

Din ipoteză rezultă că $ATHS$ este paralelogram........................... **1 punct**

$\angle ATC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \angle ABC = 90^\circ - \angle BAH = \angle AHT$, deci triunghiul AHT este isoscel. Analog triunghiul AHS este isoscel, deci $AT = AH = AS$. .... **3 puncte**

Prin urmare $ATHS$ este romb cu triunghiurile AHT şi AHS echilaterale, de unde rezultă ABC echilateral. .... **3 puncte**

3. *Determinaţi numerele reale x pentru care $[x] = \sqrt{|x| \cdot \{x\}}$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.*

Aurel Bârsan

Soluţie.

$\sqrt{|x| \cdot \{x\}} \geq 0 \implies [x] \geq 0 \implies x \geq 0.$ .... **1 punct**

Folosind inegalitatea mediilor, obţinem

$$[x] = \sqrt{x \cdot \{x\}} \leq \frac{x + \{x\}}{2} = \frac{[x] + 2\{x\}}{2}.$$

.... **2 puncte**

Deducem că $[x] \leq 2\{x\} < 2$, deci $[x] \in \{0, 1\}$ .... **2 puncte**

Dacă $[x] = 0$, obţinem $x = 0$. .... **1 punct**

Dacă $[x] = 1$, avem $\{x\} = x - 1$. Ecuaţia devine $1 = \sqrt{x(x-1)}$, cu $x \in [1, 2)$.

Obţinem $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. .... **1 punct**

4. (a) *Demonstraţi că $x^6 + 5 \geq 6x,\ \forall x \geq 0$.*

   (b) *Determinaţi toate numerele reale $x, y, z \geq 1$ care au proprietatea că $x^7 + 5 \leq 6y,\ y^7 + 5 \leq 6z$ şi $z^7 + 5 \leq 6x$.*

Romeo Ilie

Soluţie.

(a) $x^6 + 5 = (x^6 + 1) + 4 \geq 2x^3 + 4 = 2(x^3 + 2) \geq 6x$, deoarece $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0$ .... **3 puncte**

Remarcă. La rezultat se poate ajunge prin inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică pentru numerele $x^6, 1, 1, 1, 1, 1$ sau folosind inegalitatea lui Bernoulli: $(1 + x - 1)^6 \geq 1 + 6(x - 1)$.

(b) Folosind ipoteza şi punctul (a) obţinem:
$x^7 \leq 6y - 5 \leq y^6,\ y^7 \leq 6z - 5 \leq z^6,\ z^7 \leq 6x - 5 \leq x^6$............... **1 punct**
Prin adunarea acestor inegalităţi avem:
$\sum x^7 \leq \sum x^6 \iff \sum x^6(x-1) \leq 0.$ .... **2 puncte**
Cum $x, y, z \geq 1$, obţinem soluţia unică $x = y = z = 1$. .... **1 punct**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023
Soluţii

Clasa a X-a

1. *(a) Arătaţi că funcţia* $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \log_3 x$ *este injectivă.*

   (b) Rezolvaţi ecuaţia $x^2 - 3x + 1 + \log_3 \dfrac{x^2+2}{x} = 0$.

Florin Cârstea

Soluţie.

(a) Funcţia f este strict crescătoare, fiind suma a două funcţii strict crescătoare, deci este injectivă... **2 puncte**

(b) Ecuaţia este echivalentă cu $x^2 + 1 + \log_3(x^2 + 2) = 3x + \log_3 x$.
Atunci $x^2 + 2 + \log_3(x^2 + 2) = 3x + \log_3(3x)$...................... **2 puncte**
Obţinem că $f(x^2 + 2) = f(3x)$ şi folosind punctul (a), găsim $x^2 + 2 = 3x$.
Rezultă soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$................................ **3 puncte**

2. *Fie a, b, c numere complexe având acelaşi modul. Dacă $a + b + c = 0$, arătaţi că $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.*

Andrei Caţaron

Soluţie.
Fie $|a| = |b| = |c| = r$.
Dacă $r = 0$, atunci $a = b = c = 0$ şi concluzia este evidentă.
Presupunem $r > 0$. Avem $|a|^2 = |b|^2 = |c|^2 = r^2$, de unde $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = r^2$, deci
$\overline{a} = \dfrac{r^2}{a}$, $\overline{b} = \dfrac{r^2}{b}$, $\overline{c} = \dfrac{r^2}{c}$ .... **2 puncte**
Conjugăm relaţia $a + b + c = 0$ şi obţinem $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$.............. **2 puncte**
Aducând la acelaşi numitor, găsim $ab + ac + bc = 0$ .... **1 punct**
Ridicând la pătrat relaţia $a + b + c = 0$, obţinem $0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$
.... **1 punct**
Prin urmare, $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ .... **1 punct**

3. *(a) Arătaţi că* $x + \frac{4}{x^2} \geq 5$, $\forall\, x \in (0, 1]$.

   (b) Determinaţi minimul expresiei $a + b + \frac{1}{a \cdot b}$, *cu* $a, b > 0$ *şi* $a + b \leq 1$.

Romeo Ilie

Soluţie.

(a) Aducând la acelaşi numitor, obţinem $x^3 - 5x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x-4) \geq 0$. Inegalitatea este verificată pentru orice $x \in (0, 1]$.................... **3 puncte**

(b) Alegând $x = a + b$ în inegalitatea de la punctul (a) şi aplicând inegalitatea mediilor, obţinem $a + b + \frac{1}{ab} \geq a + b + \frac{4}{(a+b)^2} \geq 5$ .... **2 puncte**

Minimul cerut este egal cu 5 şi se atinge pentru $a = b = \frac{1}{2}$ .... **2 puncte**

4. *Fie* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *o funcţie cu proprietatea* $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$, *pentru orice* $x, y \in [0, \infty)$.

   (a) Atătaţi că $2^n \geq n + 1$, *pentru orice număr natural* n.

   (b) Arătaţi că f *este crescătoare.*

   (c) Arătaţi că $f(x) \geq f(1) \cdot \log_2 x$, *pentru orice* $x > 0$.

Romeo Ilie

Soluţie.

(a) Demonstraţie prin inducţie sau prin inegalitatea lui Bernoulli ....**2 puncte**

(b) Fie $x, y \in [0, \infty)$, $x < y$. Atunci $f(y) = f(x+(y-x)) \geq f(x)+f(y-x) \geq f(x)$. Rezultă că funcţia f este crescătoare .... **2 puncte**

(c) Prin inducţie se arată că $f(n) \geq n \cdot f(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .... **1 punct**
Cum f este crescătoare, avem:
$f(x) \geq f([x]) \geq [x]f(1) \geq \log_2([x] + 1) \cdot f(1) \geq \log_2 x \cdot f(1)$......... **2 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023
Soluţii

Clasa a XI-a

1. *Fie matricele* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *cu proprietatea că*

$$\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = \frac{1}{2023}\det(A^2 - I_2) + 2023 = 2.$$

Demonstraţi că $\det(A - 2023 \cdot I_2)$ *este un număr întreg divizibil cu 2023.*

Emanuel George Munteanu

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = 2 \Leftrightarrow ad - bc = 0$.......................... **2 puncte**
Dar, $\det(A^2 - I_2) = \det(A + I_2) \cdot \det(A - I_2) = 1 - (a + d)^2$............ **2 puncte**
Rezultă că $a + d = \pm 2022$ .... **2 puncte**
şi $\det(A - 2023 \cdot I_2) = 2023^2 - 2023(a + d) \vdots 2023$........................ **1 punct**

2. *Dacă* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *sunt două matrice pentru care matricea* $A+B$ *este inversabilă, demonstraţi că* $A \cdot (A + B)^{-1} \cdot B = B \cdot (A + B)^{-1} \cdot A$.

R.M.T.

Soluţie.
$A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B = A \cdot (A+B)^{-1} \cdot (A+B-A) = A - A \cdot (A+B)^{-1}A$... **3 puncte**
$B \cdot (A+B)^{-1} \cdot A = (A+B-A) \cdot (A+B)^{-1} \cdot A = A - A \cdot (A+B)^{-1} \cdot A$... **3 puncte**
Rezultă $A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B = B \cdot (A+B)^{-1} \cdot A$ .... **1 punct**

3. *Determinaţi* $a > 0$ *ştiind că, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^\star$*, partea întreagă a numărului* $(n^2 - n) \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$ *este egală cu* $n - 1$.

Gazeta Matematică

Soluţie.
Dacă $n = 1$, proprietatea are loc pentru orice $a > 0$.
Presupunem că $a > 0$ satisface condiţia din enunţ, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci
$n - 1 \leq (n^2 - n)(\sqrt[n]{a} - 1) < n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, ...**2 puncte**
sau $1 \leq \dfrac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} < \dfrac{n}{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ .... **1 punct**

Rezultă $1 \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1}$ .... **2 puncte**

Obţinem $\ln a = 1$, deci $a = e$. .... **1 punct**

Reciproc, din inegalitatea cunoscută $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă $[(n^2-n)\cdot(\sqrt[n]{e}-1)] = n-1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. .... **1 punct**

4. *Fie I un interval şi funcţiile $f : I \to \mathbb{R}$, $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:*

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 0.$

(2) $|f(x) - f(y)| \le |g(x-y)|,\ \forall x, y \in I,\ x > y.$

Deomnstraţi că:

(a) $|f(x) - f(y)| \le n \cdot \left| g\left(\dfrac{x-y}{n}\right)\right|\ \ \forall x, y \in I,\ x > y,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

(b) Funcţia f este constantă pe intervalul I.

Romeo Ilie

Soluţie.

(a) Fie $x, y \in I$, $x > y$, şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Considerăm punctele $x_k = y + k \cdot \dfrac{x-y}{n}$, $k = \overline{0,n}$ .... **1 punct**

$|f(x) - f(y)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right|$ .... **2 puncte**

$|f(x) - f(y)| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |g(x_k - x_{k-1})| = n\left|g\left(\frac{x-y}{n}\right)\right|$ ...**2 puncte**

(b) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g\left(\frac{x-y}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 0$ .... **1 punct**

Rezultă $|f(x) - f(y)| \le 0$, de unde $f(x) = f(y)$. Cum $x > y$ sunt alese arbitrar în intervalul I, deducem că funcţia f este constantă .... **1 punct**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023
Soluţii

Clasa a XII-a

1. *Pentru $k > 0$, definim mulţimea de matrice*

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, A(x) = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} & \frac{k}{\sqrt{k^2-x^2}} \end{pmatrix},\ x \in (-k,k) \right\}.$$

(a) *Determinaţi valorile lui $k \in (0,\infty)$ pentru care $(\mathcal{M},\cdot)$ este grup abelian, unde "$\cdot$" este înmulţirea matricelor.*

(b) *Pentru k determinat anterior, arataţi că grupurile $(\mathcal{M},\cdot)$ şi $(\mathbb{R},+)$ sunt izomorfe.*

Ioana Maşca

Soluţie.

(a) Fie $k > 0$. Pentru $x, y \in (-k,k)$, notăm $z = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$.
Avem $z \in (-k,k)$ şi $A(x) \cdot A(y) = A(z)$. ....**2 puncte**
Rezultă că $\mathcal{M}$ este parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\cdot)$, pentru oricare $k > 0$.
Avem: $A(0) = I_2$, $A(x) \cdot A(y) = A\left(\frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}\right) = A(y) \cdot A(x)$, $\forall x, y \in (-k,k)$ şi $A(-x) = A^{-1}(x)$, $\forall x \in (-k,k)$
Atunci, $(\mathcal{M},\cdot)$ este grup abelian, pentru orice $k > 0$. ....**2 puncte**

(b) Fie $k > 0$. Definim funcţia $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(A(x)) = \ln\frac{k+x}{k-x}$, $x \in (-k,k)$.
Funcţia f este corect definită şi bijectivă.
Avem

$$\begin{aligned} f(A(x)\cdot A(y)) &= f\left(A\left(\frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}\right)\right) = \ln\frac{k + \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}}{k - \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}} = \ln\frac{k+x}{k-x} + \ln\frac{k+y}{k-y} \\ &= f(A(x)) + f(A(y)), \quad \forall x, y \in (-k,k) \end{aligned}$$

Rezultă că grupurile $(\mathcal{M},\cdot)$ şi $(\mathbb{R},+)$ sunt izomorfe, prin izomorfismul f.
....**3 puncte**

2. *Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare, cu $f(0) = 0$, iar I este un interval deschis cu proprietatea că $0 \notin I$. Demonstraţi că f admite primitive pe I dacă şi numai dacă f^2 admite primitive pe I.*

Romeo Ilie

Soluţie.
1) Dacă f admite primitive pe I, atunci f, fiind strict monotonă, este şi continuă pe I, deci f^2 este continuă pe I, prin urmare are primitive pe I .... **3 puncte**
2) Reciproc, să presupunem că f^2 admite primitive pe I. Putem admite că f este strict crescătoare şi $I \subset (0, \infty)$ (celelalte situaţii se rezolvă cu un raţionament asemănător).
Din f strict crescătoare şi $f(0) = 0$ găsim că $f(I) \subset (0, \infty)$, iar funcţia $g : f(I) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ este strict crescătoare. Rezulta că $f^2 = g \circ f$ este strict monoton pe I. Cum f^2 are primitive pe I, deducem că f^2 este continuă pe I........... **2 puncte**
Cum g strict monotonă, rezultă că g se poate inversa şi $f^2 = g \circ f \to f = g^{-1} \circ f^2$ este continuă pe I. Rezultă că f are primitive pe I.
. ... **2 puncte**

3. *Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e.*

   (a) Demonstraţi că $(xyx^{-1})^{2023} = xy^{2023}x^{-1},\ \forall\, x, y \in G$.

   (b) Demonstraţi că dacă există $a, b \in G$ astfel încât $ababa = babab$, atunci $a^{2023} = e$, dacă şi numai dacă $b^{2023} = e$.

***

Soluţie.

(a) Demonstraţie prin inducţie matematică.
Notăm $P(n) : (xyx^{-1})^n = xy^n x^{-1},\ n \in \mathbb{N}^*$........................ **3 puncte**
$P(1) : xyx^{-1} = xyx^{-1}$
$P(k) \Rightarrow P(k+1),\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.
Presupunem că propoziţia $P(k)$ este adevărată. Atunci
$(xyx^{-1})^{k+1} = (xyx^{-1})^k(xyx^{-1}) = xy^k x^{-1}xyx^{-1} = xy^{k+1}x^{-1},\ \forall\, x, y \in G$.

(b) $ababa = babab \Rightarrow (ab)^2 a = b(ab)^2 \Rightarrow (ab)a(ab)^{-1} = (ab)^{-1}b(ab)$....... **1 punct**
Rezultă $(ab)a^{2023}(ab)^{-1} = (ab)^{-1}b^{2023}(ab)$, conform (a) .... **1 punct**
Dacă $a^{2023} = e$, rezultă $(ab)^{-1}b^{2023}(ab) = e$, de unde, înmulţind la stânga cu (ab) şi la dreapta cu $(ab)^{-1}$, găsim $b^{2023} = e$.
Analog, dacă $b^{2023} = e$, atunci $a^{2023} = e$ .... **2 puncte**

4. *Pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}^*$, *fie* $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^{2n-1} + x^{n-1}}{x^{2n} + x^n + 1}$.

   (a) Determinaţi primitiva funcţiei f_1 *care se anulează în 0.*

   (b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \displaystyle\int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} f_n(x)\,dx$.

Gazeta Matematică

Soluţie.

(a)

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

....**2 puncte**

Primitiva F_1 funcţiei f_1 care se anulează în 0 se obţine pentru $\mathcal{C} = -\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$:

$F_1(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$, $x \in \mathbb{R}$ .... **1 punct**

(b) Notăm $I_n = \displaystyle\int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} \frac{x^{2n-1}+x^{n-1}}{x^{2n}+x^n+1}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cu substituţia $x^n = t$, obţinem

$$I_n = \frac{1}{n}\int_n^{n+1} \frac{t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_n^{n+1} f_1(t)\mathrm{d}t = \frac{F_1(n+1)-F_1(n)}{n}.$$

.... **2 puncte**

Atunci, după efectuarea calculelor, avem:

$$n^2 I_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}\right)^n + \frac{n\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2n^2+4n+3},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

.... **1 punct**

Utilizând limite elementare, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 I_n = 1$ .... **1 punct**