OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a IX-a

1. Arătaţi că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, cel puţin unul dintre numerele
$$n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$$
este pătrat perfect.

***

2. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu ortocentrul în H. Notăm cu S şi T punctele de intersecţie dintre semidreptele $(BH$ şi respectiv $(CH$ cu cercul circumscris triunghiului ABC. Dacă $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH}$, arătaţi că ABC este triunghi echilateral.

Gazeta Matematică

3. Determinaţi numerele reale x pentru care $[x] = \sqrt{|x| \cdot \{x\}}$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

Aurel Bârsan

4. (a) Demonstraţi că $x^6 + 5 \geq 6x,\ \forall x \geq 0$.
   (b) Determinaţi toate numerele reale $x, y, z \geq 1$ care au proprietatea că $x^7 + 5 \leq 6y,\ y^7 + 5 \leq 6z$ şi $z^7 + 5 \leq 6x$.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a X-a

1. (a) Arătaţi că funcţia $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+\log_3 x$ este injectivă.
   (b) Rezolvaţi ecuaţia $x^2-3x+1+\log_3\dfrac{x^2+2}{x}=0$.

Florin Cârstea

2. Fie a,b,c numere complexe având acelaşi modul. Dacă $a+b+c=0$, arătaţi că $a^2+b^2+c^2=0$.

Andrei Caţaron

3. (a) Arătaţi că $x+\dfrac{4}{x^2}\geq 5$, $\forall\, x\in(0,1]$.
   (b) Determinaţi minimul expresiei $a+b+\dfrac{1}{a\cdot b}$, cu $a,b>0$ şi $a+b\leq 1$.

Romeo Ilie

4. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcţie cu proprietatea $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$, pentru orice $x,y\in[0,\infty)$.
   (a) Atătaţi că $2^n\geq n+1$, pentru orice număr natural n.
   (b) Arătaţi că f este crescătoare.
   (c) Arătaţi că $f(x)\geq f(1)\cdot\log_2 x$, pentru orice $x>0$.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a XI-a

1. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că:

$$\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = \frac{1}{2023}\det(A^2 - I_2) + 2023 = 2.$$

Demonstraţi că $\det(A - 2023 \cdot I_2)$ este un număr întteg divizibil cu 2023.

Emanuel George Munteanu

2. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt două matrice pentru care matricea $A+B$ este inversabilă, demonstraţi că $A \cdot (A + B)^{-1} \cdot B = B \cdot (A + B)^{-1} \cdot A$.

R.M.T.

3. Determinaţi $a > 0$ ştiind că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^\star$, partea întreagă a numărului $(n^2 - n) \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$ este egală cu $n - 1$.

Gazeta Matematică

4. Fie I un interval şi funcţiile $f : I \to \mathbb{R}$, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 0.$

(2) $|f(x) - f(y)| \leq |g(x - y)|,\ \forall x, y \in I,\ x > y.$

Deomnstraţi că:

(a) $|f(x) - f(y)| \leq n \cdot \left| g\left(\dfrac{x - y}{n}\right)\right|\ \forall\, x, y \in I,\ x > y,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

(b) Funcţia f este constantă pe intervalul I.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a XII-a

1. Pentru $k > 0$, definim mulţimea de matrice

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| A(x) = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} & \frac{k}{\sqrt{k^2-x^2}} \end{pmatrix},\ x \in (-k, k) \right\}.$$

   (a) Determinaţi valorile lui $k \in (0, \infty)$ pentru care $(\mathcal{M}, \cdot)$ este grup abelian, unde "$\cdot$" este înmulţirea matricelor.

   (b) Pentru k determinat anterior, arataţi că grupurile $(\mathcal{M}, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe.

Ioana Maşca

2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare, cu $f(0) = 0$, iar I este un interval deschis cu proprietatea că $0 \notin I$. Demonstraţi că f admite primitive pe I dacă şi numai dacă f^2 admite primitive pe I.

Romeo Ilie

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e.

   (a) Demonstraţi că $(xyx^{-1})^{2023} = xy^{2023}x^{-1},\ \forall\, x, y \in G$.

   (b) Demonstraţi că dacă există $a, b \in G$ astfel încât $ababa = babab$, atunci $a^{2023} = e$, dacă şi numai dacă $b^{2023} = e$.

***

4. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, fie $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^{2n-1} + x^{n-1}}{x^{2n} + x^n + 1}$.

   (a) Determinaţi primitiva funcţiei f_1 care se anulează în 0.

   (b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \displaystyle\int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} f_n(x)\mathrm{dx}$.

Gazeta Matematică

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.