OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A VII-A
SOLUŢII ŞI BAREM ORIENTATIV

SUBIECTUL 1

Soluţie $A=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+...............+\frac{1}{99\cdot 300}=$

$=\frac{1}{3}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...............+\frac{1}{99\cdot 100})........1p$ => $A=\frac{1}{3}(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}...............+\frac{1}{99}-\frac{1}{100})=\frac{99}{300}.......2p$

$B=\sqrt{\frac{1}{7}+(\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+..........\frac{70}{441})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+........+\frac{1}{63})}=\sqrt{\frac{1}{7}+(\frac{9}{14}-\frac{1}{2})+(\frac{10}{21}-\frac{1}{3})..........+(\frac{70}{441}-\frac{1}{63})}.......1p$ =>

$B=\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+...........\frac{1}{7}}=\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 63}=3.........2p$ => $A\cdot B+\frac{1}{100}=\frac{99}{300}\cdot 3+\frac{1}{100}=1.........1p$

SUBIECTUL 2

Soluție: $\sqrt{x}\in N\Rightarrow x=a^2$, ...1p $\sqrt{2+\sqrt{x}}\in N\Rightarrow 2+a=b^2........1p$

$\sqrt{0+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}=\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}\in N$ rezultă $2+b=c^4.......1p$

$\sqrt{2+\sqrt{0+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}}\in N\Rightarrow 2+c=d^2\geq 4........1p\Rightarrow d\geq 2,\ a,b,c,d\in N,\ \ c=d^2-2,$

$b=c^4-2=(d^2-2)^4-2,\ a=b^2-2=[(d^2-2)^4-2]^2-2,\ x=a^2=\{[(d^2-2)^4-2]^2-2\}^2$.......1p

Valoarea minimă a lui x se obține pentru $d=2$..........1p

$x=\{[(2^2-2)^4-2]^2-2\}^2=[(2^4-2)^2-2]^2=(14^2-2)^2=194^2=37636,\ x=37636$ valoarea minimă.......1p

SUBIECTUL 3

a) Fie R,T,S respectiv mijloacele segmentelor BC,AB,AC

G centru de greutate triunghi ABC =>BG=2GS =>GS=SN si AS=SC => ANCG paralelogram =>AN=GC;AN//GC;AG=NC,AG//NC 1p

G centru de greutate triunghi ABC =>AG=2GR =>GR=RM si BR=RC => BGCM paralelogram =>BM=GC;BM//GC;BG=MC,BG//MC

G centru de greutate triunghi ABC =>CG=2GT =>GT=TP si BT=TA => AGBP paralelogram =>BP=GA;BP//GA;AP=BG,BG//AP 1p

=>AN=BM;AN//BM=> ANMB paralelogram =>AB=MN

=>AP=CM;AP//CM=> APMC paralelogram =>AC=PM

=>CN=BP;CN//BP=> BCNP paralelogram =>BC=PN

=> $\Delta ABC\equiv\Delta MNP$ (LLL) 1punct

b) Demonstrăm că: $A_{AGC} = A_{AGB} = A_{BGC} = \frac{1}{3} A_{ABC}$

În triunghiul ABC , AR mediană => $A_{ABR} = A_{ARC}$

În triunghiul BGC ,GR mediană => $A_{BGR} = A_{GRC}$ => $A_{AGB} = A_{AGC}$ 1p

Analog în triunghiul ABC , CT mediană => $A_{ACT} = A_{BCT}$

În triunghiul AGB ,GT mediană => $A_{AGT} = A_{BGT}$ => $A_{AGC} = A_{BGC}$

=> $A_{AGC} = A_{AGB} = A_{BGC} = \frac{1}{3} A_{ABC}$ 1p

ANCG paralelogram => $A_{ANC} = A_{AGC} = \frac{1}{3} A_{ABC}$; APBG paralelogram => $A_{ABP} = A_{AGB} = \frac{1}{3} A_{ABC}$

BGCM paralelogram => $A_{BMC} = A_{BGC} = \frac{1}{3} A_{ABC}$ ....1 punct

=> $A_{ANC} = A_{ABP} = A_{BCM} = \frac{1}{3} A_{ABC}$ 1punct

SUBIECTUL 4

$\Delta DPC \equiv \Delta AMB(I.U)$ => PC=AM;$\sphericalangle$PCD $\equiv$ $\sphericalangle$BAM;DP=BM.........1 punct

ΔQAD $\equiv$ ΔBCN(I.U)=>CN=QA;$\sphericalangle$QAD $\equiv$ $\sphericalangle$BCN;QD=BN=>

ΔPCN $\equiv$ ΔQAM(LUL)=>QM=PN(1).........1 punct

ΔQDP $\equiv$ ΔMBN=>QP=MN(2);din (1)+(2)=>MNPQ paralelogram.........1 punct

AQCN dreptunghi =>QN=AC (3)

AMCP dreptunghi=>PM=AC (4).........1 punct

din relatiile (3)+(4)=>QN=PM=>MNPQ dreptunghi.........1 punct

b) AQCN dreptunghi =>QN$\cap$AC={O},O mijloc [AC],[QN]

AMCP dreptunghi ....1 punct=>PM$\cap$AC={O_1}; $O_1 mijloc [PM],[AC]$ =>

=> $O \equiv O_1$ => $QN \cap AC \cap PM = \{O\}$.........1 punct