OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A X-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

SUBIECTUL 1

Soluție:

Scădem egalitățile și obținem $3^k+\log_2(k+1)+5k=3^n+\log_2(n+1)+5n$ (1)……………1p

Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=3^x+\log_2(x+1)+5x$ ……………………………………………1p

Cum funcția e strict crescătoare, rezultă că e injectivă, deci din $f(k)=f(n)\Rightarrow k=n.$ ………1p

Din ipoteze obținem $3^n+\log_2(n+1)=5n$ ……………………………………………………1p

Observăm ca $n=0, n=1$ nu verifică ecuația și că $n=2$ e soluție ……………………………1p

Pentru $n\geq 3\Rightarrow 3^n\geq 5n$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică, deci nu există alte soluții……………………………………………………………………………………… 1p

Soluția sistemului este (2,2)………………………………………………………………… 1p

SUBIECTUL 2

Rezolvare:

Avem: $\left|\frac{1}{z}-\frac{2}{a}\right|<\frac{2}{a}\Leftrightarrow\left|\frac{a-2z}{za}\right|<\frac{2}{a}\Rightarrow\frac{|2z-a|}{a\cdot|z|}<\frac{2}{a}\Leftrightarrow|2z-a|<2|z|$ ridicăm la pătrat........2p

$|2z-a|^2<4|z|^2\Leftrightarrow(2z-a)\overline{(2z-a)}<4\cdot z\cdot\overline{z}\Leftrightarrow(2z-a)(2\overline{z}-a)<4z\cdot\overline{z}\Leftrightarrow$ 2p

$\Leftrightarrow 4z\cdot\overline{z}-2a\overline{z}-2az+a^2<4z\cdot\overline{z}$ adică $a^2<2a(z+\overline{z})$

$a^2<4a\leq 4\operatorname{Re}z$ cum $a>0$ 2p

Avem $a<4\operatorname{Re}z$ adevărat pentru că $a<4a\leq 4\operatorname{Re}z$ 1p

Așadar inegalitatea din concluzie este adevărată

SUBIECTUL 3

Se demonstrează prin inducție matematică $\sqrt{2}\leq a_n<a_{n+1}<2$ oricare ar fi $n\geq 2$ 1p

$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ si $(a_n-2)^2>0\Leftrightarrow a_n^2-4a_n+4>0\Leftrightarrow$ $2+a_{n-1}-4a_n+4>0\Leftrightarrow 6+a_{n-1}>4a_n$ 2p

Din $6+a_{n-1}>4a_n\Rightarrow\frac{a_n}{6+a_{n-1}}<\frac{1}{4}$ si din $(a_{n+1}-2)^2>0\Rightarrow 8-4a_{n+1}>4-a_{n+1}^2$ si $a_{n+1}<2$

$\Rightarrow\frac{2-a_{n+1}}{4-a_{n+1}^2}>\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}>\frac{1}{4}$ 3p

Deci $\frac{a_n}{6+a_{n-1}} < \frac{1}{4} < \frac{2-a_{n+1}}{2-a_n} \Rightarrow a = 4.$ 1p

SUBIECTUL 4

R. Din conditiile de existentă $x > 0$

pentru $x = 1 \Rightarrow \log_{a^{k+1}} 1 = 0 \quad \forall a \in (0,\infty)\setminus\{1\} \Rightarrow x = 1$ nu este solutie a ecuației date

pentru $x \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ 2p

$\frac{\log_a^2 x}{1\cdot 2} + \frac{\log_a^2 x}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\log_a^2 x}{n\cdot(n+1)} = \frac{4n}{n+1} \Rightarrow \log_a^2 x \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{4n}{n+1}$ 1p

$\log_a^2 x \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{4n}{n+1} \Rightarrow \log_a^2 x = 4 \Rightarrow x_1 = a^2, x_2 = \frac{1}{a^2} \in (0,\infty)\setminus\{1\} \quad \forall a \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ 1p

$x_1 + x_2 = 9,(1) \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{82}{9} \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{100}{9} \Rightarrow a + \frac{1}{a} = \pm\frac{10}{3}$ din care convine doar $a + \frac{1}{a} = \frac{10}{3}$

..........2p

$\Rightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 0 \Rightarrow a \in \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$ 1p