OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A IX-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

SUBIECTUL 1
Rezolvare:

$$\sqrt{\frac{a}{b+1}\cdot 1}+\sqrt{\frac{b}{a+1}\cdot 1}\le\frac{\frac{a}{b+1}+1}{2}+\frac{\frac{b}{a+1}+1}{2}=\frac{\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}}{2}+1\quad(1)$$ …………………3p

Demonstrăm că $a\le b\Rightarrow\frac{a}{b+1}\le\frac{b}{a+1}$ (2) …………………2p

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow\frac{\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}}{2}+1\le\frac{b}{a+1}+1=\frac{a+b+1}{a+1}$ ………………….2p

SUBIECTUL 2
Rezolvare:

Notăm cu $P(n):\frac{n!}{(1+1^2)\cdot(2+2^2)\cdot\text{..........}(n+n^2)}\le\frac{1}{2^n}$

Verificăm $P(1)\Rightarrow\frac{1!}{1+1^2}\le\frac{1}{2}$ (A) ……………………….1p

Presupunem $P(n)$ (A) și demonstrăm că și $P(n+1)$ este (A).

$$\frac{(n+1)!}{(1+1^2)\cdot(2+2^2)\cdot\text{..........}(n+n^2)\cdot\left[n+1+(n+1)^2\right]}\le\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n+1+(n+1)^2}$$ ………………2p

$\frac{n+1}{n+1+(n+1)^2}=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ ………………..2p

$$\Rightarrow\frac{(n+1)!}{(1+1^2)\cdot(2+2^2)\cdot\text{..........}(n+n^2)\cdot\left[n+1+(n+1)^2\right]}\le\frac{1}{2^{n+1}}$$ ………………...1p

$\Rightarrow P(n)$ (A) pentru orice număr natural nenul n. ………………1p

SUBIECTUL 3
Rezolvare:

Notăm $34\sqrt{7}\cdot x=a\Rightarrow 2023\cdot x^2=\frac{a^2}{4}$ ………………………1p

$[a]\cdot\{a\}=\frac{a^2}{4}-1\Rightarrow([a]-\{a\})^2=4$ ………………………..2p

$[a]-\{a\}=2\Rightarrow\{a\}=[a]-2\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{a\}=0\Rightarrow a=[a]=2$

$[a]-\{a\}=-2\Rightarrow\{a\}=[a]+2\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{a\}=0\Rightarrow a=[a]=-2$ ………………………..3p

$x=\pm\frac{\sqrt{7}}{119}$ ………………………..1p

SUBIECTUL 4
Rezolvare:
Folosind relația lui Sylvester pentru O centrul cercului circumscris și H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentre, găsim: $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$

$\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ ………………….3p

$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$

Analog $\overrightarrow{H_4H_3} = \overrightarrow{AD}$ …………………….2p

$\Rightarrow H_1H_2H_3H_4$ parallelogram ……………………..2p