OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A XI-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

SUBIECTUL 1

Soluție. $\det(X^3)=17-16=1=(\det X)^3 \Rightarrow \det X=1,$ 1p

Aplicăm teorema lui Cayley-Hamilton

$X^2=(TrX)X-(\det X)I_2 \Rightarrow X^3=(TrX)X^2-X \Rightarrow Tr(X^3)=(TrX)(TrX^2)-Tr(X),$ 1p

$18=(TrX)\cdot((TrX)^2-2\det X)-TrX,\ TrX=t,\ t^3-3t-18=0,\ t^3-3t^2+3t^2-9t+6t-18=0,$

$t^2(t-3)+3t(t-3)+6(t-3)=0, (t-3)(t^2+3t+6)=0.$ Dacă $t^2+3t+6=0 \Rightarrow \Delta=9-24=-15<0,$

ecuaţia nu are soluţii reale,fals.Dacă $t-3=0 \Rightarrow t=3,$ 2p

$$X^2=3X-I_2 \Rightarrow X^3=3X^2-X=9X-3I_2-X=8X-3I_2 \Rightarrow X=\frac{1}{8}(X^3+3I_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix},$$

............3p.

SUBIECTUL 2

***Soluție*:**

Soluție. $k^4+4=(k^2+2)^2-(2k)^2=(k^2+2k+2)(k^2-2k+2)=[(k+1)^2+1]\cdot[(k-1)^2+1],$ 1p

$$\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}=\frac{4(k^2+2k+2)-(k^2-2k+2)}{2^k(k^2+2k+2)(k^2-2k+2)}=\frac{1}{2^{k-2}[(k-1)^2+1]}-\frac{1}{2^k[(k+1)^2+1]},$$ 2p

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}=\frac{1}{2(2^2+1)}-\frac{1}{2^3(4^2+1)}+\frac{1}{2^2(3^2+1)}-\frac{1}{2^4(5^2+1)}+\frac{1}{2^3(4^2+1)}-\frac{1}{2^5(6^2+1)}+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{1}{2^{n-4}[(n-3)^2+1]}-\frac{1}{2^{n-2}[(n-1)^2+1]}+\frac{1}{2^{n-3}[(n-2)^2+1]}-\frac{1}{2^{n-1}(n^2+1)}+\frac{1}{2^{n-2}[(n-1)^2+1]}-\frac{1}{2^n[(n+1)^2+1]}$$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}=\frac{1}{2(2^2+1)}+\frac{1}{2^2(3^2+1)}-\frac{1}{2^{n-1}(n^2+1)}-\frac{1}{2^n[(n+1)^2+1]},$$ 2p

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}=\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{8}.$$ 2p

SUBIECTUL 3

Soluţie.Demonstrăm prin inducţie matematică propoziţia $P(n): a_n > 0, (\forall) n \in N^*$. $P(1): a_1 > 0$, adevărat.Presupunem că $P(k)$ adevărat şi demonstrăm că $P(k+1)$ adevărat.

$P(k+1): a_{k+1} = \dfrac{2a_k^2 + 9}{2a_k} > 0$, adevărat,deci $P(n): a_n > 0, (\forall) n \in N^*$. 1p

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{9}{2a_n} > 0, (\forall) n \in N^*$ rezultă că şirul a_n este strict crescător,deci strict monoton şi are limită la infinit. ....1p.Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$, trecând la limită în relaţia de recurenţă obţinem,

$a = a + \dfrac{9}{2a}$, rezultă $\dfrac{9}{2a} = 0$, fals,deoarece $9 \neq 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. 1p

Aplicăm criteriul lui Cesaro-Stolz, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n+9}} > 0$, şirul de termeni pozitivi $\sqrt{n+9}$ este strict crescător şi nemărginit superior.

$$l^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n+10-n-9} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2a_n}(2a_n + \frac{9}{2a_n}) = \lim_{n\to\infty} (9 + \frac{81}{4a_n^2}) = 9,$$

............2p. $l^2 = 9$ rezultă $l \in \{-3, 3\}$, dar $l > 0$ rezultă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n+9}} = 3$. ....2p.

SUBIECTUL 4

$A^2 = B \Rightarrow B^7 = I_n\,(\mathbf{1p}) \Rightarrow B^8 = B\,(\mathbf{1p})$

$$I_n = B^8 - B + I_n\,(\mathbf{1p}) = B^2\left(B^6 - I_n\right) + B^2 - B + I_n = B^2\left(B^3 - I_n\right)\left(B^3 + I_n\right) + \left(B^2 - B + I_n\right)(\mathbf{1p}) =$$
$$= B^2\left(B^3 - I_n\right)\left(B + I_n\right)\left(B^2 - B + I_n\right) + \left(B^2 - B + I_n\right)(\mathbf{1p}) = \left(B^2 - B + I_n\right)\left[\left(B^5 - B^2\right)\left(B + I_n\right) + I_n\right] =$$
$$= \left(B^2 - B + I_n\right)\left(B^6 + B^5 - B^3 - B^2 + I_n\right)(\mathbf{1p}) \Rightarrow B^2 - B + I_n$$ este inversabilă rezultă $A^4 - A^2 + I_n$ este inversabilă; inversa este matricea $A^{12} + A^{10} - A^6 - A^4 + I_n$. $(\mathbf{1p})$

Observație: Matricea $A = I_n\left(\cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$ verifică $A^{14} = I_n$ și $A \neq I_n$.