Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023
Clasa a XI-a

Problema 1.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$.

a) Dacă $X \in G$ arătaţi că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = Aa + (b-a)I_2$.

b) Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^2 = A$.

(Supliment GM, 11/2022)

Problema 2.

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n>1$astfel încât $A^2 + A + I_n = O_n$. Determinaţi n ştiind că $\det(A^n + I_n) = 2^{2023}$.

Problema 3.

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2\cdot 2}{n^4+n}+\frac{2^2\cdot 3}{n^4+2n}+\frac{3^2\cdot 4}{n^4+3n}+\cdots+\frac{n^2\cdot(n+1)}{n^4+n^2}\right)$$

Problema 4.

Se dă şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin:

$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}, \forall\, n \geq 1.$

a) Să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

b) Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$;

c) Să se calculeze : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Durata probei scrise este de 3 ore
Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte