Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023
Clasa a IX-a

Subiect

Problema 1.

Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC astfel încât MA ∥ BC și dreapta AC separă punctele M și B. Notăm cu H, H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor ABC, MAB, MBC respectiv MCA. Arătați că $HH_1^2 + HH_2^2 = HH_3^2$ dacă și numai dacă ABCM este dreptunghi.

Problema 2.

a) Să se arate că : $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$, $(\forall) a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}^*$.

b) Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\frac{a^2+1}{b+c} + \frac{b^2+1}{a+c} + \frac{c^2+1}{b+a} \geq 3$.

Problema 3.

Arătați că egalitatea $\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ este adevărată, pentru orice număr natural n,

unde $[x]$ – reprezintă partea întreagă a numărului x.

Problema 4.

a) Demonstrați egalitatea : $x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$,

pentru $x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

b) Arătați că $E_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ este număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Durata probei scrise este de 3 ore
Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte