Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023
Clasa a XII-a

Subiect

Problema 1. Fie G= $\left\{x\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -9 & 3\end{pmatrix}+I_2 \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Demonstraţi că G este grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

b) Să se arate că (G,·) este izomorf cu grupul $((0,\infty),\cdot)$.

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e. Dacă $a,b\in G$ astfel încât $b^6=e$ și $b^4a=ab$, să se arate că $b^3=e$ și $ab=ba$.

Problema 3. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ definit prin $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ și $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.
Să se caculeze:

a) I_0 și I_1;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Problema 4. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(2x-1)\cdot sin\frac{1}{x^2-x}, x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\\ m, x=1\end{cases}$$

să admită primitive.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Durata probei scrise este de 3 ore
Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte