Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023
Clasa a VII-a

Subiect

Problema 1

Se consideră numărul

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$$

unde $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*$**.**

a) *Arătați că, pentru oricare* $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

b) *Pentru n = 2022 aflați valoarea lui **A** și rezolvați în* $\mathbb{R}_+$ *ecuația*

$$\sqrt{x}\cdot\boldsymbol{A}=\sqrt{x}-\frac{1}{17}$$

Problema 2

Se consideră mulțimile:

$$\boldsymbol{A}=\left\{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}/\sqrt{\frac{\boldsymbol{n}+(-1)^{\boldsymbol{n}}}{2\boldsymbol{n}+1}}\in\boldsymbol{Z}\right\}\quad \text{și}\quad \boldsymbol{B}=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{Q}\ /\ \sqrt{\boldsymbol{x}^2+\sqrt{\boldsymbol{x}^2+1}}\in\boldsymbol{Q}\right\}.$$

Să se determine mulțimea **A**− **B**.

Problema 3

Fie $\boldsymbol{G}$ *centrul de greutate al triunghiului oarecare* $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{E}$ *simetricul lui* $\boldsymbol{G}$ *față de dreapta* $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{F}$ *mijlocul segmentului* $\boldsymbol{AE}$, $\{\boldsymbol{H}\}=\boldsymbol{GE}\cap\boldsymbol{BC}$ *și* $\boldsymbol{D}$ *mijlocul laturii BC.*

a) *Arătați că punctele* $\boldsymbol{G},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H},\boldsymbol{F}$ *sunt vârfurile unui paralelogram.*

b) *Calculați aria* $\Delta\boldsymbol{FGE}$ *în funcție de* $\boldsymbol{s}$, *unde* $\boldsymbol{s}$ *este aria paralelogramului de la punctul a).*

Problema 4

Fie triunghiul echilateral **ABC**, *punctul* **M** *mijlocul laturii* **BC** *și punctul* **D** *aflat pe bisectoarea unghiului* $\sphericalangle\boldsymbol{ABC}$ *astfel încât* $\sphericalangle\boldsymbol{BDM}=15°$.

a) *Aflați* $\sphericalangle\boldsymbol{ADC}$.

b) *Dacă* **E** *este punctul de intersecție al dreptelor* **DC** *și* **AM**, *iar* **F** *punctul de intersecție al dreptelor* **AB** *și* **MD**, *demonstrați că* $\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{EF}$.

(Gazeta Matematică)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte.