

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023
Clasa a X-a**Problema 1.**

Fie $a = \log_7 98$ și $b = \log_2 28$. Să se arate că $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} = 1$.

(Supliment GM, nr 11/2022)

Problema 2.

Fie $a, b, c \in (0; +\infty)$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 4ab + 4bc - 2ca$. Să se arate că:

$$\lg \frac{a+b+c}{\sqrt{6}} + \lg \frac{|a-b+c|}{\sqrt{2}} = \lg b + \lg(a+c).$$

Problema 3.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

a) Să se arate că $(z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3)(z_3 + \bar{z}_1) \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze valoarea sumei $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$.

Problema 4.

Fie $z \in \mathbb{C}$ care verifică relația $|z - i| + |z - \sqrt{3}| = 2$. Demonstrați că pentru acest număr complex z , avem $\frac{z-i}{z-\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Durata probei scrise este de 3 ore

Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte