9

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a IX – a

V3

SUBIECTE:

1. Fie triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ și punctele $A \epsilon A_1A_2, B \epsilon B_1B_2$ și $C \epsilon C_1C_2$ diferite de vârfurile triunghiurilor, astfel încât : $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{CC_1}{CC_2}$. Dacă cercurile circumscrise $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$ și $\Delta A_2B_2C_2$ sunt concentrice, să se arate că ortocentrele acestor triunghiuri sunt pe o dreaptă. **(7p)**

2. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot x_n + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}, pentru\ orice\ n \geq 1$.

Determinați $\left[\frac{x_n}{n^2}\right], unde$ $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

(7p)

3. a) Fie A={ $x \epsilon Q$ / $x = \frac{n-1}{2^{n+1}}, n = \overline{1,5}$}. Să se determine cardinalul mulțimii A. **(3p)**

b) Să presupunem că avem un triunghi ABC și un punct $M \epsilon [BC]$ cu proprietatea $\frac{AB^2}{MC} + \frac{AC^2}{MB} \leq \frac{(AB+AC)^2}{BC}$. Să se determine poziția punctului M pe latura BC. **(4p)**

4. a) Arătați că $11(x+y)^2 + (11x-y)^2 = 12(11x^2+y^2)$, pentru orice numere reale x,y **(3p)**

b) Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 1$ există numerele natural impare x_n, y_n pentru care $11x_n^2 + y_n^2 = 4 \cdot 3^n$. **(4p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.