

12

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a XII-a

SUBIECTE:

1. a) Fie $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ și legea de compoziție $\circ: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \circ y = a(x-b)(y-b) + b$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, unde x_n este soluția ecuației $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = a^p + b$, unde $p \in \mathbf{N}$, p este fixat și $n \in \mathbf{N}^*$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (3p)

b) Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow G$, $f(x) = \frac{x-a}{x+b}$, unde $a, b \in (0, \infty)$. Să se determine mulțimea G și legea de compoziție $\Delta: G \times G \rightarrow G$ astfel încât grupurile (\mathbf{R}_+^*, \cdot) și (G, Δ) sunt izomorfe. (4p)

2. Fie (G, \cdot) un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a^3b = ba$ și $b^2 = e$, unde $e \in G$ este elementul neutru al grupului. Să se arate că $a^8 = e$ și $(a^2b)^2 = e$. (7p)

3. Calculați: $\int x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) dx$, $x \in (-a, a)$, unde $a > 0$. (7p)

4. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$, fie $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n-1} + x^{n-1}}{x^{2n} + x^{n+1}}$.

a) Determinați primitiva funcției f_1 care se anulează în 0. (3p)

b) Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} f_n(x) dx$$

(4p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.