

11

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a XI – a

V3

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	Punctaj
<p>a) Demonstrează egalitatea prin calcul elementar. $(A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2)$ teorema Cayley-Hamilton</p>	1p
<p>b) Căutăm $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$, cu $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-7 \end{cases}$.</p> <p>Găsirea unei soluții (spre exemplu $a=1, d=-1, b=2$ și $c=3$) conduce la $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, care verifică cerința problemei.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p>
<p>c) Din relația $\det(X^2 - 7I_2) = 0 \Rightarrow \det(X - \sqrt{7}I_2) \cdot \det(X + \sqrt{7}I_2) = 0$, deci</p> $\begin{cases} \det(X - \sqrt{7}I_2) = 0 \\ \text{sau} \\ \det(X + \sqrt{7}I_2) = 0 \end{cases}.$ <p>Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$, și $\det(X \pm \sqrt{7}I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x \pm \sqrt{7} & y \\ z & t \pm \sqrt{7} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$</p> <p>$\Leftrightarrow (xt - yz) \pm (x + t)\sqrt{7} = -7$, de unde ținând cont că $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$, obținem</p> $\begin{cases} xt - yz = -7 \\ x + t = 0 \end{cases}.$ <p>Deci $X^2 = 7I_2$.</p>	<p>1p</p> <p>Finalizare</p> <p>1p</p>

Problema 2: soluție orientativă	Punctaj
<p>a) Vom utiliza teorema lui Weierstrass.</p> <p>Termenul general este $x_n = \left(1 + \ln \frac{n+1}{n}\right) \left(1 + \ln \frac{n+2}{n+1}\right) \dots \left(1 + \ln \frac{2n}{2n-1}\right)$</p> <p>Din $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \ln \frac{2n+1}{2n}\right) \left(1 + \ln \frac{2n+2}{2n+1}\right)}{\left(1 + \ln \frac{n+1}{n}\right)} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$</p> <p>$(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător (1)</p> <p>$\left(1 + \ln \frac{2n}{2n-1}\right)^n \leq x_n \leq \left(1 + \ln \frac{n+1}{n}\right)^n$</p> <p>Din $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \ln \frac{2n}{2n-1}\right)^n = \sqrt{e}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \ln \frac{n+1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \sqrt{e} < x_n < e, \forall n \in \mathbb{N}^* (2)$</p> <p>Din (1) și (2), conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p Finalizare 1p</p>
<p>b) Demonstrează că șirul $y_n = \ln \frac{n+1}{n} \cdot \ln \frac{n+2}{n+1} \cdot \dots \cdot \ln \frac{2n}{2n-1}$ converge către zero.</p> <p>Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + y_n)^{2023} - 1}{y_n} = 2023.$</p>	<p>2p</p> <p>Finalizare 1p</p>

Problema 3: soluție orientativă	Punctaj
<p>Demonstrează inductiv că $(B - A)^{n+1} = B^n (B - (n+1)A)$</p> <p>$n = 1 \Rightarrow (B - A)^2 = B^2 - BA - AB + A^2 = B^2 - 2BA + \underbrace{BA - AB}_{=-A^2} + A^2 = B(B - 2A)$</p> <p>$P(k) \Rightarrow P(k+1)$</p> <p> $(B - A)^{k+2} = \underbrace{(B - A)^{k+1}}_{\text{ip. de inducție}} \cdot (B - A) = B^k (B - (k+1)A) \cdot (B - A) =$ $= B^k (B^2 - BA - (k+1)AB + (k+1)A^2) =$ $= B^k (B^2 - (k+2)BA + (k+1)BA - (k+1)AB + (k+1)A^2) =$ $= B^k \left(B^2 - (k+2)BA + (k+1) \underbrace{(BA - AB)}_{=-A^2} + (k+1)A^2 \right) =$ $= B^k (B^2 - (k+2)BA) = B^{k+1} (B - (k+1)A)$ și procedeul inducției matematice este finalizat. Pentru $n = 2023 \Rightarrow (B - A)^{2024} = B^{2023} (B - 2024A)$. </p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>Concluzie 1p</p>

Problema 4: soluție orientativă	Punctaj
<p>Fie $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} - x \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.</p> <p>(Cum $\det A = \det A^t$, puteau lua și forma matricei transpuse.)</p> <p>Prin calcul, adunând spre exemplu toate liniile la prima linie rezultă</p> <p> $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow[(-1)c_1+c_2]{(-1)c_1+c_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - x & x & 2x - \frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2} - 2x & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} =$ </p>	<p>2p</p> <p>1p</p>

$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 2x - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 2x & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = x \left(\frac{1}{2} - x \right) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - 2x \right) =$ $= \frac{1}{2}x - x^2 + \left(2x - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{x}{2} - x^2 + 4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ <p>și cum funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ are</p> $a = 3 > 0$ $\Delta = \frac{9}{4} - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{3}{4} < 0 \left\} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} .$	<p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b) $\min_{x = -\frac{b}{2a}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{\frac{3}{4}}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{16} .$</p>	<p>2p</p>

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.