5

**Olimpiada Naţională de Matematică**
**Etapa locală, 11 februarie 2023**
**Clasa a V– a**

V3

## BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

| **Problema 1: soluție orientativă** | **Punctaj** |
|---|---|
| a) | |
| $A=(3^2\cdot 7)^n+7^{n+1}\cdot 3^{2n+1}-(3\cdot 7)^n\cdot 3^{2+n}$<br>$A=3^{2n}\cdot 7^n+7^{n+1}\cdot 3^{2n+1}-3^{2+2n}\cdot 7^n$<br>$A=3^{2n}\cdot 7^n(1+7\cdot 3-3^2)$<br>$A=3^{2n}\cdot 7^n\cdot 13$ | **1p** |
| $B=(3\cdot 5)^{n+1}+3^{n+1}\cdot 5^{n+2}+3^3\cdot(3\cdot 5)^n$<br>$B=3^{n+1}\cdot 5^{n+1}+3^{n+1}\cdot 5^{n+2}+3^{3+n}\cdot 5^n$<br>$B=3^{n+1}\cdot 5^n(5+5^2+3^2)$<br>$B=3^{n+1}\cdot 5^n\cdot 39=3^{n+1}\cdot 5^n\cdot 3\cdot 13=3^{n+2}\cdot 5^n\cdot 13$ | **1p** |
| Deoarece, $A=3^{2n}\cdot 7^n\cdot 13$ iar $B=3^{n+2}\cdot 5^n\cdot 13$,<br>$A+B=3^n\cdot 13(21^n+9\cdot 5^n)$ | **2p** |
| b) | |
| Dacă $n=0$, ultima cifră a lui $B$ este 7 | **1p** |
| Dacă $n\geq 1$, ultima cifră a lui $B$ este 5 | **2p** |

| **Problema 2: soluție orientativă** | **Punctaj** |
|---|---|
| a) | |
| $216=125+64+27$<br>$216=5^3+4^3+3^3$ | **2p** |
| Numerele căutate sunt 5, 4, 3 | **1p** |
| b) | |
| $6^{45^2}=6^{2025}$ | **1p** |
| $6^{45^2}=6^{2022}\cdot 216$ | **1p** |
| $6^{45^2}=6^{2022}\cdot(5^3+4^3+3^3)$ | **1p** |
| $6^{45^2}=(6^{674}\cdot 5)^3+(6^{674}\cdot 4)^3+(6^{674}\cdot 3)^3$ | **1p** |

| **Problema 3: soluție orientativă** | **Punctaj** |
|---|---|
| Fie $\overline{abc}$ numărul și $\overline{cba}$ răsturnatul său. | **1p** |
| Alegem $a>c$ și obținem $\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-(100c+10b+a)$ | **1p** |
| $\overline{abc}-\overline{cba}$=$100(a-c)-(a-c)=\overline{(a-c)00}-(a-c)$ | **1p** |
| $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{(a-c-1)9(10-a+c)}$ | **1p** |
| Dacă a și c sunt numere consecutive, atunci a=c+1 și $\overline{abc}-\overline{cba}=99$ | **1p** |
| ⇒99+99=198 | **1p** |
| Dacă a și c nu sunt consecutive ⇒ $\overline{(a-c-1)9(10-a+c)}+$<br>$\overline{(10-a+c)9(a-c-1)}=1089$ | **1p** |

| Problema 4: soluție orientativă | Punctaj |
|---|---|
| Cum $a \cdot b \cdot c = 2^{2023}$, distingem următoarele cazuri:<br>a) $a = 1, b = 2, c = 2^{2022} \Rightarrow U(3^a + 3^b + 3^c)$=3, care nu convine<br>b) $a = 2, b = 2^m, c = 2^n, m, n \geq 2 \Rightarrow U(3^a + 3^b + 3^c)$=1, care nu convine<br>c) $a = 2^m, b = 2^n, c = 2^p, m, n, p \geq 2 \Rightarrow U(3^a + 3^b + 3^c)$=3, care nu convine<br>d) $a = 1, b = 2^m, c = 2^n, m, n \geq 2 \Rightarrow U(3^a + 3^b + 3^c)$=5, care convine<br>Astfel există tripletele de forma $(1, 2^m, 2^n), m < n, m, n \geq 2$ care verifică condiția$U(3^a + 3^b + 3^c)$=5 | **4p** |
| Vom căuta printre tripletele de mai sus pe cele care verifică relația $a \cdot b \cdot c = 2^{2023}$<br>Acestea sunt: $(1, 2^2, 2^{2021}), (1, 2^3, 2^{2020}), \ldots, (1, 2^{1011}, 2^{1012}) \Rightarrow 1010$ numere care verifică condițiile din enunț | **3p** |

**Notă:** Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.