



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a IX – a



BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă Fie triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ și punctele $A \in A_1A_2$, $B \in B_1B_2$ și $C \in C_1C_2$ diferite de vârfurile triunghiurilor, astfel încât : $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{CC_1}{CC_2}$. Dacă cercurile circumscrise ΔABC , $\Delta A_1B_1C_1$ și $\Delta A_2B_2C_2$ sunt concentrice, să se arate că ortocentrele acestor triunghiuri sunt pe o dreaptă.	Punctaj
Cercurile circumscrise ΔABC , $\Delta A_1B_1C_1$ și $\Delta A_2B_2C_2$ sunt concentrice \Rightarrow au același centru O	1p
Fie $H, H_1; H_2$ ortocentrele ΔABC , $\Delta A_1B_1C_1$ și $\Delta A_2B_2C_2$ Din relația Sylvester $\Rightarrow \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ $\vec{OH}_1 = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1$ $\vec{OH}_2 = \vec{OA}_2 + \vec{OB}_2 + \vec{OC}_2$	2p
$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{CC_1}{CC_2} = k \Rightarrow \vec{OA} = \frac{1}{1+k} \vec{OA}_1 + \frac{k}{k+1} \vec{OA}_2$; $\vec{OB} = \frac{1}{1+k} \vec{OB}_1 + \frac{k}{k+1} \vec{OB}_2$; $\vec{OC} = \frac{1}{1+k} \vec{OC}_1 + \frac{k}{k+1} \vec{OC}_2$	2p
Adunând ultimele 3 relații de mai sus, obținem : $\vec{OH} = \frac{1}{1+k} \vec{OH}_1 + \frac{k}{k+1} \vec{OH}_2$	1p
Dar $\frac{1}{k+1} + \frac{k}{k+1} = 1 \Rightarrow H; H_1; H_2$ sunt coliniare	1p

Problema 2: soluție orientativă Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot x_n + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}$, pentru orice $n \geq 1$. Determinați $\left[\frac{x_n}{n^2}\right]$, unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.	Punctaj
$x_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot x_n + \frac{n^2+2n+1}{n^3} \Rightarrow$ $x_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot x_n + \frac{(n+1)^2}{n^3} \div (n+1)^2 \Rightarrow$	1p

$\frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{n^3}$	1p
Notam $a_n = \frac{x_n}{n^2} \Rightarrow a_1 = \frac{x_1}{1^2} = 1 \Rightarrow [a_1] = 1$	1p
Din $\frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{n^3} \Rightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^3}$	1p
<p>Pentru $n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + \frac{1}{1^3}$; Pentru $n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + \frac{1}{2^3}$</p> <p>Pentru $n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + \frac{1}{3^3}, \dots$</p> <p>Pentru n ia valoarea $n - 1 \Rightarrow a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)^3}$</p> <p>Pentru $n \Rightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^3}$. Adunând aceste relații și reducând termenii asemenea, avem $a_n = a_1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^3} \Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^3}$</p>	1p
$k^3 = k^2 \cdot k \geq (k+1)k = k^2 + k \Rightarrow$ $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$	1p
$a_n = 1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^3} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n \leq 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = 2,5 - \frac{1}{n} < 3 \text{ pentru } n \geq 2 \Rightarrow [a_n] = 2$	1p
$\Rightarrow \text{Concluzie } [a_n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 1 \\ 2, & \text{dacă } n \geq 2 \end{cases}$	

Problema 3: soluție orientativă	Punctaj
a) Fie $A = \{x \in \mathbb{Q} / x = \frac{n-1}{2^{n+1}}, n = \overline{1,5}\}$. Să se determine cardinalul mulțimii A.	
$n = \overline{1,5} \Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$	1p
$n = 1 \Rightarrow x = \frac{1-1}{2^{1+1}} = 0; \quad n = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{8}; \quad n = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$ $n = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{32}; \quad n = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{16}$	1p
$A = \{0; \frac{1}{8}; \frac{3}{32}; \frac{1}{16}\} \Rightarrow \text{card} A = 4$	1p
b) Să presupunem că avem un triunghi ABC și un punct $M \in [BC]$ cu proprietatea $\frac{AB^2}{MC} + \frac{AC^2}{MB} \leq \frac{(AB+AC)^2}{BC}$. Să se determine poziția punctului M pe latura BC.	

Inegalitatea adevărată întotdeauna, conform inegalității Cauchy – Buniakowski – Schwartz este $\frac{AB^2}{MC} + \frac{AC^2}{MB} \geq \frac{(AB+AC)^2}{BC}$	1p
Deducem că avem relația cerută, în cazul de egalitate din relația CBS, anume: $\frac{AB}{MC} = \frac{AC}{MB}$	2p
$\frac{AB}{AC} = \frac{MC}{MB} = > M$ este simetricul piciorului bisectoarei interioare dusă din A față de mijlocul laturii BC	1p

Problema 4: soluție orientativă	Punctaj
a) Arătați că $11(x+y)^2 + (11x-y)^2 = 12(11x^2 + y^2)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ b) Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 1$ există numerele natural impare x_n, y_n pentru care $11x_n^2 + y_n^2 = 4 \cdot 3^n$.	7p
a) $11(x+y)^2 + (11x-y)^2 = 11(x^2 + 2xy + y^2) + 121x^2 - 22xy + y^2 =$ $= 132x^2 + 12y^2 = 12(11x^2 + y^2)$	3p
b) Pentru $n = 2p + 1$ (n impar), $p \in \mathbb{N}$ Luăm $x_n = y_n = 3^p \Rightarrow 11x_n^2 + y_n^2 = 11x_n^2 + x_n^2 = 12x_n^2 = 12(3^p)^2 =$ $= 4 \cdot 3 \cdot 3^{2p} = 4 \cdot 3^{2p+1} = 4 \cdot 3^n$	2p
Pentru $n = 2p$ (n par), $p \in \mathbb{N}^*$ Luăm $x_n = 3^{p-1}$; $y_n = 5 \cdot 3^{p-1}$ $11x_n^2 + y_n^2 = 11 \cdot (3^{p-1})^2 + (5 \cdot 3^{p-1})^2 = 11 \cdot 3^{2p-2} + 25 \cdot 3^{2p-2} = 3^{2p-2}(11 + 25) =$ $= 3^{2p-2} \cdot 36 = 4 \cdot 3^2 \cdot 3^{2p-2} = 4 \cdot 3^{2p} = 4 \cdot 3^n$	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.