7

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a VII – a

SUBIECTE:

1. Se consideră numerele reale $a=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2}-1$ și

$b=\left(\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{6}-\left(\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\cdot\sqrt{24}$. Aflați numerele naturale x, știind că $\sqrt{x}<a\cdot b$.

(7p)

2. Fie ABC un triunghi $\left(AB\neq AC\right)$, G centrul său de greutate, punctul D mijlocul segmentului BC, E simetricul punctului G față de dreapta BC. Considerăm punctul H intersecția dreptelor GE și BC, F mijlocul segmentului AE, iar O intersecția dreptelor GE și DF.

a) Arătați că patrulaterul $GDHF$ este un paralelogram. **(3p)**

b) Arătați că aria triunghiului GOF reprezintă $\frac{1}{12}$ din aria triunghiului AED. **(4p)**

3. Aflați câte numere distincte cuprinde următoarea secvență de numere:

$$\frac{1^2-2\cdot1+5}{1^2+1},\frac{2^2-2\cdot2+5}{2^2+1},\frac{3^2-2\cdot3+5}{3^2+1},\ldots,\frac{2023^2-2\cdot2023+5}{2023^2+1}.$$

(7p)

4. Se consideră pătratul $ABCD$, P un punct pe latura AB astfel încât $\sphericalangle PCB=15^0$, R mijlocul segmentului CP și Q pe latura AD, astfel încât $\sphericalangle QPC=60^0$.

a) Arătați că triunghiul QPC este echilateral. **(3p)**

b) Dacă în plus, O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului QRP, O_2 centrul cercului circumscris triunghiului QRC, X punctul diametral opus punctului R, situat pe cercul circumscris triunghiului QRP și Y punctul diametral opus punctului R, situat pe cercul circumscris triunghiului QRC, arătați că $\sphericalangle AO_2X\equiv\sphericalangle DO_1Y$. **(4p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.