Concursul IMAR 2022
Facultatea de Matematică şi Informatică,
Universitatea din Bucureşti
19.11.2022

Problema 1. Determinaţi toate numerele prime $p, q < 2023$ astfel încât $q \mid p^2 + 8$ şi $p \mid q^2 + 8$.

Problema 2. Fie n, k numere naturale, $1 \leq k < n$. În fiecare vârf al unui poligon regulat cu n laturi este scris 1 sau -1. La fiecare pas alegem k vârfuri consecutive şi le schimbăm semnul. Este posibil ca, pornind de la o configuraţie oarecare şi făcând de mai multe ori această transformare, să obţinem orice altă configuraţie?

Problema 3. Fie paralelogramul $XYZT$ şi punctele variabile A, B, C, D pe laturile XY, XT, TZ, ZY respectiv, astfel încât $ABCD$ este inscriptibil cu centrul cercului circumscris O, $AC \parallel XT$ şi $BD \parallel XY$. Fie P intersecţia dreptelor AD şi BC, iar Q intersecţia dreptelor AB şi CD. Demonstraţi că cercul (POQ) trece printr-un punct fix, când A, B, C, D variază conform restricţiilor anterior menţionate.

Problema 4. Se consideră câteva jetoane de diverse culori şi mărimi, astfel încât nu există două jetoane având aceeaşi culoare şi aceeaşi mărime. Pe fiecare jeton J sunt scrise două numere: unul dintre ele este numărul jetoanelor având aceeaşi culoare cu J, dar mărime diferită, iar celălalt este numărul jetoanelor având aceeaşi mărime cu J, dar culoare diferită. Se ştie că fiecare dintre numerele $0, 1, \ldots, 100$ este scris cel puţin o dată. Pentru ce numere de jetoane este posibil acest lucru?