MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală - 6 martie 2022
CLASA a VII-a – enunțuri

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Numărul $\dfrac{\frac{3}{4}}{2}+\dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\sqrt{3}-1}$ este egal cu:

A 1 **B** 2 **C** $\dfrac{8+\sqrt{3}}{4}$ **D** $0,875$ **E** $\dfrac{7+2\sqrt{3}}{8}$

2. Un ceasornic arată ora 7:00. Unghiul format de acul minutarului și cel al orarului are măsura egală cu:

A $120°$ **B** $210°$ **C** $150°$ **D** $240°$ **E** $75°$

3. Partea întreagă a numărului $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ este egală cu:

A -1 **B** 0 **C** 2 **D** 3 **E** 1

4. Numărul $x=[-1,2]+5\cdot\{-1,2\}$ este egal cu:
($\{a\}$ şi $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a).

A 0 **B** -2 **C** -1 **D** -3 **E** 2

5. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x+2|+|-x+6|=8\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\leqslant x\leqslant 6\}$. Numărul elementelor mulțimii $A\cap B$ este:

A 9 **B** 8 **C** 0 **D** 7 **E** infinit

6. Numărul $1-2+3-4+\ldots+2021-2022+2023$ este egal cu:

A $-2021\cdot 1011$ **B** 1012 **C** $2023\cdot 1011$ **D** $2021\cdot 1011$ **E** 1011^2

7. Numărul $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\ldots+\sqrt{2^{99}}}{1+\sqrt{2}}$ este egal cu:

A $\sqrt{2}\cdot 2^{50}-\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{2}\cdot 2^{50}+2^{51}$ **C** $2^{51}-2$ **D** $\sqrt{2}\cdot 2^{49}+2^{50}$ **E** $2^{50}-1$

8 Numărul $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 101}$ este egal cu:

A 1 **B** $\dfrac{100}{101}$ **C** $\dfrac{50}{101}$ **D** $\dfrac{51}{101}$ **E** 51

9. Unghiurile adiacente AOB și BOC sunt astfel încât $\sphericalangle AOB=135°$, $AC=BC$ și $OA=OB$. Măsura unghiului BOC este egală cu:

A $112°30'$ **B** $120°$ **C** $67°30'$ **D** $110°$ **E** $115°$

10 Considerăm dreptunghiul $ABCD$ și punctele M,N, astfel încât M este mijlocul laturii CD și N este mijlocul segmentului AM. Dacă $BC=4\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle BNC=60°$, atunci:

A $BN=4$ cm **B** $BN=12$ cm **C** $BN=8\sqrt{3}$ cm **D** $BN=4\sqrt{3}$ cm **E** $BN=8$ cm

11. Considerăm dreptunghiul $ABCD$ și punctele M,N, astfel încât M este mijlocul laturii CD și N este mijlocul segmentului AM. Dacă $BC=4\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle BNC=60°$, atunci:

A $AC=8\sqrt{3}$ cm **B** $AC=4\sqrt{7}$ cm **C** $AC=4\sqrt{3}$ cm **D** $AC=12$ cm **E** $AC=6$ cm

12. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc cu raza $R = 20$ cm.
Dacă $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD = 30°$, atunci perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu:

A 40 cm **B** $\left(30 + 10\sqrt{3}\right)$ cm **C** $\left(30 + 20\sqrt{3}\right)$ cm **D** 100 cm **E** 50 cm

13. Numărul numerelor întregi a, cu $-100 \leqslant a \leqslant 100$, pentru care există numerele întregi prime între ele x și y, astfel încât $\dfrac{4}{x} + \dfrac{a}{y} = \dfrac{4+a}{x+y}$, este egal cu:

A 201 **B** 200 **C** 5 **D** 10 **E** 20

14. Dacă numerele reale x, y, z verifică egalitatea

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 3} + \sqrt{y^2 + 2\sqrt{2}y + 3} + \sqrt{z^2 - 4\sqrt{2}z + 8} = 2,$$

atunci suma $x + y + z$ este egală cu:

A 2 **B** $4\sqrt{2}$ **C** $2\sqrt{2}$ **D** 0 **E** 7

15. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle ABC = 60°$, $BC = 6$ cm și $CD = 3$ cm. Dacă M este mijlocul diagonalei AC, atunci:

A $DM = 4$ cm **B** $DM = 2\sqrt{3}$ cm **C** $DM = 4\sqrt{3}$ cm **D** $DM = 3\sqrt{3}$ cm **E** $DM = 3$ cm

16. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle ACD = 90°$ și $\sphericalangle DAC = 30°$. Dacă M este mijlocul laturii AD, iar punctul P se află pe diagonala AC, astfel încât $AP = 2 \cdot PC$, atunci:

A $MP = 4$ cm **B** $MP = 6$ cm **C** $MP = 4\sqrt{3}$ cm **D** $MP = 6\sqrt{3}$ cm **E** $MP = 3$ cm

17. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 120°$ și $AC = 120$ cm. Fie punctul D pe segmentul BC, astfel încât AD este bisectoarea unghiului BAC și M proiecția punctului C pe dreapta AD. Dacă $AD = 30$ cm și $\mathcal{A}_{AMC} = S$, atunci:

A $S = 1800\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **B** $S = 1800\ \text{cm}^2$ **C** $S = 3600\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **D** $S = 900\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **E** $S = 900\ \text{cm}^2$

18. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 120°$ și $AC = 120$ cm. Fie punctul D pe segmentul BC, astfel încât AD este bisectoarea unghiului BAC și M proiecția punctului C pe dreapta AD. Dacă $AD = 30$ cm și $\mathcal{A}_{AMC} = S$, atunci:

A $AB = 60$ cm **B** $AB = 30$ cm **C** $AB = 45$ cm **D** $AB = 80$ cm **E** $AB = 40$ cm

19. Se consideră mulțimea $A = \left\{ a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{\dfrac{7a^2 - 1}{a^2 + 2}} \in \mathbb{N} \right\}$. Produsul elementelor mulțimii A este:

A $\dfrac{3}{14}$ **B** $\dfrac{\sqrt{42}}{14}$ **C** $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **D** $-\dfrac{3}{14}$ **E** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

20. Numerele reale x și y verifică simultan relațiile:

$$\left\{\frac{5x^2+3}{2x^2+1}\right\} + \left[\frac{7y^2+4}{2y^2+1}\right] = \frac{11}{3} \quad \text{și} \quad \left\{\frac{7y^2+4}{2y^2+1}\right\} + \left[\frac{5x^2+3}{2x^2+1}\right] = \frac{23}{9}.$$

($\{a\}$ şi $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a).
Cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul $x - y$ este egală cu:

A -3 **B** 0 **C** -1 **D** 3 **E** 1

21. Numărul perechilor de numere naturale nenule (k, n), cu $k \leqslant 100$, pentru care numărul $A = \left(\sqrt{2k} - \sqrt{3n}\right)\left(2\sqrt{3k} + 3\sqrt{2n}\right)$ este rațional, este egal cu:

A 0 **B** 33 **C** 34 **D** 49 **E** 50

22. Unghiurile A, B, C, D ale patrulaterului convex $ABCD$ sunt direct proporționale cu numerele 11, 9, 7, 9. Dreptele AD și BC se intersectează în E, iar dreptele AB și CD se intersectează în F. Dacă $AB = AD$, atunci suma măsurilor unghiurilor ACE și AFD este egală cu:

A $35°$ **B** $55°$ **C** $90°$ **D** $45°$ **E** $60°$

23. Punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dacă $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle BIC = 135°$, iar raza cercului înscris în triunghiul ABC este de $5\sqrt{6}$ cm, atunci distanța de la I la ortocentrul triunghiului ABC este egală cu:

A $10\sqrt{3}$ cm **B** $5\sqrt{6}$ cm **C** $10\sqrt{2}$ cm **D** 10 cm **E** 15 cm

24. În paralelogramul $ABCD$, M este mijlocul laturii AB, iar N este mijlocul laturii BC. Dacă punctul O este intersecția dreptelor AN și DM, iar $\mathcal{A}_{ABCD} = k \cdot \mathcal{A}_{AOD}$, atunci:

A $k = 6$ **B** $k = 5$ **C** $k = 4$ **D** $k = 7$ **E** $k = 3$

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală - 6 martie 2022
CLASA a VII-a – răspunsuri

1. D
2. C
3. E
4. E
5. A
6. B
7. E
8. C
9. A
10. D
11. B
12. D
13. D
14. C
15. E
16. B
17. A
18. E
19. D
20. D
21. B
22. B
23. A
24. B