Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 6 martie 2022
CLASA a XII-a – enunţuri

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie operaţia $\perp$ definită prin $x \perp y = xy + 6x + 6y + 30$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Această operaţie nu este lege de compoziţie pe:
A. $\mathbb{R}$.
B. $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$.
C. $(-6, \infty)$.
D. $(-\infty, -6)$.
E. $\mathbb{Q}$.

2. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + b) e^x$ este o primitivă a funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (2x + 3) e^x$ dacă
A. $a = 3, b = 2$.
B. $a = 2, b = 1$.
C. $a = 2, b = 3$.
D. $a = 2, b = 0$.
E. $a = 2, b = -1$.

3. Fie legea asociativă $*$ definită pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ prin $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$. Atunci $\frac{9}{2} * \frac{14}{3} * \frac{19}{4} * \frac{24}{5} * \frac{29}{6}$ este egal cu
A. $\frac{23}{6}$.
B. $\frac{25}{6}$.
C. $\frac{1}{6}$.
D. $\frac{31}{6}$.
E. 4.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă astfel încât $f'(0) = -1$. Notăm cu F o primitivă a lui f. Atunci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x) + F(-x) - 2F(0)}{x^2}$ este egală cu:
A. 0.
B. 1.
C. -1.
D. 2.
E. -2.

5. Pe $\mathbb{Z}_8$ definim legea $\circ$ prin $a \circ b = ab + \widehat{3}a + \widehat{3}b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_8$. Numărul soluţiilor ecuaţiei $x \circ x = \widehat{7}$ este
A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 4.
E. 8.

6. Fie funcţia $f : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{x} \left(2^t - 1\right) t \, dt$. Atunci:
A. $x = 0$ este punct de minim al funcţiei f.
B. $x = 0$ este punct de maxim al funcţiei f.
C. f este descrescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$.
D. f este crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$.
E. Toate răspunsurile anterioare sunt false.

7. Pe $(1, \infty)$ definim legea de compoziţie $\perp$ prin $u \perp v = u \cdot v + \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sqrt{u^2 - 1}$, pentru orice $u, v \in (1, \infty)$. Valoarea numărului real α, pentru care $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x} \left(x \perp x^2 - \alpha x^3\right)$ există şi este finită, este egală cu
A. 1.
B. 2.
C. 4.
D. 6.
E. Alt răspuns.

8. Fie $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ şi $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, unde $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : D \longrightarrow D$ sunt funcţiile definite prin $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $f_4(x) = 1 - x$, $f_5(x) = \frac{1}{x}$, $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$, pentru orice $x \in D$. Dacă $\circ$ este operaţia de compunere a funcţiilor, care dintre următoarele enunţuri este fals?
A. $\mathcal{F}$ este parte stabilă în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.
B. $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup necomutativ.
C. $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup comutativ.
D. $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup care are 6 subgrupuri.
E. $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup neciclic.

9. Pe $\mathbb{R}$ definim legea asociativă $*$ prin $a * b = 2(a - 3)(b - 3) + 3$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Pentru un număr real α definim şirul $(x_n)_{n \geq 2}$ prin relaţia $x_n = \underbrace{\alpha * \alpha * ... * \alpha}_{n \text{ de } \alpha}$. Mulţimea tuturor valorilor posibile ale numărului α pentru care şirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este mărginit este:
A. $\emptyset$.
B. $\{3\}$.
C. $\left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$.
D. $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.
E. $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

10. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right) dx$ este
A. 0.
B. 1.
C. $\frac{1}{2} \ln(2)$.
D. $\ln(1 + \sqrt{2})$.
E. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln(1 + \sqrt{2})$.

11. Cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $\widehat{1} \cdot \widehat{4} \cdot \widehat{7} \cdot ... \cdot \widehat{(3n+1)} = \widehat{0}$ în $\mathbb{Z}_{2021}$, este
A. 1347.
B. 674.
C. 673.
D. 31.
E. 67.

12. Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\int_0^1 (x-x^2)^n \, dx}$ este
A. 0.
B. 1.
C. nu există.
D. $\frac{1}{4}$.
E. $\frac{1}{2}$.

13. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, $G \neq \{e\}$, iar $f : G \to G$ un endomorfism al grupului G cu proprietatea că $f(x^2y^3) = x^3y^2$ pentru orice elemente $x, y \in G$. Care dintre următoarele afirmaţii nu este adevărată?
A. Grupul G este comutativ.
B. G conţine un subgrup cu 12 elemente.
C. $f(x) = x^{-1}$ pentru orice element $x \in G$.
D. G conţine un subgrup cu 5 elemente.
E. $x^5 = e$ pentru orice element $x \in G$.

14. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi crescătoare. Fie F o primitivă a lui f care admite asimptotă orizontală la $+\infty$. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - F(n)$.
Fie enunţurile:
E1: Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton.
E2: Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.
E3: Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
Numărul de enunţuri adevărate este egal cu
A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 0.
E. Nu poate fi precizat cu exactitate.

15. Numărul total de valori posibile ale elementului $a \in \mathbb{Z}_{42}$, pentru care funcţia $f : \mathbb{Z}_{42} \to \mathbb{Z}_{42}$, $f(x) = ax$ nu este injectivă, este egal cu
A. 4.
B. 18.
C. 30.
D. 24.
E. 14.

16. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ prin $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$. Valoarea lui n, pentru care are loc egalitatea $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{2022}$, este
A. 2019.
B. 2020.
C. 2021.
D. 2022.
E. 2023.

17. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e. Fie $H \neq G$ o submulţime proprie nevidă a lui G cu proprietatea că oricare ar fi $a \in H$ şi $b \in G \setminus H$ avem $ab \in H$. Considerăm enunţurile:
E1: Pentru orice $u, v \in H$ avem $uv \in H$.
E2: Pentru orice $u, v \in G \setminus H$ avem $uv \in G \setminus H$.
E3: $e \in G \setminus H$.
E4: Pentru orice $x \in H$ avem $x^{-1} \in H$.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:
A. 4.
B. 3.
C. 2.
D. 1.
E. 0.

18. Mulţimea tuturor valorilor posibile ale numărului real a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$, este:
A. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
B. $\{-1\}$.
C. $\{0\}$.
D. $[0, -1]$.
E. $\emptyset$.

19. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e. Fie $a, b \in G$, astfel încât $aba = b$ şi $bab = a$. Care dintre următoarele egalităţi nu rezultă din cele două de mai sus?
A. $a^2 = b^2$.
B. $a^4 = e$.
C. $bab^{-1} = a^{-1}$.
D. $ab = ba$.
E. $ab = b^{-1}a$.

20. Cel mai mic număr $\alpha > 0$ pentru care valoarea limitei $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_n^{n^2} \sqrt{x^2+1}\,dx$ este finită este
A. 1.
B. 2.
C. e.
D. 4.
E. 2π.

21. Se consideră următoarele enunţuri despre grupuri:
E1: Dacă toate elementele unui grup finit au ordin impar, atunci grupul are ordin impar.
E2: Dacă toate subgrupurile proprii ale unui grup sunt comutative, atunci grupul este comutativ.
E3: Dacă toate subgrupurile proprii ale unui grup sunt finite, atunci grupul este finit.
E4: Dacă un grup are un număr finit de subgrupuri, atunci grupul este finit.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:
A. 1.
B. 3.
C. 0.
D. 2.
E. 4.

22. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x}\, dx$ este
A. $2e^{\frac{\pi}{2}}$.
B. $e^{\frac{\pi}{2}}$.
C. π.
D. 0.
E. 1.

23. Fie $\mathbb{P}$ mulţimea numerelor naturale prime, iar $A = \mathbb{P} \cup (-\mathbb{P})$. Considerăm enunţurile:
E1: Adunarea numerelor nu este lege de compoziţie pe A.
E2: Înmulţirea numerelor nu este lege de compoziţie pe A.
E3: Există o infinitate de operaţii binare $*$ care pot fi legi de compoziţie pe A.
E4: Există cel puţin o operaţie $*$ care defineşte o structură de grup abelian pe A.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:
A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.
E. 4.

24. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ o funcţie care admite primitive. Considerăm enunţurile:
E1: Există funcţii $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care nu au proprietatea lui Darboux, iar $f \cdot g$ să admită primitive.
E2: Funcţia $f \cdot g$ admite primitive pentru orice funcţie derivabilă $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care are derivata continuă.
E3: Funcţia $f \cdot g$ admite primitive pentru orice funcţie continuă $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
E4: Funcţia $f \cdot g$ admite primitive pentru orice funcţie derivabilă $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care are derivata mărginită.

Numărul de enunţuri adevărate este egal cu:
A. 3.
B. 1.
C. 0.
D. 2.
E. 4.

Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 6 martie 2022

CLASA a XII-a

Grila de răspunsuri

1. **Răspuns:** D
2. **Răspuns:** B
3. **Răspuns:** B
4. **Răspuns:** C
5. **Răspuns:** C
6. **Răspuns:** D
7. **Răspuns:** B
8. **Răspuns:** C
9. **Răspuns:** E
10. **Răspuns:** D
11. **Răspuns:** D
12. **Răspuns:** E
13. **Răspuns:** B
14. **Răspuns:** C
15. **Răspuns:** C
16. **Răspuns:** C
17. **Răspuns:** B
18. **Răspuns:** A
19. **Răspuns:** D
20. **Răspuns:** D
21. **Răspuns:** D
22. **Răspuns:** E
23. **Răspuns:** E
24. **Răspuns:** A