Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 6 martie 2022
CLASA a XI-a – enunţuri

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = i$. Valoarea expresiei $\det(A^{2022}) + \det(iA)$ este:
A 0 **B** $1-i$ **C** $-1+i$ **D** i **E** -2

2. Dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei $x^3 = 1$, atunci determinantul $\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & 1+z \end{vmatrix}$ are valoarea:
A -1 **B** 1 **C** 0 **D** $-z$ **E** z

3. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Numărul soluţiilor ecuaţiei $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este egal cu:
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 9

4. Suma numerelor reale a şi b pentru care dreapta de ecuaţie $y = ax + b$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$, este egală cu:
A -2 **B** $-\frac{5}{2}$ **C** 0 **D** $\frac{3}{2}$ **E** $-\frac{1}{2}$

5. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$, $x_2 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ şi $x_{n+2} = [x_{n+1}] + \{x_n\}$, pentru orice $n \geq 1$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă şi respectiv partea fracţionară a numărului real x. Atunci:
A $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ **B** $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow a = b$ **C** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$
D $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$ **E** $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton $\Leftrightarrow [a] = [b]$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei A^{100} este egală cu:
A -300 **B** -303 **C** 0 **D** -297 **E** -100

7. Limita $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ este egală cu:
A e **B** $\frac{1}{e}$ **C** 1 **D** $\frac{1}{\sqrt{e}}$ **E** e^2

8. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = (0, 1)$ şi $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci
A $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită **B** $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ **C** $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent
D $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător **E** $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este monoton

9. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = (0, 1)$ şi $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, pentru orice $n \geq 1$. Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$ este egală cu:
A 1 **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D** 0 **E** ∞

10. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit astfel: $a_1 = \sqrt{3}$ şi $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{4}{5^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **B** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ **C** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ **D** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ **E** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

11. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = 1$ şi $\operatorname{Tr}(A) = -1$. Numărul elementelor mulţimii $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este egal cu:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **E** ∞

12. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A) = 4$ şi $\operatorname{Tr}(A) = 5$. Notăm $M = \{a \in \mathbb{R} \mid \det(A^4 + aA^2 + 16I_2) = 64\}$. Atunci:

A $M = \{16\}$ **B** $M = \{-19, -15\}$ **C** $M = \{0\}$ **D** $M = \{-10, 9\}$ **E** $M = \{-19\}$

13. Valoarea maximă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & 2 & 4 & 4 \\ x & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A 2 **B** 6 **C** -1 **D** 3 **E** 4

14. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci A^{2024} este:

A I_2 **B** O_2 **C** $4^{2022}A$ **D** $2^{4048}A$ **E** $4^{2023}A$

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ecuaţia matriceală $X^{2024} = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, are exact:

A o soluţie **B** 2 soluţii **C** 2023 soluţii **D** 2024 soluţii **E** 4048 soluţii

16. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $\varepsilon \in \mathbb{C}$ astfel încât $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ şi

$$\det(A + B) + \det(A + \varepsilon B) + \det(A + \varepsilon^2 B) = 0.$$

Atunci:

A $\det(A) = \varepsilon$ **B** $\det(A) = 1 + \varepsilon$ **C** $\det(A) = 1 + \varepsilon^2$ **D** $\det(A) = \varepsilon^2$ **E** $\det(A) = 0$

17. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z})$, având elementele numere întregi pare pe diagonala principală şi numere întregi impare în rest. Atunci numărul elementelor impare ale matricei A^2 este

A 9 **B** 12 **C** 16 **D** 8 **E** 4

18. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left| \frac{k}{n} - \frac{1}{3} \right| - \frac{5n}{18}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ **B** $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit superior **C** $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit inferior

D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{6}$ **E** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$

19. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{n}}$, $n \geq 1$. Atunci:

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$ **B** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$ **C** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ **D** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ **E** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{3}$

20. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $A^n - B^n = x_n(A - B)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ este:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 4 **E** ∞

21. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit recurent prin $a_1 = a > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Limita şirului $x_n = \dfrac{a_n^2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este:

A 0 **B** $\dfrac{1}{e}$ **C** $\dfrac{1}{2}$ **D** 1 **E** 2

22. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit recurent prin $a_1 = a > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cel mai mic număr real r pentru care şirul $y_n = \dfrac{a_n}{n^r}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are limită finită este:

A $\dfrac{1}{e}$ **B** $\dfrac{1}{2}$ **C** 1 **D** $\dfrac{3}{2}$ **E** 2

23. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu $x_0 = 0$ şi $x_1 = 1$. Notăm $P_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{x_n^2}$ este:

A 2 **B** $2\sqrt{2}$ **C** $1+\sqrt{2}$ **D** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ **E** ∞

24. Limita şirului $x_n = \left(\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}\right)^n$, $n \geq 2$, este

A 0 **B** ∞ **C** $1/e$ **D** 1 **E** e

Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 6 martie 2022

CLASA a XI-a

Grila de răspunsuri

1. A
2. E
3. E
4. B
5. D
6. D
7. D
8. C
9. A
10. C
11. C
12. B
13. E
14. E
15. D
16. E
17. E
18. D
19. C
20. D
21. E
22. B
23. D
24. B