MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a V-a

Problema 1. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, care au proprietatea că restul împărțirii lui $\overline{ab}$ la $a+b$ este $a \cdot b$.

Problema 2. a) Fie n un număr natural. Demonstrați că, dacă numerele $9 \cdot n+1$ și $11 \cdot n+1$ sunt simultan pătrate perfecte, atunci n este divizibil cu 5.

b) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care numerele $9 \cdot n+1$ și $11 \cdot n+1$ sunt simultan pătrate perfecte.

Problema 3. a) Determinați numerele prime a, b, c, cu $a<b<c$, pentru care

$$a^2+b^2+c^2=2022.$$

b) Există cinci numere prime distincte care au suma pătratelor egală cu 2022? Justificați răspunsul!

Problema 4. Determinați perechile (a, b) de numere naturale nenule, care au proprietatea că $2 \cdot b+1$ divide $3 \cdot a-1$ și $2 \cdot a+1$ divide $3 \cdot b-1$.

Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, care au proprietatea că restul împărțirii lui $\overline{ab}$ la $a+b$ este $a \cdot b$.

Soluție. Avem condiția $a \cdot b < a+b$. Dacă a și b ar fi mai mari sau egale cu 2, presupunând că $a \geq b$, obținem $a \cdot b \geq 2 \cdot a \geq a+b$, contradicție. La fel pentru $a \leq b$. În concluzie $a \leq 1$ sau $b \leq 1$. **3p**

Cazul I. Pentru $a \leq 1$, deoarece $a \neq 0$ obținem $a=1$. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $\overline{1b} = (1+b) \cdot C + b$, de unde $10 = (1+b) \cdot C$, unde am notat cu C câtul împărțirii. Deci $b+1$ divide pe 10, b putând avea valorile $0, 1, 4$ sau 9. Obținem soluțiile $10, 11, 14, 19$. **2p**

Cazul II. Pentru $b \leq 1$ avem două subcazuri:

a) Dacă $b=0$, atunci obținem soluțiile $10, 20, \ldots, 90$.

b) Dacă $b=1$, din teorema împărțirii cu rest obținem $\overline{a1} = (a+1) \cdot C + a$, de unde $9 \cdot (a+1) = (a+1) \cdot C + 8$. Obținem că $a+1$ divide pe 8, deci a poate fi $1, 3$ sau 7. Se obțin soluțiile $11, 31, 71$ **2p**

Problema 2. a) Fie n un număr natural. Demonstrați că, dacă numerele $9 \cdot n+1$ și $11 \cdot n+1$ sunt simultan pătrate perfecte, atunci n este divizibil cu 5.

b) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care numerele $9 \cdot n+1$ și $11 \cdot n+1$ sunt simultan pătrate perfecte.

Soluție. a) Dacă ultima cifră a lui n este $1, 2, 6$ sau 7, atunci ultima cifră a lui $11 \cdot n+1$ este $2, 3, 7$, respectiv 8, deci $11 \cdot n+1$ nu este pătrat perfect. **2p**

Dacă ultima cifră a lui n este $3, 4, 8$ sau 9, atunci ultima cifră a lui $9 \cdot n+1$ este $8, 7, 3$, respectiv 2, deci $9 \cdot n+1$ nu este pătrat perfect. **2p**

Cum numerele $11 \cdot n+1$ și $9 \cdot n+1$ sunt simultan pătrate perfecte, deducem că ultima cifră a lui n trebuie să fie 0 su 5, deci n este divizibil cu 5. .... **1p**

b) Considerând multiplii de 5 nenuli $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$, obținem pentru numărul $9 \cdot n+1$ valorile $46, 91, 136, 181, 226, 271, 316$, care nu sunt pătrate perfecte. **1p**

Pentru $n=40$ obținem $9 \cdot n+1 = 361 = 19^2$ și $11 \cdot n+1 = 441 = 21^2$, deci $n=40$ este cel mai mic număr natural nenul pentru care $9 \cdot n+1$ și $11 \cdot n+1$ sunt simultan pătrate perfecte.**1p**

Problema 3. a) Determinați numerele prime a, b, c, cu $a<b<c$, pentru care

$$a^2+b^2+c^2=2022.$$

b) Există cinci numere prime distincte care au suma pătratelor egală cu 2022? Justificați răspunsul!

Soluție. a) Dacă a, b, c ar fi toate impare, atunci $a^2+b^2+c^2$ ar fi impar, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $a=2$ **1p**

Din $b^2+c^2=2018$ și c număr prim deducem că $c \leq 43$. Dacă $c \leq 31$, cum $b<c$, obținem $b \leq 29$, deci $b^2+c^2 \leq 1690 < 2018$. Astfel c poate avea valorile $37, 41$ sau 43. .... **2p**

Pentru $c=37$ și $c=41$ nu avem soluție, iar pentru $c=43$ obținem $b=13$. **1p**

b) Presupunem că există $a<b<c<d<e$ numere prime cu $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=2022$. Dacă toate ar fi impare, atunci suma pătratelor lor ar fi impară, ceea ce contrazice relația. Deci $a=2$ și obținem $b^2+c^2+d^2+e^2=2018$. **1p**

Dacă $b=3$, atunci $c^2+d^2+e^2=2009$, și cum c, d, e sunt de forma $\mathcal{M}_3+1$ sau $\mathcal{M}_3+2$, obținem că $c^2+d^2+e^2=\mathcal{M}_3 \neq 2009$. **1p**

Dacă $b>3$, atunci $b^2+c^2+d^2+e^2=\mathcal{M}_3+1 \neq 2018$. În concluzie nu există numere cu proprietatea cerută. **1p**

Problema 4. Determinați perechile (a, b) de numere naturale nenule care au proprietatea că $2 \cdot b+1$ divide $3 \cdot a-1$ și $2 \cdot a+1$ divide $3 \cdot b-1$.

Soluție. Dacă perechea (a, b) convine, atunci numerele $x=\dfrac{3a-1}{2b+1}$ și $y=\dfrac{3b-1}{2a+1}$ sunt naturale **1p**

Avem $x \cdot y<\dfrac{3a}{2b} \cdot \dfrac{3b}{2a}=\dfrac{9}{4}=2\dfrac{1}{2}$ și, cum x și y sunt numere naturale, deducem că sunt posibile doar cazurile $x=y=1$, $x=1, y=2$ și $x=2, y=1$ **3p**

În cazul $x=y=1$ obținem $a=b=2$ **1p**

În cazul $x=1, y=2$ obținem $a=12, b=17$ **1p**

În cazul $x=2, y=1$ obținem $a=17, b=12$ **1p**