Soluții și repere de corectare – ziua 2

5. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y,\ \text{oricare ar fi } x,y\in\mathbb{R}.$$

Soluție. Înlocuind în ipoteză $y=\frac{1}{2}(x^2-f(x))$ obținem $f(x)(x^2-f(x))\equiv 0 \quad (*)$ **1p**

În particular, din (*) reiese $f(0)=0$. Pentru $x=0$, ipoteza dă $f(y)\equiv f(-y)$ **1p**

Să presupunem că există a astfel încât $f(a)\neq a^2$. Atunci (*) implică $f(a)=0$, deci $a\neq 0$. Pentru $x=a$, ipoteza duce la $f(y)\equiv f(a^2-y)$, deci $f(a^2+y)\equiv f(-y)\equiv f(y)$, adică f are perioada a^2 .... **2p**

Din ipoteză reiese $f(f(x))\equiv f(x^2)$, iar din periodicitate, $f(f(x))\equiv f(f(x)+a^2)\equiv f(x^2-a^2)+4a^2f(x)\equiv f(x^2)+4a^2f(x)$, deci $4a^2f(x)\equiv 0$, de unde $f\equiv 0$. Astfel, dacă $f\not\equiv x^2$, atunci $f\equiv 0$ **3p**

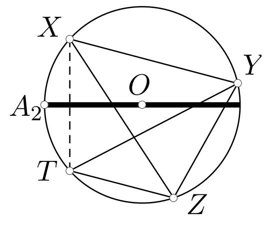
Atât $f\equiv x^2$, cât și $f\equiv 0$ convin.

6. Pe tablă este desenat poligonul regulat $A_1A_2\ldots A_{99}$. Ana și Barbu se joacă, ocupând, pe rând, vârfuri libere ale poligonului și scriind un triunghi pe o listă: Ana – obtuzunghic, iar Barbu – ascuțitunghic. La început, lista fiind goală și toate vârfurile fiind libere, Ana ocupă trei vârfuri X,Y,Z și scrie pe listă $\triangle XYZ$. Apoi, Barbu alege două dintre vârfurile X,Y,Z – de exemplu, X și Y – și un vârf liber T, pe care îl ocupă și scrie pe listă $\triangle XYT$. În continuare, fiecare trebuie să ocupe un vârf liber R și să scrie pe listă un triunghi de forma PQR, unde P este ultimul vârf ocupat de celălalt jucător iar Q este unul dintre celelalte vârfuri ale triunghiului scris de acesta. Dacă cel care este la rând nu mai poate continua lista, celălalt câștigă.

Dacă fiecare adoptă strategia optimă, cine câștigă?

Soluție. Ana câștigă.

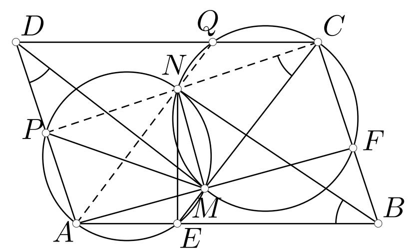
O strategie este să ocupe la început triunghiul $A_1A_2A_3$, apoi să aleagă, de fiecare dată, simetricul T față de diametrul care trece prin A_2 al ultimului vârf X ales de Barbu, precum și unul dintre celelalte două vârfuri ale ultimului triunghi format XYZ. Cu această strategie, Ana poate ocupa un vârf de fiecare dată când îi vine rândul **3p**



Deoarece XYZ este ascuțitunghic, centrul O al cercului circumscris poligonului este în interiorul triunghiului XYZ, deci în exteriorul unuia dintre triunghiurile XTY sau XTZ. Astfel unul dintre ele este obtuzunghic și poate fi scris de Ana **4p**

7. Considerăm un paralelogram $ABCD$ și punctele E, F pe laturile AB, respectiv BC. Dreptele AF și CE se intersectează în M. Cercurile circumscrise triunghiurilor AEM și CFM se taie a doua oară în punctul N, situat în interiorul triunghiului ACD. Demonstrați că $\angle MDA=\angle NBA$.

Soluție. Considerăm punctele P, a doua intersecție a cercului $\mathcal{C}(A,E,M)$ cu DA și Q, a doua intersecție a cercului $\mathcal{C}(C,F,M)$ cu CD. Avem $\angle CNM=\angle MFB=\angle MAP=\pi-\angle PNM$, deci C,N,P sunt coliniare; analog A,N,Q sunt coliniare **3p**



Avem $\angle NEA=\pi-\angle NPA=\angle NCB$, deci patrulaterul $EBCN$ este inscriptibil. Apoi $\angle APM=\pi-\angle AEM=\angle DCM$, deci patrulaterul $CDPM$ este inscriptibil. Rezultă $\angle NBA=\angle NBE=\angle NCE=\angle PCM=\angle PDM=\angle ADM$ **4p**

8. Fie $p\geqslant 3$ un număr natural impar. Arătați că p este prim dacă și numai dacă oricum am alege $\frac{p+1}{2}$ numere naturale nenule, două câte două distincte, există două dintre ele a,b astfel încât $\frac{a+b}{(a,b)}\geqslant p$.

Soluție. Soluție. „$\Rightarrow$” Putem presupune că numerele alese au c.m.m.d.c $=1$.

Dacă unul dintre ele – fie acesta a – este divizibil cu p, atunci există printre ele b nedivizibil cu p și avem $\frac{a+b}{(a,b)}\geqslant\frac{a}{(a,b)}\geqslant p$ **1p**

În caz contrar, există două numere având suma sau diferența divizibilă cu p. Deducem că:

- dacă $p\mid a+b$, atunci $\frac{a+b}{(a,b)}\geqslant p$;

- dacă $p\mid a-b$, atunci $\frac{a+b}{(a,b)}>\frac{a-b}{(a,b)}\geqslant p$.......... **2p**

„$\Leftarrow$” Arătăm că, dacă $p=xy$, cu x,y numere naturale, mai mari ca 1, atunci putem alege $n=\frac{p+1}{2}$ numere naturale nenule $a_1,\ldots,a_n$ astfel încât $\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)}<p$, oricare ar fi $1\leqslant i<j\leqslant n$. Definim $a_1=1$, $a_2=2$, $\ldots,a_x=x,a_{x+1}=x+1,a_{x+2}=x+3,\ldots,a_n=xy-x$ ($a_{x+1},a_{x+2},\ldots,a_n$ sunt în progresie aritmetică cu rația 2). Atunci:

- dacă $i\leqslant x$ și $j\leqslant n$, cel puțin o inegalitate fiind strictă, atunci $a_i+a_j\leqslant xy-x+x-1<p$;

- dacă $i=x$ și $j=n$, atunci $\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)}=\frac{xy}{x}=y<p$;

- dacă $x+1\leqslant i,j\leqslant n$, atunci $\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)}\leqslant\frac{2xy-2x}{(a_i,a_j)}\leqslant\frac{2xy-2x}{2}<p$ **4p**