Soluții și repere de corectare – ziua 1

1. O mulțime finită M de numere reale are proprietățile:

- are cel puțin 4 elemente;

- există o funcție bijectivă $f : M \to M$, diferită de funcția identică, astfel încât

$$ab \leqslant f(a)f(b), \text{ oricare ar fi } a, b \in M, a \neq b.$$

Arătați că suma elementelor lui M este 0.

Soluție. Avem $\sum\limits_{a<b} ab \leqslant \sum\limits_{a<b} f(a)f(b) = \sum\limits_{a<b} ab$, deci inegalitatea din ipoteză este chiar egalitate **2p**

Dacă $0 \in M$, atunci $f(0)f(b) = 0, \forall b \in M$, deci $f(0) = 0$ **1p**

Mulțimea M are cel puțin 3 elemente nenule a, b, c; avem $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, $f(c) \neq 0$. Din $f(a)f(b) = ab$, $f(a)f(c) = ac$, $f(b)f(c) = bc$ rezultă $f^2(a) = a^2$, deci $f(a) = \pm a$. Relația $f(a)f(m) = am, \forall m \in M$ duce acum la $f = \pm \mathrm{Id}_M$. Rămâne doar $f = -\mathrm{Id}_M$, situație posibilă doar dacă $M \setminus \{0\}$ este formată din perechi de elemente opuse, de unde concluzia **4p**

2. La început, pe tablă este scris numărul 1 de 100 de ori. În fiecare minut, de pe tablă se șterge un număr a și în locul lui se scriu numerele $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$. Vom spune că un număr natural n este *persistent* dacă, după orice număr de minute și oricum s-ar alege, de fiecare dată, numărul care se șterge, pe tablă apar cel puțin n numere egale. Determinați cel mai mare număr persistent.

Soluție. Răspunsul este $p = 67$.

Arătăm că, după orice număr de minute, avem cel puțin un număr care apare de p de ori. Presupunând contrariul, reiese că pe tablă sunt scrise numerele $1, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3^n}$ de cel mult $p-1$ ori, deci, deoarece suma numerelor scrise este constantă,

$$100 \leqslant (p-1)\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) < 66 \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = 99$$

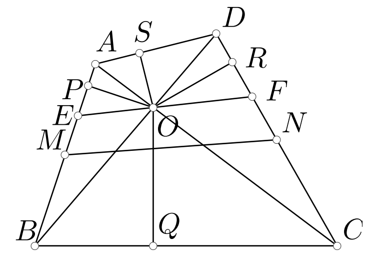
– fals **4p**

Un exemplu care arată că 68 nu este persistent este $100 \cdot 1 = 67 \cdot 1 + 67 \cdot \frac{1}{3} + 67 \cdot \frac{1}{9} + 67 \cdot \frac{1}{27} + 60 \cdot \frac{1}{81}$ ... **3p**

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex și P, Q, R, S proiecțiile intersecției O a diagonalelor sale la dreptele AB, BC, CD, respectiv DA. Arătați că

$$2(OP + OQ + OR + OS) \leqslant AB + BC + CD + DA.$$

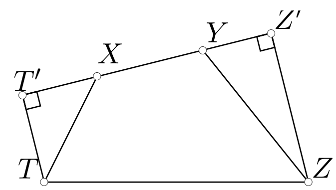
Soluție. Fie OE, OF bisectoarele unghiurilor AOB, respectiv COD. Atunci $OP + OR \leqslant OE + OF = EF$. Fie M, N mijloacele segmentelor AB, respectiv CD. Atunci $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$, deci $MN \leqslant \frac{1}{2}(BC + AD)$. Astfel, dacă arătăm că $EF \leqslant MN$ (*), obținem $OP + OR \leqslant OE + OF = EF \leqslant MN \leqslant \frac{1}{2}(BC + AD)$ și relația analoagă, de unde concluzia **4p**



Relația (*) reiese din:

Lema 1. Dacă OE, $E \in AB$ este bisectoarea $\angle AOB$ și M este mijlocul lui AB, atunci $\angle OEM \geqslant 90°$ (demonstrația este imediată).

Lema 2. Dacă $XYZT$ este un patrulater convex și $\angle X \geqslant 90°$, $\angle Y \geqslant 90°$, atunci $XY \leqslant ZT$ (vezi desen).



$$XY \leqslant T'Z' \leqslant TZ$$

.... **3p**

4. Dacă $N \geqslant 2$ este număr întreg și are descompunerea în factori primi distincți $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, definim

$$f(N) = 1 + p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_k a_k.$$

Pentru $m \geqslant 2$ număr întreg definim șirul

$$x_0 = m, \ x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}.$$

Arătați că, începând cu un anumit rang, șirul este periodic și determinați-i perioada principală.

Soluție. Se verifică imediat că, dacă $m \leqslant 6$, atunci $x_n = 6$ pentru $n \geqslant 5$.

De asemenea, dacă $m = 7$ atunci șirul este $7, 8, 7, 8, \ldots$ **1p**

Fie $N \geqslant 9$ un număr compus, $N = p_1 p_2 \ldots p_s$, cu $p_1, p_2, \ldots, p_s$ numere prime, nu neapărat distincte. Atunci $N - f(N) = p_1 p_2 \ldots p_s - p_1 - p_2 - \ldots - p_s - 1$. Din motive de monotonie în raport cu fiecare variabilă, funcția numerică definită prin $f(p_1, \ldots, p_s) = p_1 p_2 \ldots p_s - p_1 - p_2 - \ldots - p_s - 1$ pentru $p_1, \ldots, p_s \geqslant 2$ își atinge valoarea minimă pentru $p_1, p_2, \ldots, p_s$ având valoarea minimă posibilă. Astfel:

- dacă $s \geq 4$, atunci $N - f(N) \geqslant 2^s - 2s \geqslant 8$;

- dacă $s = 3$, atunci cel puțin un factor prim este $\geqslant 3$, iar $N - f(N) \geqslant 12 - 2 - 2 - 3 - 1 = 4$;

- dacă $s = 2$, atunci $p_1 = 2, p_2 \geqslant 5$ și $N - f(N) \geqslant 10 - 2 - 5 - 1 = 2$, sau $p_1, p_2 \geqslant 3$ și $N - f(N) \geqslant 9 - 3 - 3 - 1 = 2$.

Rezultă că, dacă $N \geqslant 9$ este număr compus, atunci $f(N) \leqslant N - 2$.

Deducem că, pentru $N \geqslant 9$:

- dacă N este prim, atunci $f(f(N)) = f(N+1) \leqslant N + 1 - 2 < N$;

- dacă N nu este prim, atunci $f(f(N)) \leqslant f(N) + 1 \leqslant N - 2 + 1 < N$. Astfel, în toate cazurile, $f(f(N)) < N$ **3p**

Observăm acum că, dacă $N \geqslant 7$, atunci $f(N) \geqslant 7$, deoarece:

- fie N este prim, deci $f(N) = N + 1 > 7$;

- fie $N = 2^3 \ldots$, deci $f(N) \geqslant 1 + 2 \cdot 3 = 7$;

- fie $N = 2^2 p_1 \ldots$, cu $p_1 \geqslant 3$, deci $f(N) \geqslant 1+4+3 = 8$;

- fie $N = 2p_1 \ldots$, cu $p_1 \geqslant 5$, deci $f(N) \geqslant 1+2+5 = 8$;

- fie $N = p_1 p_2 \ldots$, cu $p_1, p_2 \geqslant 3$ și $f(N) \geqslant 1 + 6 = 7$.

Rezultă că, pentru $m \geqslant 7$, toți termenii șirului sunt cel puțin 7. Vom arăta că, în acest caz, cel mai mic termen al șirului este 7 (deci, începând cu acest termen, vom avea perioada $7, 8$). Din $f(f(N)) < N$ pentru $N \geqslant 9$ rezultă că termenul minim al șirului nu poate fi $\geqslant 9$. Așadar, dacă $m \geqslant 7$, cel mai mic termen al șirului nu poate fi decât 7 sau 8. Dar, dacă un termen este 8, atunci următorul este 7, deci cel mai mic termen al șirului este 7 .... **2p**

În concluzie, dacă $m \leqslant 6$, atunci perioada este 6, iar dacă $m \geqslant 7$, atunci perioada este $7, 8$ **1p**