Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 6 iunie 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 1.
Arătaţi că pentru orice $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$ are loc inegalitatea:
$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geqslant \frac{7}{1+abc}.$$

Soluţie şi barem

(A) Avem $a + bc = a\,(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$ şi analoagele. Inegalitatea de demonstrat se rescrie:
$$\frac{1}{(a+b)(a+c)} + \frac{1}{(b+c)(b+a)} + \frac{1}{(c+a)(c+b)} \geqslant \frac{7}{1+abc},$$
sau, aducând la acelaşi numitor:
$$\frac{2\,(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant \frac{7}{1+abc},$$
adică $2 + 2abc \geqslant 7(a + b)(b + c)(c + a)$, **(1)** **2p**

(B) Având în vedere egalităţile:

$abc = (a + b + c)\,(ab+bc+ca) - (a+b)(b+c)(c+a) = ab+bc+ca - (a+b)(b+c)(c+a)$,

respectiv $2 + abc = 1 + (a + b + c) + abc = (1 + a)(1 + b)(1 + c) - (ab + bc + ca)$, prin însumare deducem că
$$2 + 2abc = (1 + a)(1 + b)(1 + c) - (a + b)(b + c)(c + a),$$
deci inegalitatea **(1)** este echivalentă cu

$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geqslant 8(a + b)(b + c)(c + a)$, **(2)** **3p**

(C) Deoarece $1+a = (a+b)+(c+a) \geqslant 2\sqrt{(a+b)(c+a)}$ şi analoagele, prin înmulţire se obţine concluzia **2p**

Soluţie alternativă şi barem

(A') Folosind inegalitatea Begström, obţinem:
$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{a+b+c+ab+bc+ca} = \frac{9}{1+ab+bc+ca},$$
deci este suficient să arătăm că $2 + 9abc \geqslant 7(ab + bc + ca)$, **(3)** **2p**

(B') Din inegalitatea lui Schur avem $a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant ab(a+b)+bc(c+b)+ca(c+a)$, ceea ce este echivalent cu
$$(a + b + c)^3 + 9abc \geqslant 4(a + b + c)(ab + bc + ca),$$
de unde rezultă că $1 + 9abc \geqslant 4(ab + bc + ca)$, **(4)** **4p**

(C') Având în vedere că $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$, obţinem $1 \geqslant 3(ab + bc + ca)$, inegalitate care, adunată cu **(4)**, conduce la **(3)**, ceea ce încheie soluţia **1p**

Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 6 iunie 2021

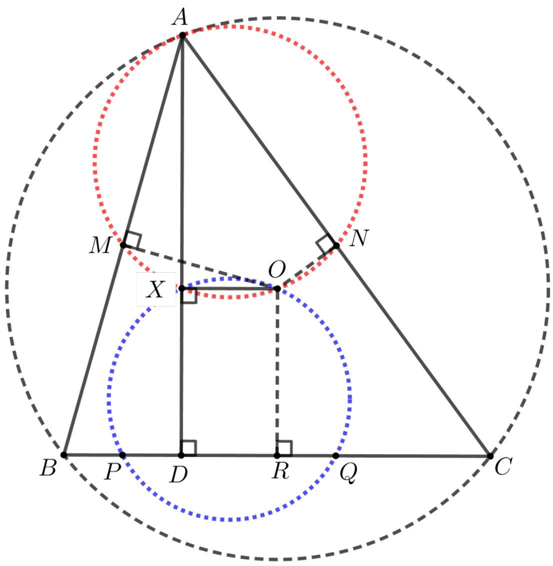
Barem şi schemă de corectare

Problema 2.

În triunghiul ascuţitunghic ABC se notează cu O centrul cercului circumscris şi cu D piciorul înălţimii din A.

Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor AB, AC, BD, respectiv CD. Arătaţi că unul dintre punctele de intersecţie ale cercurilor circumscrise triunghiurilor AMN şi POQ este situat pe înălţimea AD.

Soluţie şi barem.



(A) Fie ω_1 şi ω_2 cercurile circumscrise triunghiurilor AMN, respectiv POQ.

Deoarece $OM \perp AB$ şi $ON \perp AC$, patrulaterul $AMON$ este inscriptibil, iar AO este diametru în cercul ω_1 .... **1p**

(B) În plus, rezultă că O este unul dintre punctele de intersecţie ale cercurilor ω_1 şi ω_2.

Dacă $O \in AD$ (ceea ce revine la faptul că triunghiul ABC este isoscel), problema este rezolvată.

Dacă $O \notin AD$, fie X piciorul perpendicularei duse din O pe AD. Vom arăta că $X \in \omega_1 \cap \omega_2$.

Cum $OX \perp XA$, rezultă că $X \in \omega_1$ **3p**

(C) Notând cu R mijlocul lui BC, rezultă $OR \perp BC$, deci patrulaterul $ORDX$ este dreptunghi. Întrucât

$$PR = BR - BP = \frac{1}{2}(BC - BD) = \frac{1}{2}CD = DQ,$$

deducem că $OXPQ$ este trapez isoscel, deci $X \in \omega_2$ **3p**

Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 6 iunie 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 3.
Fie p, q numere naturale nenule. Pentru fiecare $a, b \in \mathbb{R}$ definim mulţimile

$$P(a) = \left\{ a_n = a + n \cdot \frac{1}{p} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad Q(b) = \left\{ b_n = b + n \cdot \frac{1}{q} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Numim *distanţa* de la $P(a)$ la $Q(b)$ valoarea minimă a diferenţei $|x - y|$, cu $x \in P(a)$, $y \in Q(b)$.

Determinaţi distanţa maximă între mulţimile $P(a)$ şi $Q(b)$, când a şi b parcurg mulţimea $\mathbb{R}$.

Soluţie şi barem.

Vom arăta că valoarea maximă a distanţei este egală cu $\dfrac{1}{2 \cdot [p, q]}$, unde $[p, q]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor p şi q.

(A) Dacă m şi n sunt două numere naturale, atunci

$$|a_m - b_n| = \left| a - b + \frac{m}{p} - \frac{n}{q} \right| = \left| (a - b) + \frac{mq_1 - np_1}{[p, q]} \right|,$$

unde $p = dp_1$, $q = dq_1$, $(p_1, q_1) = 1$.

Deoarece $(p_1, q_1) = 1$, există $k, l \in \mathbb{N}$ astfel încât $kq_1 - lp_1 = 1$. Prin urmare, pentru orice număr întreg t există $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_m - b_n| = \left| a - b + \dfrac{t}{[p, q]} \right|$. **3p**

(B) Fie s partea întreagă a numărului $x = [p, q] \cdot (a - b)$. Atunci:

$$\frac{s}{[p, q]} \leqslant a - b < \frac{s + 1}{[p, q]},$$

deci distanţa dintre $P(a)$ şi $Q(b)$ este cel mai mic dintre numerele $a - b - \dfrac{s}{[p, q]}$ şi $\dfrac{s + 1}{[p, q]} - (a - b)$. **3p**

(C) În consecinţă, maximul acestei distanţe se atinge când $a - b = \dfrac{1}{2[p, q]}$ şi este egal cu $\dfrac{1}{2[p, q]}$. **1p**

Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 6 iunie 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 4.

Fie M o mulţime formată din 13 numere naturale de trei cifre.

Arătaţi că există o submulţime nevidă $S \subset M$ şi o combinaţie de operaţii aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulţire, împărţire - fără a utiliza parantezele) între elementele lui S, astfel încât valoarea expresiei rezultate să fie un număr raţional din intervalul $(3,4)$.

Soluţie şi barem.

(A) Vom partiţiona mulţimea numerelor de trei cifre în 8 submulţimi disjuncte astfel încât pentru orice două numere a şi b din aceeaşi submulţime, cu $a > b$, să avem $\frac{a}{b} < \frac{4}{3}$.

Submulţimile sunt:

$A_1 = \{100, 101, \ldots, 133\}$, $A_2 = \{134, 135, \ldots, 178\}$, $A_3 = \{179, 180, \ldots, 238\}$,
$A_4 = \{239, 240, \ldots, 318\}$, $A_5 = \{319, 320, \ldots, 425\}$, $A_6 = \{426, 427, \ldots, 567\}$,
$A_7 = \{568, 569, \ldots, 757\}$, $A_8 = \{758, 759, \ldots, 999\}$ **3p**

(B) Cum M are 13 elemente, una dintre mulţimile A_i, cu $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ conţine cel puţin două elemente a, b din M, cu $a > b$, de unde $1 < \frac{a}{b} < \frac{4}{3}$. **2p**

(C) Dintre cele 11 numere rămase în $M \setminus \{a, b\}$, două dintre ele, fie acestea c, d, cu $c > d$, se află într-una dintre mulţimile A_j, $1 \leqslant j \leqslant 8$. Ca atare, $1 < \frac{c}{d} < \frac{4}{3}$.

Similar, există $e, f \in M \setminus \{a, b, c, d\}$, cu $e > f$, şi $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ astfel încât $e, f \in A_k$, deci $1 < \frac{e}{f} < \frac{4}{3}$.

Concluzia se obţine observând că $3 < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} < 4$. **2p**