Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 5 iunie 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 1.

Alina şi Bogdan scriu pe rând, începând cu Alina, un 0 sau un 1, până când fiecare a scris 2021 de cifre (fiecare adaugă o cifră la dreapta celor deja existente).

Alina este câştigătoare dacă reprezentarea zecimală a numărului obţinut (în baza 2) se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte; în caz contrar, câştigă Bogdan.

Stabiliţi care dintre cei doi are o strategie de câştig.

Soluţie şi barem.

(A) Deoarece restul obţinut prin împărţirea unui pătrat perfect la 4 poate fi 0 sau 1, dacă $N \equiv 3 \pmod 4$, atunci N nu poate fi scris ca suma a două pătrate perfecte.

(B) Dacă reprezentarea binară a unui număr natural N se termină cu doi de 1 şi un număr par de 0, atunci N nu poate fi scris ca sumă de 2 pătrate perfecte.

Într-adevăr, fie $N = \overline{a_1a_2\ldots a_t11\underbrace{00\ldots0}_{2p \text{ ori}}}_{(2)}$ şi $m = \overline{a_1a_2\ldots a_t}_{(2)}$. Atunci:

$$N = m \cdot 2^{2p+2} + 2^{2p+1} + 2^{2p} = 4^p \cdot (4m+3).$$

Dacă $p = 0$, atunci $N \equiv 3 \pmod 4$, care nu poate fi scris ca sumă de 2 pătrate perfecte.

Dacă $p \geqslant 1$, presupunând că există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $N = x^2 + y^2$, atunci x şi y ar fi numere pare. Considerând $x = 2x_1$ şi $y = 2y_1$, ar rezulta $x_1^2 + y_1^2 = 4^{p-1} \cdot (4m+3)$. Similar, dacă $p - 1 \geqslant 1$, continuând raţionamentul, deducem că există $x_p, y_p \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_p^2 + y_p^2 = 4m + 3$, contradicţie, deci N nu se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. **3p**

Arătăm că, indiferent de mutările Alinei, Bogdan are o strategie câştigătoare.

(C) Dacă Alina scrie la un moment dat un 1, atunci Bogdan scrie şi el imediat un 1, iar apoi repetă la fiecare pas cifra Alinei, iar concluzia rezultă din **(B)** **2p**

(D) Dacă Alina scrie doar zerouri, atunci Bogdan scrie peste tot zerouri, cu excepţia ultimelor 3 cifre, pe care le alege egale cu 1. Se obţine astfel $10101_{(2)} = 21$, care nu se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. **2p**

Observaţii.

(1) Pentru **(A)** se acordă **0p**.

(2) Nu se acordă niciun punct pentru analiza unor cazuri particulare.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 5 iunie 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 2.

Pentru orice submulţime nevidă X a mulţimii $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$, notăm cu a_X suma dintre cel mai mare şi cel mai mic element al mulţimii X.

Determinaţi media aritmetică a tuturor numerelor a_X obţinute.

Soluţie şi barem.

Vom calcula separat suma elementelor minime ale tuturor submulţimilor $X \subset M$ şi suma elementelor maxime.

(A) Numărul $k \in \{1, 2, \ldots, 2020\}$ este element minim pentru toate mulţimile de forma $X = \{k\} \cup S$, unde S este o submulţime oarecare a mulţimii $\{k+1, k+2, ..., 2021\}$, care are $2021 - (k+1) + 1 = 2021 - k$ elemente.

Aşadar, k este element minim pentru 2^{2021-k} submulţimi. Cum 2021 este element minim pentru o singură submulţime, suma elementelor minime ale submulţimilor $X \subset M$ este:

$$S_{\min} = 1 \cdot 2^{2020} + 2 \cdot 2^{2019} + 3 \cdot 2^{2018} + ... + 2019 \cdot 2^2 + 2020 \cdot 2^1 + 2021.$$

.... **3p**

(B) Analog, $k \in \{2, 3, \ldots, 2021\}$ este element maxim pentru orice mulţime $X = \{k\} \cup S$, unde $S \subset \{1, 2, \ldots, k-1\}$, deci este element maxim pentru 2^{k-1} submulţimi. Cum 1 este element maxim pentru o singură submulţime, rezultă că suma elementelor maxime ale submulţimilor $X \subset M$ este:

$$S_{\max} = 1 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 2019 \cdot 2^{2018} + 2020 \cdot 2^{2019} + 2021 \cdot 2^{2020}.$$

.... **3p**

Ca urmare, suma tuturor numerelor a_X este:

$$\begin{aligned} S_{\min} + S_{\max} &= (2021+1) + (2020+2) \cdot 2^1 + (2019+3) \cdot 2^2 + ... + (1+2021) \cdot 2^{2020} = \\ &= 2022 \cdot \left(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2020}\right) = 2022 \cdot \left(2^{2021} - 1\right). \end{aligned}$$

Întrucât M are $2^{2021} - 1$ submulţimi nevide, rezultă că media aritmetică a tuturor numerelor a_X este 2022. .... **1p**

Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 5 iunie 2021

Barem şi schemă de corectare

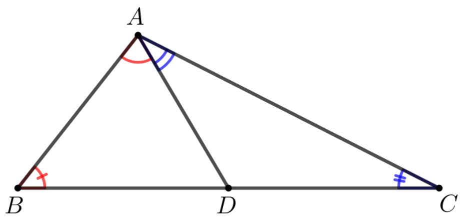
Problema 3.

Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care unghiurile A şi C nu sunt ascuţite. Pe laturile AB, BC, CD şi DA se iau punctele K, L, M, respectiv N. Demonstraţi că perimetrul patrulaterului $KLMN$ este cel puţin egal cu dublul lungimii diagonalei AC.

Soluţie şi barem.

(A) Vom demonstra mai întâi un rezultat ajutător:

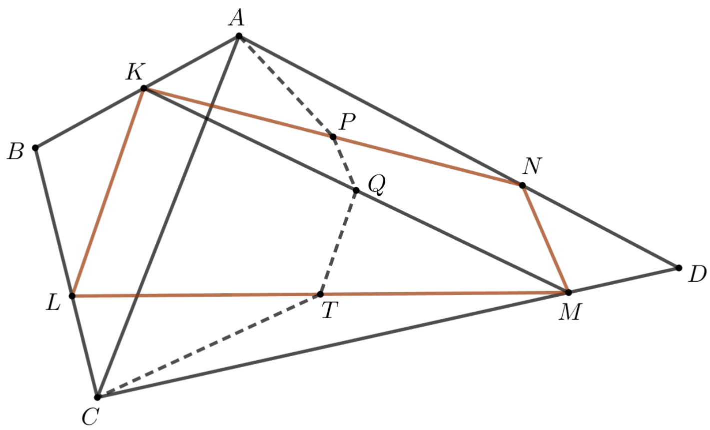
Lemă. Într-un triunghi ABC, cu $m(\sphericalangle A) \geqslant 90°$, lungimea medianei din A este cel mult egală cu jumătate din lungimea laturii BC.



Demonstraţie. Deoarece $m(\sphericalangle BAC) \geqslant 90°$, rezultă că:

$$m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) \leqslant m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle CAD).$$

În consecinţă, are loc cel puţin una dintre inegalităţile $m(\sphericalangle ABD) \leqslant m(\sphericalangle BAD)$ sau $m(\sphericalangle ACD) \leqslant m(\sphericalangle CAD)$. Ca urmare, $AD \leqslant BD$ sau $AD \leqslant CD$, deci $AD \leqslant \dfrac{BC}{2}$ .. **2p**



(B) Fie P, Q, T mijloacele segmentelor KN, KM, LM.

PQ este linie mijlocie în triunghiul KNM şi TQ este linie mijlocie în triunghiul MKL. Ca urmare:

$$AC \leqslant AP + PQ + QT + TC \leqslant \frac{KN}{2} + \frac{MN}{2} + \frac{KL}{2} + \frac{ML}{2},$$

de unde rezultă că $P_{KLMN} \geqslant 2AC$ **5p**

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 5 iunie 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 4.

Arătaţi că, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, există un multiplu m al său, nenul, cu următoarele proprietăţi:
a) $m < n^4$;
b) în scrierea lui m în baza 10 se folosesc cel mult patru cifre distincte.

Soluţie şi barem.
Pentru orice număr natural n există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$.

(A) Dacă $k \leqslant 6$, atunci $n < 2^6 = 64$ şi numărul $2n$ verifică condiţiile din enunţ. (conţine cel mult trei cifre).

(B) Fie $k > 6$. Notăm cu M mulţimea tuturor numerelor naturale care conţin cel mult k cifre numai de 0 şi 1. Atunci mulţimea M are 2^k elemente şi deoarece $2^k > n$ rezultă că există în M două numere a şi b, $a > b$, a căror diferenţă se divide prin n. **3p**

(C) Din structura numerelor a şi b rezultă că numărul $a - b$ poate avea doar cifrele $0, 1, 8$ sau 9. .... **2p**

(D) În plus,

$$a - b < a < 10^k = 10 \cdot 10^{k-1} < 1,6^5 \cdot 10^{k-1} < 1,6^{k-1} \cdot 10^{k-1} = 16^{k-1} = (2^{k-1})^4 < n^4.$$

Deci, numărul $a - b$ verifică concluzia problemei. **2p**

Observaţie.
(1) Pentru tratarea exclusivă a secţiunii **(A)** sau pentru tratarea unor cazuri triviale (de exemplu, $n \leqslant 9999$) se acordă **0 p**.