



Societatea de Științe Matematice din România



**Al doilea test de selecție pentru OBMJ  
București, 5 iunie 2021**

**Problema 1.**

Alina și Bogdan scriu pe rând, începând cu Alina, un 0 sau un 1, până când fiecare a scris 2021 de cifre (fiecare adaugă o cifră la dreapta celor deja existente).

Alina este câștigătoare dacă reprezentarea zecimală a numărului obținut (în baza 2) se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte; în caz contrar, câștigă Bogdan.

Stabiliți care dintre cei doi are o strategie de câștig.

**Problema 2.**

Pentru orice submulțime nevidă  $X$  a mulțimii  $M = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$ , notăm cu  $a_X$  suma dintre cel mai mare și cel mai mic element al mulțimii  $X$ .

Determinați media aritmetică a tuturor numerelor  $a_X$  obținute.

**Problema 3.**

Se consideră patrulaterul convex  $ABCD$  în care unghiurile  $A$  și  $C$  nu sunt ascuțite. Pe laturile  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  și  $DA$  se iau punctele  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , respectiv  $N$ . Demonstrați că perimetrul patrulaterului  $KLMN$  este cel puțin egal cu dublul lungimii diagonalei  $AC$ .

**Problema 4.**

Arătați că, pentru orice număr natural  $n \geq 2$ , există un multiplu  $m$  al său, nenul, cu următoarele proprietăți:

- $m < n^4$ ;
- în scrierea lui  $m$  în baza 10 se folosesc cel mult patru cifre distincte.

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă valorează 7 puncte.*