Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Baraj 1 seniori - 15 mai 2021

Soluţii-Bareme

Problema 1.

Fie $k > 1$ un număr natural. O mulţime S de numere naturale se numeşte *bună* dacă există o colorare a tuturor numerelor naturale nenule, cu k culori, astfel încât niciun element din S nu este suma a două numere naturale distincte având aceleaşi culori. Găsiţi cel mai mare număr natural nenul t pentru care mulţimea

$$S = \{a+1, a+2, a+3, \dots, a+t\}$$

este bună, pentru fiecare număr natural nenul a.

Soluţie.
Arătăm că numărul căutat este $t = 2k - 2$.

Considerăm mulţimea $S = \{3, 4, 5, \dots, 2k+1\}$. Suma oricăror două numere distincte dintre $1, 2, \dots, k+1$ este în S. Printre acestea există cel puţin două care au aceeaşi culoare şi, deci, S nu este bună. Cum cardinalul lui S este $2k-1$, deducem că $t \leq 2k-2$. **3p**

Rămâne să arătăm că mulţimea $S = \{a+1, a+2, a+3, \dots, a+(2k-2)\}$ este bună pentru toate numerele naturale nenule a.

(i) Considerăm cazul a impar. Colorăm numerele $1, 2, \dots, \frac{a+1}{2}$ cu prima culoare. Fiecare dintre numerele $\frac{a+2s-1}{2}$ pentru $s = 2, 3, \dots, (k-1)$ se colorează cu culoarea s. Numerele mai mari sau egale decât $\frac{a+2k-1}{2}$ se colorează cu culoarea k. Se verifică uşor că suma oricăror două numere distincte având aceeaşi culoare nu este un element din S. **2p**

(ii) Considerăm cazul a par. Colorăm numerele $1, 2, \dots, \frac{a}{2}$ cu prima culoare. Fiecare dintre numerele $\frac{a+2s-2}{2}$ pentru $s = 2, 3, \dots, (k-1)$ se colorează cu culoarea s. Numerele mai mari sau egale decât $\frac{a+2k-2}{2}$ se colorează cu culoarea k. Se verifică uşor că suma oricăror două numere distincte având aceeaşi culoare nu este un element din S. **2p**

Problema 2.

Pentru fiecare număr natural nenul $n > 1$, notăm cu $p(n)$ cel mai mare factor prim al lui n. Determinaţi toate tripletele x, y, z de numere naturale nenule distincte care satisfac simultan condiţiile:

(1) x, y, z sunt în progresie aritmetică;
(2) $p(xyz) \leq 3$.

Soluţie.
Putem presupune (fără a restrânge generalitatea) că $x \leq y \leq z$. Din condiţia a doua rezultă că singurele numere prime care divid produsul xyz sunt 2 şi 3 şi deci numerele x, y şi z sunt de forma $2^a 3^b$, pentru a, b numere naturale. Fie $h = \text{cmmdc}(x, y)$ şi considerăm problema redusă pentru $x' = \frac{x}{h}, y' = \frac{y}{h}$ şi $z' = \frac{z}{h}$. Atunci

(1) x', y', z' sunt numere naturale nenule (h divide pe z deoarece $z = 2y - x$) şi satisfac ambele condiţii din enunţ;
(2) $\text{cmmdc}(x', y') = 1$, $\text{cmmdc}(y', z') = 1$ şi $\text{cmmdc}(x', z')$ este 1 sau 2.

. . . . **1p**

Dacă y' se divide (în acelaşi timp) cu 2 şi cu 3 atunci rezultă că x' şi z' sunt ambele egale cu 1, contrazicând faptul că x, y, z sunt distincte. Avem trei cazuri:

(i) $y' = 1$ implică $x' = z' = 1$ contrazicând faptul că x, y, z sunt distincte.

(ii) $y' = 2^a$, $a > 0$. Deoarece x' şi z' sunt coprime cu y' rezultă că $x' = 3^k$ şi $z' = 3^l$. Avem $3^k + 3^l = 2^{a+1}$ şi, deoarece $l \geq k$, 3^k divide 2^{a+1}, de unde $k = 0$ şi deci $x' = 1$.

Avem $3^l = 2^{a+1} - 1$. Deoarece $2^{a+1} \equiv 1 \pmod 3$, rezultă că a este impar ($a = 2n - 1$). Atunci $3^l = 2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$. Dar $\text{cmmdc}(2^n - 1, 2^n + 1) \leq 2$. Deoarece ambele trebuie să fie puteri ale lui 3, deducem că $2^n - 1 = 3^0 = 1$. Deci $n = 1$, de unde rezultă $a = 1$, $x' = 1$, $y' = 2$, $z' = 3$. **3p**

(iii) $y' = 3^a$, $a > 0$. Folosim un argument similar. Fie $x' = 2^k$ şi $z' = 2^l$. Avem $2^k + 2^l = 2 \cdot 3^a$ de unde $2^{k-1} + 2^{l-1} = 3^a$.

Ca mai sus $k - 1 = 0$, deci $k = 1$, $x' = 2$. Deci $2^{l-1} = 3^a - 1$. Acest lucru nu este posibil dacă $l = 1$.

Dacă $l > 2$ atunci:

$$2^{l-2} = \frac{3^a - 1}{2} = \sum_{r=0}^{a-1} 3^r \equiv \sum_{r=0}^{a-1} 1^r = a \equiv 0 \bmod 2$$

şi deci a este număr par, să zicem $a = 2n$. Ca mai înainte $2^{l-1} = (3^n - 1)(3^n + 1)$, de unde $3^n - 1 = 2$, $3^n + 1 = 4$, adică $n = 1$ şi deci $x' = 2$, $y' = 9$, $z' = 16$.

Dacă $l = 2$, atunci $x' = 2$, $y' = 3$, $z' = 4$. **3p**

Soluţiile sunt $(x, y, z) = (h, 2h, 3h)$, $(2h, 3h, 4h)$ sau $(2h, 9h, 16h)$ unde h este un număr natural de forma $2^a 3^b$.

Observaţie: Nu se acordă puncte pentru "ghicirea" răspunsurilor fără raţionamente. Dacă soluţiile nu sunt date în forma lor generală, în funcţie de metoda de rezolvare, se vor scădea puncte.

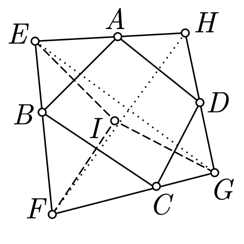
Problema 3.

Bisectoarele exterioare ale unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$ se taie în E, F, G, H, astfel încât $A \in EH$, $B \in EF$, $C \in FG$, $D \in GH$. Se ştie că perpendicularele din E pe AB, din F pe BC şi din G pe CD sunt concurente. Arătaţi că $ABCD$ este patrulater inscriptibil.

Soluţie.

Notând cu o singură literă unghiurile patrulaterelor $ABCD$ şi $EFGH$, avem $\angle E = \pi - \angle EAB - \angle EBA = \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle A) - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle B) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ şi analoagele, deci $\angle E + \angle G = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = \pi$, ceea ce arată că $EFGH$ este înscris într-un cerc $\mathcal{C}$ **1p**

Fie I punctul de concurenţă a perpendicularelor. Atunci $\angle IEF = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}B) = \angle IFE$, de unde $IE = IF$; analog $IF = IG$, deci I este centrul cercului $\mathcal{C}$ **1p**



Folosind $\mathcal{C}$ rezultă $IH = IE$, de unde $\angle AHI = \angle AEI = \frac{1}{2}A$, ceea ce arată că $HI \perp AD$. Apoi $\angle BFH = \frac{1}{2}\angle EIH = 90° - \frac{1}{2}\angle A = \angle EAB$, deci $ABFH$ este inscriptibil. **2p**

Finalizare 1. Rezultă $EA \cdot EH = EB \cdot EF$ şi analoagele, de unde obţinem prin adunare $EF^2 + GH^2 = FG^2 + HE^2$. Aceasta arată că $EG \perp FH$. Deducem relaţia $\angle HIG + \angle EIF = 2\angle HEG + 2\angle EHF = 180°$, de unde $\angle HIG = \angle ABC$. Analog $\angle EIF = \angle ADC$, de unde concluzia **3p**

Finalizare 2. Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $EFGH$ este dreptunghi **1p**

Dacă $ABCD$ nu este paralelogram, atunci există, de exemplu, $\{T\} = AB \cap FH$. Folosind Menelaus reiese că T, C, D sunt coliniare. Folosind acum inscriptibiltatea patrulaterelor $ABFH$ şi $DCFH$ obţinem $TA \cdot TB = TH \cdot TF = TD \cdot TC$, ceea ce arată că $ABCD$ este inscriptibil **2p**

Observaţie. Dacă (din cauza vitezei ?!?) se ia ca ipoteză concurenţa tuturor celor 4 perpendiculare duse din E, F, G, H şi problema este rezolvată ,,bine" mai departe, **se scad 2p**.

Problema 4.

Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac relaţia

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluţie.

Fie $E(x, y)$ ecuaţia funcţională. Vom nota cu $\equiv$ o egalitate valabilă pentru orice valoare reală dată variabilei/variabilelor.

1. Din $E(1, y)$ obţinem $f(f(y)-f(1)) \equiv y+2f(1)$. Deoarece funcţia $y \mapsto y+2f(1)$ este bijectivă, deducem că funcţia $y \mapsto f(y)$ este surjectivă.

2. Există, deci, un număr real t cu proprietatea $f(t) = 0$. Din $E(t, 0)$ obţinem $f(tf(0)) = 0$, deci $tf(0) = t$. Dacă $t = 0$ (i.e. $f(0) = 0$), atunci $E(x, 0)$ implică $f(-f(x)) \equiv 2f(x) = -2(-f(x))$. Din surjectivitate reiese $f(x) \equiv -2x$, care nu este soluţie. Aşadar, $f(0) = 1$.

3. Din $E(0, 0)$ obţinem $f(-1) = 2$. Din $E(t, t)$ avem $f(0) = t^2$, deci $t = \pm 1$. Cum $f(-1) = 2$, rămâne doar $t = 1$, i.e. $f(1) = 0$.

4. Din $E(1, y)$ obţinem $f(f(y)) \equiv y$.

Astfel, din $E(f(x), 1)$ rezultă $f(-x) \equiv 2x + f(x)$, iar din $E(-1, f(x))$ deducem $f(-x-2) \equiv 4 - f(x)$, care duce la $2(x+2) + f(x+2) \equiv 4 - f(x)$, sau $f(x) + f(x+2) \equiv -2x$. Din ultima relaţie rezultă $f(x+2) + f(x+4) \equiv -2x - 4$, de unde $f(x+4) \equiv f(x) - 4$.

5. Din $E(x, f(y))$ avem $f(xy - f(x)) \equiv 2f(x) + xf(y)$, iar din $E(x, f(y+4))$ rezultă $f(xy + 4x - f(x)) \equiv 2f(x) + xf(y) - 4x$. Astfel,

$$f(xy + 4x - f(x)) \equiv f(xy - f(x)) - 4x.$$

Luând $y = \frac{f(x)}{x}$ obţinem $f(4x) = 1 - 4x$ pentru orice $x \neq 0$, iar aceasta este evident adevărat şi pentru $x = 0$.

Rezultă $f(x) \equiv 1 - x$, funcţie care verifică ecuaţia.

Barem

$f(0) = 1$ **2p**

$f(1) = 0$ **1p**

$f(x) \equiv 1 - x$ **4p**

Observaţie. Nu se acordă nimic pentru precizarea unei soluţii, dar se scade un punct dacă se ,,uită" verificarea faptului că $f(x) \equiv 1 - x$ convine.