



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Barajul 1, 15 mai 2021

Subiecte – seniori

Problema 1.

Fie $k > 1$ un număr natural. O mulțime S de numere naturale se numește *bună* dacă există o colorare a tuturor numerelor naturale nenule, cu k culori, astfel încât niciun element din S nu este suma a două numere naturale distincte având aceleași culori. Găsiți cel mai mare număr natural nenul t pentru care mulțimea

$$S = \{a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + t\}$$

este bună, pentru fiecare număr natural nenul a .

Problema 2.

Pentru fiecare număr natural nenul $n > 1$, notăm cu $p(n)$ cel mai mare factor prim al lui n . Determinați toate tripletele x, y, z de numere naturale nenule distincte care satisfac simultan condițiile:

- (1) x, y, z sunt în progresie aritmetică;
- (2) $p(xyz) \leq 3$.

Problema 3.

Bisectoarele exterioare ale unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$ se taie în E, F, G, H , astfel încât $A \in EH$, $B \in EF$, $C \in FG$, $D \in GH$. Se știe că perpendicularele din E pe AB , din F pe BC și din G pe CD sunt concurente. Arătați că $ABCD$ este patrulater inscriptibil.

Problema 4.

Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac relația

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$