Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Primul test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 15 mai 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 1. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Aflaţi valoarea maximă a celui mai mic dintre numerele:

$$a_1 - a_1a_2,\ a_2 - a_2a_3, \ldots, a_n - a_na_1.$$

Soluţie şi barem.
(A) Notăm cu $b_1 = a_1(1-a_2)$, $b_2 = a_2(1-a_3), \ldots,$ $b_n = a_n(1-a_1)$. Cum $a_i \in [0,1]$, pentru orice $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, obţinem $b_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Deoarece $b_1b_2\cdots b_n = a_1(1-a_1)a_2(1-a_2)\cdots a_n(1-a_n)$ şi $a_i(1-a_i) \leq \frac{1}{4}$, $\forall i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, rezultă că $b_1b_2\cdots b_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. **4p**

(B) Dacă $\min\limits_{i=\overline{1,n}} b_i > \frac{1}{4}$ obţinem o contradicţie, deci există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $b_i \leq \frac{1}{4}$. Prin urmare $\min\limits_{i=\overline{1,n}} b_i \leq \frac{1}{4}$. **2p**

(C) Valoarea maximă a lui $\min\limits_{i=\overline{1,n}} b_i$ este $\frac{1}{4}$ şi se obţine pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}$. **1p**

Soluţie alternativă şi barem.
(A') Notăm cu $b_1 = a_1(1-a_2)$, $b_2 = a_2(1-a_3), \ldots,$ $b_n = a_n(1-a_1)$. Cum $a_i \in [0,1]$, pentru orice $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, obţinem $b_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aplicând inegalitatea mediilor obţinem: $\sqrt{b_1} \leq \frac{a_1 + 1 - a_2}{2}, \ldots, \sqrt{b_n} \leq \frac{a_n + 1 - a_1}{2}$, $(*)$. Adunând relaţiile, rezultă $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{b_i} \leq \frac{n}{2}$. **4p**

(B') Dacă $\min\limits_{i=\overline{1,n}} \sqrt{b_i} > \frac{1}{2}$ obţinem o contradicţie, deci există $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $\sqrt{b_i} \leq \frac{1}{2}$. Prin urmare $\min\limits_{i=\overline{1,n}} b_i \leq \frac{1}{4}$. **2p**

(C) Valoarea maximă a lui $\min\limits_{i=\overline{1,n}} b_i$ este $\frac{1}{4}$ şi se obţine pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}$. **1p**

Observaţii

(O1) Pentru scrierea inegalităţii AM-GM în forma $(*)$ se acordă **1p** din cele 4 aferente **(A')**.

(O2) Pentru precizarea maximului, fără justificare (sau, la **(C)**, fără precizarea valorilor a_i pentru care se atinge maximul), se acordă **0p**.

(O3) La secţiunile **(A)**/**(A')**, lipsa afirmaţiei $b_i \geq 0$, respectiv aplicarea inegalităţii mediilor, fără a preciza că $1 - a_i \geq 0$, se penalizează cu **1p** (o singură depunctare).

Similar, se depunctează cu **1p** situaţiile în care se aplică (se înmulţesc etc.) inegalităţi care funcţionează doar între numere pozitive, fără justificarea pozitivităţii numerelor.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Primul test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 15 mai 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 2. Aflaţi numerele întregi pozitive x, y cu proprietatea că $x \leq y$, astfel încât
$$\frac{(x+y)(xy-1)}{xy+1} = p,$$
unde p este un număr prim.

Soluţie şi barem.

(A) Din $\dfrac{(x+y)(xy-1)}{xy+1} = p$ rezultă că $p(xy+1) = (x+y)(xy-1)$ $(*)$ şi cum p este prim, rezultă că $p|x+y$ sau $p|xy-1$. **1p**

(B) Cazul I. Dacă $p|x+y$, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x+y = kp$. Înlocuind în $(*)$ obţinem $k(xy-1) = xy+1$ (şi implicit $k \neq 1$), de unde $xy = \dfrac{k+1}{k-1} = 1 + \dfrac{2}{k-1}$. Cum $xy \in \mathbb{Z}$ obţinem că $k-1|2$, de unde $k=2$ sau $k=3$ şi $xy=3$, respectiv $xy=2$.

Dacă $xy=2$ atunci $k=2$ şi obţinem $p=1$, contradicţie cu p prim.

Dacă $xy=3$ atunci $k=3$ şi obţinem $x=1$, $y=3$ (şi $p=2$). **2p**

(C) Cazul II. Cum $p|xy-1$ rezultă că există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $xy-1 = tp$ (1). Înlocuind în $(*)$ obţinem $xy+1 = t(x+y)$, de unde $tp+2 = t(x+y)$ şi implicit $t(x+y-p) = 2$. Avem 2 cazuri:

1) $t=1$ şi $x+y-p=2$. Înlocuind t şi p în (1) obţinem $(x-1)(y-1)=0$, de unde $x=1$ sau $y=1$.

Pentru $x=1$ obţinem că $y=p+1$, soluţie a problemei pentru orice număr prim p.

Pentru $y=1$ obţinem $x=p+1$, contradicţie cu $x \leq y$.

2) $t=2$ şi $x+y-p=1$. Înlocuind t şi p în (1) obţinem $(x-2)(y-2)=3$, de unde rezultă $x=3$, $y=5$ şi $p=7$.

În concluzie, din cele 2 cazuri rezultă că soluţiile problemei sunt $x=1$, $y=p+1$ pentru orice prim p şi $x=3$, $y=5$. **4p**

Observaţii

(O1) Pentru scrierea soluţiilor problemei, fără justificare, se acordă **0p**.

(O2) Pentru ratarea oricărei soluţii (din cele 2) se scade **1p**.

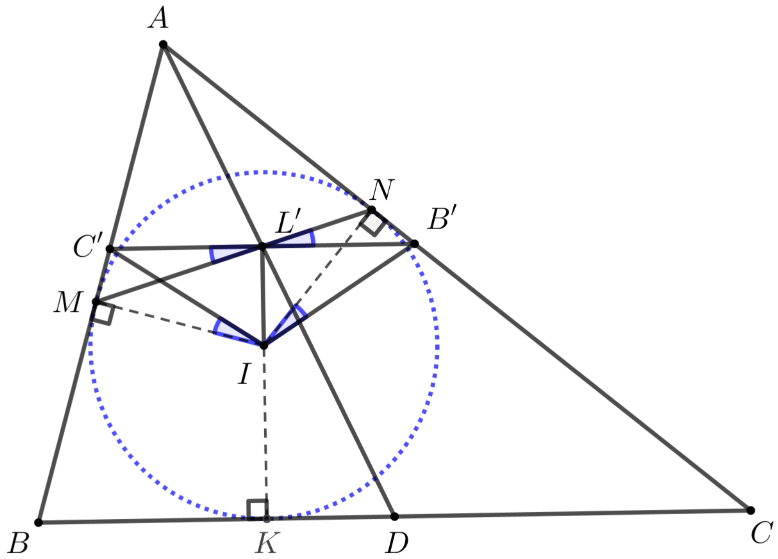
Primul test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 15 mai 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 3. Cercul de centru I, înscris în triunghiul ABC, este tangent laturilor AB, AC şi BC în punctele M, N şi respectiv K. Mediana AD a triunghiului ABC intersectează MN în punctul L. Demonstraţi că punctele K, I şi L sunt coliniare.

Soluţie şi barem.

Dacă $AB = AC$, concluzia este evidentă. Studiem în continuare cazul $AB \neq AC$.



(A) Notăm $KI \cap MN = \{L'\}$. Construim prin L' dreapta $B'C'$ paralelă cu BC, unde $B' \in AC$ şi $C' \in AB$. Deoarece $KI \perp BC$, deducem că $IL' \perp BC$ **2p**

(B) Cum $m(\sphericalangle IMC') + m(\sphericalangle IL'C') = 180°$, rezultă că patrulaterul $IMC'L'$ este inscriptibil, de unde $\sphericalangle MIC' \equiv \sphericalangle ML'C'$. Analog obţinem $\sphericalangle NIB' \equiv \sphericalangle NL'B'$. Dar $\sphericalangle ML'C' \equiv \sphericalangle NL'B'$ (opuse la vârf), deci $\sphericalangle MIC' \equiv \sphericalangle NIB'$ **1p**

(C) Cum $[IM] \equiv [IN]$, $m(\sphericalangle IMC') = m(\sphericalangle INB') = 90°$ şi $\sphericalangle MIC' \equiv \sphericalangle NIB'$, rezultă că $\Delta IMC' \equiv \Delta INB'$, deci $[IC'] \equiv [IB']$. Ca urmare, triunghiul $IB'C'$ este isoscel, şi, cum IL' este înălţime, rezultă că L' este mijlocul lui $[B'C']$.

Întrucât $B'C' \parallel BC$ şi L' este mijlocul lui $[B'C']$, rezultă că L' aparţine medianei $[AD]$. Aşadar, punctele L şi L' coincid, deci K, I şi L sunt coliniare **4p**

Observaţii

(O1) Pentru definirea punctului L', urmat de consideraţii sterile se acordă **1p**.
Acest punct nu se cumulează cu cele **2p** acordate în secţiunea **A**.

(O2) Pentru calcule trigonometrice care nu conduc la rezultate semnificative pentru rezolvarea problemei se acordă **0p**.

Primul test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 15 mai 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Pe o tablă $n \times n$ se aşază n turnuri astfel încât să nu existe două care să se atace. Toate turnurile se mişcă simultan o dată şi au voie să se mişte doar într-un pătrat adiacent celui în care se află.

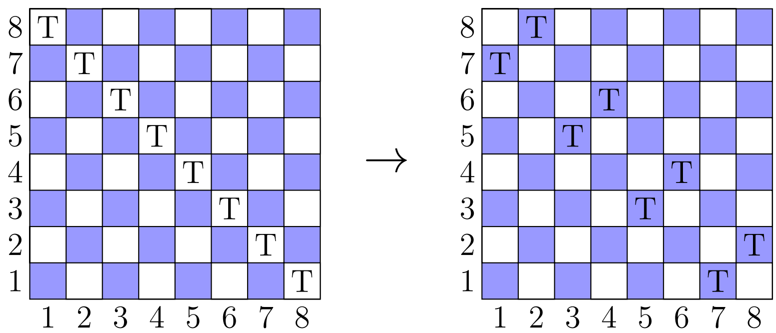
Determinaţi toate valorile lui n pentru care există o aşezare a turnurilor astfel încât, după o mutare, turnurile, în continuare, să nu se atace.

Notă: Două pătrăţele sunt adiacente dacă au o latură comună.

Soluţie şi barem.

Vom demonstra că doar numerele pare verifică condiţiile problemei.

(A) Pentru $n = 2k$ plasăm turnurile pe diagonala principală (vezi exemplul din tabla din stânga jos) şi după o mutare turnurile se aşază astfel: cele de pe liniile indexate cu numere impare se mută la dreapta, iar cele de pe linii pare se mută la stânga (vezi exemplul din tabla din dreapta jos); în noua configuraţie oricare două turnuri nu se atacă. **2p**



Vom demonstra mai departe că pentru $n = 2k + 1$, indiferent de poziţionarea iniţială a turnurilor astfel încât oricare două să nu se atace, după o mutare, există cel puţin două turnuri care se atacă.

Pentru a demonstra acest lucru indexăm fiecare din cele n^2 pătrăţele ale tablei după perechea (i, j), unde i reprezintă indicele liniei, iar j indicele coloanei pe care se găseşte pătrăţelul (de exemplu, în figura din stânga sus, T-ul din colţul din dreapta jos se găseşte în pătrăţelul $(1, 8)$).

Presupunem prin reducere la absurd că există o poziţionare iniţială a turnurilor astfel încât oricare două să nu se atace, iar după o mutare oricare două turnuri nu se atacă. Notăm cu (i_1, j_1), $(i_2, j_2), \ldots$, (i_n, j_n) indicii celor n pătrăţele în care se găsesc cele n turnuri în configuraţia iniţială.

(B) După o mutare, turnul din pătrăţelul (i, j) poate ajunge doar într-unul din cele patru pătrăţele $(i \pm 1, j)$, $(i, j \pm 1)$. Prin urmare, după o mutare, paritatea sumei indicilor pătrăţelului în care se găseşte turnul se schimbă. **2p**

(C) Dacă oricare două turnuri nu se atacă atunci:

$$\{i_1, \ldots, i_n\} = \{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\},$$

ceea ce implică faptul că suma tuturor indicilor pătrăţelelor în care se găsesc turnurile este

$$(1) \qquad (i_1 + j_1) + \ldots + (i_n + j_n) = (i_1 + \ldots + i_n) + (j_1 + \ldots + j_n) = 2(1 + \ldots + n),$$

adică un număr par. **1p**

(D) Ulterior, după o mutare, cum fiecare termen $i_k + j_k$ al sumei iniţiale (1) îşi schimbă paritatea transformându-se ori în $i_k + j_k - 1$ ori $i_k + j_k + 1$. Deoarece n este impar, rezultă că suma noilor indici este impară, contradicţie cu faptul că, în configuraţia finală, oricare două turnuri nu se atacă, deci suma indicilor este pară **2p**

Observaţii

(O1) Pentru rezolvarea problemei pe cazuri particulare/table mici se acordă **0p**.

(O2) Pentru scrierea doar a faptului că turnurile nu se atacă două câte două înseamnă că avem câte un turn pe fiecare linie şi coloană se acordă **0p**.

(O3) Pentru scrierea doar a faptului că un turn se mută din pătratul (i, j) în pătratul $(i \pm 1, j)$ sau $(i, j \pm 1)$ (vezi **(B)**) se acordă **0p**.

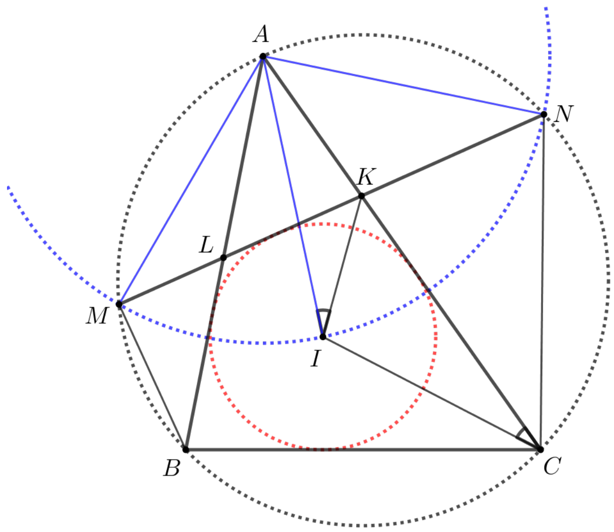
(O4) Pentru încercarea de a demonstra cazul impar folosind un argument de paritate care duce la o soluţie se acordă **1p** din cele **5p**.

Primul test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 15 mai 2021

Barem şi schemă de corectare

Problema 5. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Cercul de centru A şi rază AI intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M şi N.
Demonstraţi că dreapta MN este tangentă la cercul înscris în triunghiul ABC.

Soluţie şi barem.
Notăm $m(\sphericalangle BAC) = 2\alpha$, $m(\sphericalangle ABC) = 2\beta$, $m(\sphericalangle ACB) = 2\gamma$, $\{L\} = AB \cap MN$, $\{K\} = AC \cap MN$.



(A) Cum $AM = AN$, rezultă $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM$, iar folosind faptul că punctele A, M, C, N sunt conciclice, obţinem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle AKN) &= m(\sphericalangle MAK) + m(\sphericalangle AMK) = m(\sphericalangle MAC) + m(\sphericalangle AMN) = \\ &= m(\sphericalangle MNC) + m(\sphericalangle ANM) = m(\sphericalangle ANC). \end{aligned}$$

Obţinem $\Delta AKN \sim \Delta ANC$, de unde $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AK}{AN}$, sau $AN^2 = AC \cdot AK$ **2p**

(B) Cum $AI = AN$, rezultă $\dfrac{AI}{AK} = \dfrac{AC}{AI}$, deci $\Delta AIC \sim \Delta AKI$. Atunci $m(\sphericalangle AKI) = m(\sphericalangle AIC) = 180° - (\alpha + \gamma)$, iar $m(\sphericalangle IKC) = 180° - m(\sphericalangle AKI) = \alpha + \gamma$ **1p**

(C) Întrucât $m(\sphericalangle AKL) = \dfrac{1}{2}\left(m(\overset{\frown}{AM}) + m(\overset{\frown}{CN})\right) = \dfrac{1}{2}\left(m(\overset{\frown}{AN}) + m(\overset{\frown}{CN})\right) = \dfrac{1}{2}m(\overset{\frown}{AC}) = m(\sphericalangle ABC) = 2\beta$, rezultă că

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle IKL) &= 180° - m(\sphericalangle AKL) - m(\sphericalangle IKC) = 180° - m(\sphericalangle ABC) - (\alpha + \gamma) = \\ &= 180° - 2\beta - (\alpha + \gamma) = \alpha + \gamma = m(\sphericalangle IKC), \end{aligned}$$

deci $(KI$ este bisectoarea unghiului CKL **3p**

(D) Aşadar, distanţa de la I la dreapta KL este egală cu distanţa de la I la AC, adică este raza cercului înscris în triunghiul ABC. În consecinţă, dreapta MN (care coincide cu dreapta KL) este tangentă la cercul înscris în triunghiul ABC **1p**

Observaţii.

O1. Cum $AN^2 = AC \cdot AK$ şi $AM^2 = AB \cdot AL$ (relaţie care se obţine demonstrând că $\Delta ALM \sim \Delta AMB$), rezultă că $AC \cdot AK = AB \cdot AL$, deci patrulaterul $BCKL$ este inscriptibil.

Pentru acest rezultat, folosit pentru a arăta că $m(\sphericalangle AKL) = m(\sphericalangle ABC) = 2\beta$, se acordă **1p**.