



Societatea de Științe Matematice din România



**Primul test de selecție pentru OBMJ
București, 15 mai 2021**

Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$. Aflați valoarea maximă a celui mai mic dintre numerele:

$$a_1 - a_1a_2, a_2 - a_2a_3, \dots, a_n - a_na_1.$$

Problema 2.

Aflați numerele naturale nenule x, y cu proprietatea că $x \leq y$, astfel încât

$$\frac{(x+y)(xy-1)}{xy+1} = p,$$

unde p este un număr prim.

Problema 3.

Cercul de centru I , înscris în triunghiul ABC , este tangent laturilor AB, AC și BC în punctele M, N și respectiv K . Mediana AD a triunghiului ABC intersectează MN în punctul L . Demonstrați că punctele K, I și L sunt coliniare.

Problema 4.

Fie $n \geq 2$ un număr natural. Pe o tablă $n \times n$ se așază n turnuri astfel încât să nu existe două care să se atace. Toate turnurile se mișcă simultan o dată și au voie să se miște doar într-un pătrat adiacent celui în care se află.

Determinați toate valorile lui n pentru care există o așezare a turnurilor astfel încât, după o mutare, turnurile, în continuare, să nu se atace.

Notă: Două pătrățele sunt adiacente dacă au o latură comună.

Problema 5.

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Cercul de centru A și rază AI intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M și N .

Demonstrați că dreapta MN este tangentă la cercul înscris în triunghiul ABC .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă valorează 7 puncte.