



Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Subiect Etapa I
Satu Mare – 27 februarie 2021
Clasa a XII-a



Timp de lucru: 150 minute.

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Pe \mathbb{R} definim legea de compoziție asociativă $x * y = 4(x - 1)(y - 1) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Valoarea expresiei $E = (-2021) * (-2020) * \dots * 2020 * 2021$ este:

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

2. Pe $G = (1, 3)$ definim legea de compoziție $x * y = \frac{2xy - 3(x+y) + 6}{xy - 2(x+y) + 5}, \forall x, y \in G$.

Elementul neutru al legii este:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. Produsul tuturor elementelor nenule din inelul Z_{2021} este:

A. $\hat{0}$ B. $\hat{1}$ C. $\hat{2}$ D. $\widehat{2020}$

4. Produsul tuturor elementelor inversabile din inelul Z_8 este:

A. $\hat{0}$ B. $\hat{1}$ C. $\hat{3}$ D. $\hat{5}$

5. Considerăm sistemul $\begin{cases} \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{1} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$ în inelul Z_5 . Valoarea expresiei $E = x^2 + y^2$ este:

A. $\hat{0}$ B. $\hat{1}$ C. $\hat{2}$ D. $\hat{3}$

6. Valoarea integralei $I = \int_1^e x^3 \ln x dx$ este:

A. e^4 B. $\frac{3e^4 - 1}{4}$ C. $\frac{3e^4 - 1}{16}$ D. $\frac{3e^4 + 1}{16}$

7. Valoarea integralei $I = \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} dx$ este:

A. 1 B. 2 C. $\ln 3$ D. $\ln 4$

8. Valoarea integralei $I = \int_{-3}^3 \frac{e^{x^4} \cdot x^3}{\sqrt{1+x^8}} dx$ este:

A. 0 B. 1 C. e D. $2e$



Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Subiect Etapa I
Satu Mare – 27 februarie 2021
Clasa a XII-a



9. Valoarea integralei $I = \int_0^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{5-x}} dx$ este:
A. 0 B. 1 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{5}{2}$

10. Fie funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x^4)$. Valoarea integralei $I = \int_0^1 f''(x) dx$ este:
A. 1 B. 2 C. $\ln 2$ D. $2\ln 2$

11. Valoarea integralei $I = \int_0^1 (1+3x^3)e^{x^3} dx$ este:
A. 0 B. 1 C. e D. $4e$

12. Valoarea integralei $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{(\ln x)^{2021}}{x^2+x+1} dx$ este:
A. 0 B. 1 C. $\ln 2$ D. $2\ln 2$

Problemele 13-14 se referă la următorul enunț:

Pe \mathbb{R} definim legea de compoziție $x * y = xy + ax + 2by, \forall x, y \in \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

13. Legea „ $*$ ” este comutativă dacă și numai dacă:

A. $a = 2b$ B. $b = 2a$ C. $a = 4b$ D. $b = 5a$

14. Legea „ $*$ ” este comutativă și asociativă dacă și numai dacă:

A. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ D. Alt răspuns

Problemele 15-16 se referă la următorul enunț:

Fie funcția $f: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4x-3}} \arctg \sqrt{\frac{4x-3}{3}}, \forall x \in [1,3]$.



Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Subiect Etapa I
Satu Mare – 27 februarie 2021
Clasa a XII-a



15. O primitivă a funcției f este funcția $F: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

A. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\arctg \sqrt{\frac{4x-3}{3}})^2$ B. $F(x) = \arctg \sqrt{\frac{4x-3}{3}}.$

C. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \sqrt{\frac{4x-3}{3}}$ D. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4x-3}{3}}$

16. Valoarea integralei $I = \int_1^3 f(x)dx$ este:

A. 1 B. $\frac{\pi^2}{4}$ C. $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{36}$

Problemele 17-18 se referă la următorul enunț:

Fie funcția $f: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, $\forall x \in [1,2]$.

17. Valoarea integralei $I = \int_1^2 f^2(x)dx$ este:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

18. Valoarea integralei $I = \int_1^2 f(x)dx$ este:

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 4

19. Valoarea integralei $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2} dx$ este:

A. $\frac{1}{2\pi}$ B. $\frac{3}{2\pi}$ C. $\frac{1}{\pi}$ D. $\frac{3}{\pi}$

20. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x) \cdot f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Valoarea integralei $I = \int_a^b \frac{1}{1+f(2x-a-b)} dx$ este:

A. $b-a$ B. $2(b-a)$ C. $\frac{b+a}{2}$ D. $\frac{b-a}{2}$