Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Subiect Etapa I
Satu Mare – 27 februarie 2021
Clasa a X-a

Timp de lucru: 150 minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

Problemele 1 – 2 se referă la următorul enunț:

Fie $a = \log_2 3$

1.Numărul a aparține mulțimii:

A.N **B.**Q **C.**R-Q **D.**Z

2. Partea întreagă a numărului a este egală cu:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Problemele 3 – 5 se referă la următorul enunț:

Fie expresia $E(x)=(2^x+sin^2u)(2^{-x}+sin^2u)$, unde x,u∈R.

3. $E(x)$ este egală cu:

A. $1+(2^x+\frac{1}{2^x})sin^2u+sin^4u$ B. $(2^x+\frac{1}{2^x})sin^2u+sin^4u$ C. $(2^x+\frac{1}{2^x})sin^2u$ D. $2^x+\frac{1}{2^x}$

4. Minimul expresiei $2^x+\frac{1}{2^x}$este:

A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

5. Oricare ar fi x,u∈R, are loc inegalitatea:

A. $\sqrt{E(x)} \geq 1+sin^2u$ B. $\sqrt{E(x)} < 1+sin^2u$ C. $\sqrt{E(x)} \leq sin^2u$ D. $\sqrt{E(x)} \geq 4$

6. Numărul a^b cu a și b numere iraționale poate fi natural dacă

A. $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$ B. $a=\sqrt{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $a=\sqrt{2}$, $b=\log_2 3$ D. $a=\sqrt{2}$, $b=\log_{\sqrt{2}} 3$

7. Numărul $n \in N$, $n \geq 2$ pentru care expresia $E_n = \frac{2^{\lg 2} \cdot 3^{\lg 3} \cdot \ldots \cdot n^{\lg n}}{n!}$ ia valoarea minimă este

A. 2 B. 3 C. 8 D. 9

8. În mulțimea N a numerelor naturale ecuația $29^x+17^y=22^z$:

A. nu are soluții B. are o unică soluție C. are cel puțin patru soluții D. are o infinitate de soluții

9. Se consideră funcția $f:R\to R$ definită prin egalitatea $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$, atunci:

A. f este pară B. f este impară C. $f(R)=[-3,1]$ D. f este injectivă

10. Se consideră $A=\left\{x\in R\ \middle|\ \sqrt{x^2+\sqrt{2x+10}}-\sqrt{x^2+1}+1=0\right\}$ și p numărul elementelor mulțimii A.

Atunci p este:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. Soluția ecuației $\sqrt{2-x^2}+\sqrt[3]{3-x^3}=0$ este:

A. $\varnothing$ B. R C. Z D. $\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$

12. Fie a și b numere reale pozitive, astfel încât $4(lg\ a)^2+(lg\ b)^2=1$. Cea mai mare valoare posibilă a lui a pentru care are loc relația de mai sus este

A. a=5 B. a=$\sqrt{10}$ C. a=$\frac{1}{\sqrt{10}}$ D. a=10

13. Se consideră numerele $a=\dfrac{\sin 1}{\sin 2}$, $b=\dfrac{\sin\frac{3}{2}}{\sin\frac{5}{2}}$, $c=\dfrac{\sin 2}{\sin 3}$, atunci:

A. $a<c<b$ B. $c<b<a$ C. $a<b<c$ D. $b<a<c$

14. Fie ΔABC de laturi *a, b, c* și măsurile unghiurilor în radiani. Dacă $\alpha=\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}$, atunci:

A. $\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ B. $\alpha\geq\dfrac{\pi}{2}$ C. $\dfrac{\pi}{3}\leq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ D. $\alpha>\pi$

15. Fie $M=\left\{z\in C\ \middle|\ |z+i|=|z-2i|=\sqrt{3}\right\}$. Atunci suma modulelor elementelor mulțimii M este:

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Subiect Etapa I
Satu Mare – 27 februarie 2021
Clasa a X-a

16. Câte soluții reale are ecuația $2^{\sqrt{x-2}}+2^{\sqrt{x^2-4}}=2$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

17. Fie punctele *M*, *N*, *P*, *Q* având afixele $z_M=5+6i$, $z_N=5i$, $z_P=1$, $z_Q=6+i$. Care din afirmațiile următoare este adevărată:

A. $m(\angle MNP)=\frac{\pi}{4}$ B. $m(\angle MPQ)=\frac{\pi}{3}$ C. $PM=PN=PQ$ D. $MNPQ$ este pătrat

18. Funcția $f:R\to R$ cu proprietatea că $(f\circ f)(x)=3x-2$, $\forall x\in R$ este:

A. $\frac{1}{3x}$ B. $2x$ C. $2x-3$ D. bijectivă

19. Valoarea lui $\cos x$ care verifică ecuația $2\sin^2 2x-2\sin x\cdot\sin 3x=4\cos x+\cos 2x$ este:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

20. Numărul $a=[\log_2 20]+[\log_3 30]+[\log_4 40]$ este:

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9