

Olimpiada Națională "Gazeta Matematică"

ETAPA I – Maramureș & Sălaj
20.02.2021

clasa a XII-a

1. item1-gr1-1

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = -\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{12}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $x * y = a(x - b)(y - b) + b, \forall x, y \in \mathbb{R}$, atunci

- $a + b = \frac{1}{6}$ ✓
- $a + b = -\frac{5}{6}$
- $a + b = \frac{5}{6}$
- $a + b = -\frac{2}{3}$

2. item1-gr1-1

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = -\frac{1}{2}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{18}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $x * y = a(x - b)(y - b) + b, \forall x, y \in \mathbb{R}$, atunci

- $a + b = -\frac{1}{6}$ ✓
- $a + b = -\frac{5}{6}$
- $a + b = \frac{5}{6}$
- $a + b = \frac{1}{6}$

3. item2-gr2-1

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea

$$x * y = -\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{12}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă mulțimea $M \subseteq \mathbb{R}$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " $*$ ", atunci

- $M = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ✓
- $M = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$
- $M = \mathbb{Z}$
- $M = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

4. item2-gr2-2

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea

$$x * y = -\frac{1}{2}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{18}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă mulțimea $M \subseteq \mathbb{R}$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " $*$ ", atunci

- $M = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ ✓
- $M = \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$
- $M = \mathbb{Z}$
- $M = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

5. item3-gr3-1

Fie legea de compoziție internă pe \mathbb{R} definită prin

$$x * y = xy + ax + 2by, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Dacă legea " $*$ " este asociativă și comutativă, atunci

- $a + b = \frac{3}{2}$ ✓
- $a + b = 2$
- $a + b = 0$
- $a + b = 6$

6. item3-gr3-1

Fie legea de compoziție internă pe \mathbb{R} definită prin

$$x * y = xy + 2ax + 2by, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Dacă legea " $*$ " este asociativă și comutativă, atunci

- $a + b = \frac{3}{2}$
- $a + b = 2$
- $a + b = 0$
- $a + b = 1$ ✓

7. item4-gr4-1

Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = \begin{cases} 2|x+2| + 1, & x \leq 1 \\ 2x + a, & x > 1 \end{cases},$$

admite primitive, atunci

- $a = 5$ ✓
- $a = 2$
- $a = 10$
- $a \in \emptyset$

8. **item4-gr4-2**

Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = \begin{cases} 3|x+3| + 1, & x \leq 1 \\ 3x + a, & x > 1 \end{cases},$$

admite primitive, atunci

- $a = 5$
- $a = 2$
- $a = 10$ ✓
- $a \in \emptyset$

9. **item5-gr5-1**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = -\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{12}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Simetricul elementului 2 în raport cu legea " $*$ " este

- $\frac{13}{2}$ ✓
- $\frac{5}{2}$
- $\frac{41}{15}$
- $-\frac{15}{22}$

10. **item5-gr5-2**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = -\frac{1}{2}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{18}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Simetricul elementului 2 în raport cu legea " $*$ " este

- $\frac{41}{15}$ ✓
- $\frac{5}{2}$
- $\frac{2}{13}$
- $-\frac{2}{22}$

11. **item6-gr1-1**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea

$$x * y = -\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{12}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suma soluțiilor reale ale ecuației $x * x * x * x * x = x$ este

- $\frac{3}{2}$ ✓
- $\frac{5}{2}$

- $\frac{11}{2}$
- $-\frac{2}{22}$

12. **item6-gr1-2**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea

$$x * y = -\frac{1}{2}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{18}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suma soluțiilor reale ale ecuației $x * x * x * x * x = x$ este

- 1 ✓
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{3}{2}$
- $\frac{2}{5}$

13. **item7-gr2-1**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea

$$x * y = -\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{12}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $G = (-\infty, \frac{1}{2})$ și funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = ax + b$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , atunci

- $a + b + \frac{1}{6} = 0$ ✓
- $a + b = 1$
- $a + b = \frac{1}{2}$
- $a + b + \frac{1}{3} = 0$

14. **item7-gr2-2**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea

$$x * y = -\frac{1}{2}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{18}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $G = (-\infty, \frac{1}{3})$ și funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = ax + b$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , atunci

- $a + b + \frac{1}{3} = 0$ ✓
- $a + b = 1$
- $a + b = \frac{1}{2}$
- $a + b + \frac{1}{6} = 0$

15. **item8-gr3-1**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea

$$x * y = 2xy + 2x + 2y + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Numărul real a pentru care $x * a = a * x = a, \forall x \in \mathbb{R}$ este:

- $a = -1$ ✓
- $a = 1$
- $a = -\frac{1}{2}$
- $a = 2$

16. **item8-gr3-2**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea

$$x * y = 3xy - 3x - 3y + 4, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Numărul real a pentru care $x * a = a * x = a, \forall x \in \mathbb{R}$ este:

- $a = 1$ ✓
- $a = -1$
- $a = -\frac{1}{2}$
- $a = 2$

17. **item9-gr4-1**

Fie p un număr prim și (G, \cdot) un grup de ordin p . Atunci suma ordinelor tuturor elementelor din grupul G este:

- $p^2 - p + 1$ ✓
- p^2
- $p^2 - 1$
- p^{p-1}

18. **item9-gr4-2**

Fie p un număr prim și (G, \cdot) un grup de ordin p . Atunci produsul ordinelor tuturor elementelor din grupul G este:

- p^{p-1} ✓
- p^2
- $p^2 - p + 1$
- $p^2 - 1$

19. **item10-gr5-1**

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție derivabilă cu derivata continuă. Dacă

$$I = \int_0^1 \frac{(2021f(x) + f'(x)) e^{2021x}}{f(x) \cdot e^{2021x} + 1} dx,$$

atunci:

- $I = 2021 + \ln \frac{f(1) + e^{-2021}}{f(0) + 1}$ ✓
- $I = 2021$
- $I = \ln \frac{f(1) + e^{-2021}}{f(0) + 1}$
- $I = f(1) - f(0)$

20. **item10-gr5-2**

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție derivabilă cu derivata continuă. Dacă

$$I = \int_0^1 \frac{(\sqrt{2021}f(x) + f'(x)) e^{\sqrt{2021}x}}{f(x) \cdot e^{\sqrt{2021}x} + 1} dx,$$

atunci:

- $I = \sqrt{2021} + \ln \frac{f(1) + e^{-\sqrt{2021}}}{f(0) + 1}$ ✓
- $I = \sqrt{2021}$
- $I = \ln \frac{f(1) + e^{-\sqrt{2021}}}{f(0) + 1}$
- $I = f(1) - f(0)$

21. **item11-gr6-1**

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și F o primitivă a sa. Dacă $F(x) = x - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ și $F(0) = 0$, atunci

- $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$ ✓
- $f(1) = 1$
- $f(1) = \frac{1-e}{e}$
- $f(1) = 2 - \frac{1}{e}$

22. **item11-gr6-2**

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și F o primitivă a sa. Dacă $F(x) + x + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și $F(0) = 0$, atunci

- $f(1) = \frac{1-e}{e}$ ✓
- $f(1) = 1$
- $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$
- $f(1) = 2 - \frac{1}{e}$

23. **item12-gr7-1**

Valoarea integralei $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$ este

- $\frac{1}{3}$ ✓
- 0
- $\frac{1}{2}$
- 1

24. **item12-gr7-2**

Valoarea integralei $\int_{-1}^1 \frac{x^{2020}}{2^x + 1} dx$ este

- $\frac{1}{2021}$ ✓
- $\frac{0}{2020}$
- $\frac{2021}{\ln 2}$
- $\frac{2021}{2021}$

25. **item13-gr8-1**

Dacă F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = e^{x^4}$, atunci

- F nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$ ✓
- F are un punct de extrem
- F admite o asimptotă oblică spre $+\infty$
- F este strict descrescătoare

26. **item13-gr8-2**

Dacă F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = e^{-x^4}$, atunci

- F este strict crescătoare ✓
- F are un punct de extrem
- F admite o asimptotă oblică spre $+\infty$
- F nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$

27. **item14-gr9-1**

Dacă $I = \int_{-1}^{\cos 0} \frac{x^3}{x^2 + \cos x + 1} dx$, atunci

- $I = 0$ ✓
- $I = 1$
- $I = \frac{1}{2}$
- $I = \frac{1}{\cos 1}$

28. **item14-gr9-2**

Dacă $\int_{-1}^1 \frac{\arctg x}{x^4 + 1} dx$, atunci

- $I = 0$ ✓
- $I = \frac{1}{\pi}$
- $I = \frac{\pi}{2}$
- $I = \frac{\pi}{4}$

29. **item15-gr10-1**

Fie $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, o lege de compoziție pe \mathbb{R} . Dacă $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ este grup, atunci

- $a = 2$ ✓
- $a + 2 = 0$

- $2a = 1$
- $a = 0$

30. **item15-gr10-2**

Fie $x * y = xy + 2x + 2y + 2$, o lege de compoziție pe \mathbb{R} . Dacă $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ este grup, atunci

- $a + 2 = 0$ ✓
- $a = 2$
- $2a = 1$
- $a = 0$

31. **item16-GM-1**

Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și F o primitivă a sa, cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) F^2(x) = 9$, atunci

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sqrt[3]{x^2} = 1$ ✓
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sqrt[3]{x^2} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sqrt[3]{x^2} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sqrt[3]{x^2} = 9$

32. **item17-GM-2**

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă și

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx,$$

atunci

- $L = 0$ ✓
- $L = b - a$
- $L = \int_a^b f(x) dx$
- $L = \infty$

33. **item18-GM-3**

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și G o mulțime formată din 20 de matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, care formează o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor. Dacă mulțimea G conține cel puțin o matrice de rang 1, atunci numărul tuturor matricelor de rang 1 din grupul G este:

- 20 ✓
- 1
- 2
- 19

34. **item19-GM-4**

Dacă $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este primitiva funcției

$$f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ cu } f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

pentru care $F(0) = 1$, atunci

- $F(1) = \ln(2\sqrt{e})$ ✓
- $F(1) = \ln 2 + \frac{1}{3}$
- $F(1) = \frac{1}{2}$
- $F(1) = \ln(3\sqrt{e})$

35. **item20-GM-5**

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea

$$f(x) \cdot f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2 \cos^2 x + 1)(1 + f(x))} dx$$

atunci:

- $18I = \pi\sqrt{3}$ ✓
- $6I = \pi\sqrt{3}$
- $9I = \pi\sqrt{3}$
- $I = 0$