

Olimpiada Națională "Gazeta Matematică"

ETAPA I – Maramureș & Sălaj
20.02.2021

clasa a X-a

1. item1-S1-1

Dacă $a = \log_5 2$ și $b = \log_{25} 10$, atunci

- $b = \frac{a+1}{2}$ ✓
- $b = a+1$
- $b = \frac{a+2}{2}$
- $b = a+2$

2. item1-S1-2

Dacă $a = \log_2 5$ și $b = \log_{25} 10$, atunci

- $b = \frac{a+1}{2a}$ ✓
- $b = a+2$
- $b = \frac{a+1}{2}$
- $b = \frac{a+2}{2}$

3. item2-S2-1

Dacă S este mulțimea soluțiilor ecuației

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 2$$

atunci

- $S = \emptyset$ ✓
- $|S| = 2$
- $1 \in S$
- $|S| \geq 3$

4. item2-S2-2

Dacă S este mulțimea soluțiilor ecuației

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 5,$$

atunci

- $S = \{9\}$ ✓
- $|S| = 2$
- $S = \emptyset$
- $|S| \geq 3$

5. **item3-S3-1**

Dacă S este mulțimea soluțiilor inecuației

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-2x} < \left(\frac{27}{8}\right)^{x+5},$$

atunci

- $S = (-16, +\infty)$ ✓
- $S = \{1\}$
- $S = (0, 1)$
- $S = (-\infty, 1]$

6. **item3-S3-2**

Dacă S este mulțimea soluțiilor inecuației

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-5} \leq \left(\frac{27}{8}\right)^{x+5},$$

atunci

- $S = [-2, +\infty)$ ✓
- $S = \{1\}$
- $S = (0, 1)$
- $S = (-16, +\infty)$

7. **item4-S4-1**

Partea întreagă a numărului

$$A = \sqrt{\log_3 2021}$$

este:

- $[A] = 2$ ✓
- $[A] = 5$
- $[A] = 3$
- $[A] = 4$

8. **item4-S4-2**

Partea întreagă a numărului

$$A = \sqrt[3]{\log_3 2021}$$

este:

- $[A] = 1$ ✓
- $[A] = 2$
- $[A] = 3$
- $[A] = 4$

9. **item5-S5-1**

Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = x^3 + 3x + 2021$ este o funcție bijectivă, atunci

- $f^{-1}(2025) = 1$ ✓
- $f^{-1}(2025) = 0$
- $f^{-1}(2025) = 2021$

- $f^{-1}(2025)$ nu există

10. **item5-S5-2**

Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = x^3 + 3x + 2021$ este o funcție bijectivă, atunci

- $f^{-1}(2021) = 0$ ✓
- $f^{-1}(2021) = 1$
- $f^{-1}(2021) = 2021$
- $f^{-1}(2021)$ nu există

11. **item6-S6-1**

Mulțimea soluțiilor ecuației

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

este

- $S = (-\infty, -1] \cup \{1\}$ ✓
- $S = \{-1, 1\}$
- $S = \{0\}$
- $S = \emptyset$

12. **item6-S6-2**

Mulțimea soluțiilor inecuației

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \leq 0$$

este

- $S = (-\infty, -1] \cup \{1\}$ ✓
- $S = \{-1, 1\}$
- $S = \{0\}$
- $S = \emptyset$

13. **item7-S7-1**

Mulțimea soluțiilor inecuației

$$\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{2x - 5}$$

este:

- $S = \left[\frac{5}{2}, 3\right)$ ✓
- $S = (3, +\infty)$
- $S = (-10, 3)$
- $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

14. **item7-S7-2**

Mulțimea soluțiilor inecuației

$$\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} \leq \sqrt{2x - 5}$$

este:

- (a) $S = [3, +\infty)$ ✓
- (b) $S = \left[\frac{5}{2}, 3\right)$
- (c) $S = (-10, 3)$
- (d) $S = (1, +\infty)$

15. **item8-S8-1**

Mulțimea soluțiilor ecuației

$$\log_x (x^2 + 2x) + \log_{x^2} (x + 2) = 4$$

este:

- $S = \{2\}$ ✓
- $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
- $S = \{4\}$
- $S = \{3, 4\}$

16. **item8-S8-2**

Mulțimea soluțiilor ecuației

$$\log_{x^2} (x^2 + 2x) + \log_x (x + 2) = 3, 5$$

este:

- $S = \{2\}$ ✓
- $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
- $S = \{4\}$
- $S = \{3, 4\}$

17. **item9-S9-1**

Dacă $a = \log_5 3 - \frac{2}{3}$, atunci

- $a > 0$ ✓
- $a < 0$
- $a = 0$
- $a \in \mathbb{Q}$

18. **item-S9-2**

Dacă $a = \log_3 5 - \frac{3}{2}$, atunci

- $a < 0$ ✓
- $a > 0$
- $a = 0$
- $a \in \mathbb{Q}$

19. **item10-S10-1**

Dacă $a = \lg (23 + 3\sqrt{5})$ și $b = \lg^2 (15 + \sqrt{5})$, atunci

- $a < b$ ✓
- $b < a$

- $b = 2a - 1$
- $b = a + 1$

20. **item10-S10-2**

Dacă $a = \lg(6 + \sqrt{35})$ și $b = \lg^2(5 + \sqrt{35})$, atunci

- $a < b$ ✓
- $b < a$
- $b = 2a - 1$
- $b = a + 1$

21. **item12-S11-1**

Dacă a, b sunt numere reale strict pozitive și $4(\lg a)^2 + (\lg b)^2 = 1$, atunci cea mai mare valoare posibilă a lui a este

- $\sqrt{10}$ ✓
- 1
- 10
- altă valoare

22. **item11-S11-2**

Dacă a, b sunt numere reale strict pozitive și $9(\lg a)^2 + (\lg b)^2 = 1$, atunci cea mai mare valoare posibilă a lui a este

- $\sqrt[3]{10}$ ✓
- 1
- 10
- altă valoare

23. **item12-S12-1**

Soluția ecuației

$$(3 + 2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2} + 1)^x = 3$$

este

- $S = \left\{ \frac{1}{\log_3(\sqrt{2} + 1)} \right\}$ ✓
- $S = \{-2, \log_{\sqrt{2}+1} 3\}$
- $S = \{-3\}$
- $S = \emptyset$

24. **item12-S12-2**

Soluția ecuației

$$(4 + 2\sqrt{3})^x - 2(\sqrt{3} + 1)^x = 3$$

este

- $S = \left\{ \frac{1}{\log_3(\sqrt{3} + 1)} \right\}$ ✓
- $S = \{-2, \log_{\sqrt{3}+1} 3\}$
- $S = \{-2\}$
- $S = \emptyset$

25. **item13-S13**

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă M este mulțimea perechilor $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pentru care imaginea funcției este $Im_f = [-3, 1]$, atunci

- $M = \{(-2\sqrt{3}, -2), (2\sqrt{3}, -2)\}$ ✓
- $M = \{(-2\sqrt{3}, -2), (2\sqrt{3}, 2)\}$
- $M = \{(-2\sqrt{3}, -2)\}$
- $M = \{(2\sqrt{3}, 2)\}$

26. **item13-S13-2**

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă M este mulțimea perechilor $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pentru care imaginea funcției este $Im_f = [-1, 2]$, atunci

- $M = \{(-2\sqrt{2}, 1), (2\sqrt{2}, 1)\}$ ✓
- $M = \{(-2\sqrt{2}, -1), (2\sqrt{2}, 1)\}$
- $M = \{(-2\sqrt{2}, -1)\}$
- $M = \{(2\sqrt{2}, 1)\}$

27. **item14-S14-1**

Fie funcția bijectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = 5x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $k \in \mathbb{Z}$, atunci

- $f(k) = \frac{5k}{2}$ ✓
- $f(k) = 0$
- $f(k) = \frac{5k}{3}$
- $f(k) = 5$

28. **item-S14-2**

Fie funcția bijectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = 7x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $k \in \mathbb{Z}$, atunci

- $f(k) = \frac{7k}{2}$ ✓
- $f(k) = 0$
- $f(k) = \frac{7k}{3}$
- $f(k) = 7$

29. **item-S15-1**

Fie funcția bijectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = 5x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

- $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x^2$ ✓

- $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x$
- $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x^3$
- $f^{-1}(x) \cdot f(x) = \frac{5x^2}{2}$

30. **item15-S15-1**

Fie funcția bijectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = 7x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

- $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x^2 \quad \checkmark$
- $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x$
- $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x^3$
- $f^{-1}(x) \cdot f(x) = \frac{7x^2}{2}$

31. **item16-S16**

Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$[\lg x] = \lg[x],$$

unde $x \in (0, +\infty)$ este:

- $S = [10^k, 10^k + 1), k \in \mathbb{N} \quad \checkmark$
- $S = \{1\}$
- $S = \{10^k | k \in \mathbb{N}\}$
- $S = [1, 10]$

32. **item17-S17**

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x+y) = f(x) \cdot \cos y + f(y) \cdot \cos x, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $a = f(0)$, atunci

- $a = 0 \quad \checkmark$
- $a + 1 = 0$
- $2a = \pi$
- $a = 2\pi$

33. **item18-S18**

Dacă pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are loc relația

$$f(x+y) = f(x) \cdot \cos y + f(y) \cdot \cos x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

atunci

- $f(x) = \alpha \sin x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, cu $\alpha \in \mathbb{R} \quad \checkmark$
- $f(x) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \sin 2x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$

34. **item19-S19**

Dacă S este mulțimea soluțiilor ecuației

$$2^{x^2-3x+3} = \log_x(3x-2), \text{ cu } x > 1,$$

atunci

- $2 \in S$ ✓
- $3 \in S$
- $1 \in S$
- $\frac{2}{3} \in S$

35. **item20-S20**

Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației

$$2^{x^2-3x+3} = \log_x(3x-2), \text{ cu } x > 1.$$

Dacă $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x \log_2 x$ și $x_0 \in S$, atunci:

- $f(x_0^2) = f(3x_0 - 2)$ ✓
- f este descrescătoare
- $f(x_0^2) = 3x_0 + 2$
- $f(x_0^2 - 3x_0 + 3) = f(3x_0 - 2)$