

Olimpiada Națională "Gazeta Matematică"

ETAPA I – Maramureș & Sălaj
20.02.2021

clasa a VI-a

1. item1-gr1-1

Dacă $A = 2^{11} \cdot 7^5 + 2^8 \cdot 7^5$ și $d|A$, atunci

- $d = 9$ ✓
- $d = 2^9$
- $d = 7^6$
- $d = 5$

2. item1-gr1-2

Dacă $A = 2^{11} \cdot 7^5 - 2^{14} \cdot 7^3$ și $d|A$, atunci

- $d = 41$ ✓
- $d = 7^4$
- $d = 2^{13}$
- $d = 5$

3. item2-gr2-1

Suplementul complementului unui unghi cu măsura de 21° este un unghi cu măsura de

- 111° ✓
- 69°
- 79°
- 31°

4. item2-gr2-2

Complementul suplementului unui unghi cu măsura de 121° este un unghi cu măsura de

- 31° ✓
- 59°
- 111°
- 149°

5. item3-gr3-1

Cardinalul mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid 2^{2021} < x < 2^{2022}, x:2 \right\}$ este

- $\text{card}(A) = 2^{2020} - 1$ ✓
- $\text{card}(A) = 2^{2021} - 1$
- $\text{card}(A) = 2^{1010} - 1$
- $\text{card}(A) = 1$

6. **item3-gr3-2**

Cardinalul mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid 2^{2020} < x < 2^{2021}, x:2 \right\}$ este

- $\text{card}(A) = 2^{2020} - 1$
- $\text{card}(A) = 2^{2019} - 1$ ✓
- $\text{card}(A) = 2^{1010} - 1$
- $\text{card}(A) = 1$

7. **item4-gr4-1**

Dacă $k = \frac{165^\circ 42'}{27^\circ 37'}$, atunci

- $k = 6$ ✓
- $k = 8$
- $k = 7,6$
- $k = 8,6$

8. **item4-gr4-2**

Dacă $k = \frac{131^\circ 28'}{16^\circ 26'}$, atunci

- $k = 6$
- $k = 8$ ✓
- $k = 7,6$
- $k = 8,6$

9. **item5-gr5-1**

Dacă pentru numărul natural nenul n are loc egalitatea $n + [n, 8] = 36$, atunci

- $n \in \{12\}$ ✓
- $n \in \{4, 20\}$
- $n \in \emptyset$
- $n \in \{3, 4, 6\}$

10. **item5-gr5-2**

Dacă pentru numărul natural nenul n are loc egalitatea $n + (n, 12) = 20$, atunci

- $n \in \{16, 19\}$ ✓
- $n \in \{12, 18\}$
- $n \in \emptyset$
- $n \in \{3, 4, 6, 12\}$

11. **item6-gr1-1**

Dacă s este suma ultimelor trei cifre ale numărului

$$N = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2021},$$

atunci

- $s = 15$ ✓
- $s = 0$
- $s = 16$
- $s = 6$

12. **item6-gr1-2**

Dacă s este suma ultimelor trei cifre ale numărului

$$N = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2021},$$

atunci

- $s = 15$
- $s = 0$
- $s = 14$ ✓
- $s = 5$

13. **item7-gr2-1**

Jocul *Numerix-15-25* constă din eliminarea unui număr de la 1 până la 2021. Fiecare jucător elimină pe rând câte un număr. Regula jocului spune că pierde acel jucător care elimină un număr divizibil cu 15 sau cu 25.

La joc participă patru jucători, în ordinea Ana, Briana, Cristian și Dan. Jucătorul care va pierde este

- Ana
- Briana ✓
- Cristian
- Dan

14. **item7-gr2-2**

Jocul *Numerix-21-49* constă din eliminarea unui număr de la 1 până la 2021. Fiecare jucător elimină pe rând câte un număr. Regula jocului spune că pierde acel jucător care elimină un număr divizibil cu 21 sau cu 49.

La joc participă patru jucători, în ordinea Ana, Briana, Cristian și Dan. Jucătorul care va pierde este

- Ana
- Briana ✓
- Cristian
- Dan

15. **item8-gr3-1**

Dacă numerele naturale $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ sunt astfel încât $(x, y) = 3$, $(y, z) = 5$ și $(z, x) = 7$, atunci cea mai mică valoare posibilă a sumei $x + y + z$ este

- 71 ✓
- 15
- 103
- 2021

16. **item8-gr3-2**

Dacă numerele naturale $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ sunt astfel încât $(x, y) = 3$, $(y, z) = 5$ și $(z, x) = 11$, atunci cea mai mică valoare posibilă a sumei $x + y + z$ este

- 71
- 19
- 103 ✓
- 2021

17. **item9-gr4-1**

Măsurile a° și b° a două unghiuri complementare sunt direct proporționale cu numerele prime p și q . Dacă valoarea raportului $\frac{a+b}{7p+3q}$ este un număr prim, atunci

- $a = b$ ✓
- $a + 2b = 120$
- $2a + b = 120$
- $a - b = 15$

18. **item9-gr4-2**

Măsurile a° și b° a două unghiuri complementare sunt direct proporționale cu numerele prime p și q . Dacă valoarea raportului $\frac{a+b}{7p+3q}$ este un număr prim, atunci

- $a - b = 0$ ✓
- $a + 2b = 120$
- $2a + b = 120$
- $a = b + 15$

19. **item10-gr5-1**

Fie A și B două mulțimi disjuncte pentru care $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, \dots, 4041\}$. Dacă raportul dintre suma elementelor mulțimii A și suma elementelor mulțimii B are valoarea 42, atunci numărul divizorilor sumei elementelor mulțimii B este

- 6 ✓
- 4
- 9
- 12

20. **item10-gr5-2**

Fie A și B două mulțimi disjuncte pentru care $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, \dots, 4041\}$. Dacă raportul dintre suma elementelor mulțimii A și suma elementelor mulțimii B are valoarea 46, atunci numărul divizorilor sumei elementelor mulțimii B este

- 6 ✓
- 4
- 9
- 12

21. **item11-gr6-1**

Dacă

$$\frac{\frac{x+1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}}{\frac{1+2+3+\dots+2020}{2020-2019+2018-2017+\dots+2-1}} =$$

atunci

- $x = 2019$ ✓
- $x = 2021$
- $x = 1010$
- $x = 2020$

22. **item11-gr6-2**

Dacă

$$\frac{\frac{x+2}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}}}{\frac{1+2+3+\dots+2020}{2020-2019+2018-2017+\dots+2-1}},$$

atunci

- $x = 2018$ ✓
- $x = 2021$
- $x = 1010$
- $x = 2020$

23. **item12-gr7-1**

Dacă la un cinematograful încasările au scăzut cu 13%, în condițiile în care prețul unui bilet la un film a crescut cu 16%, atunci numărul spectatorilor

- a scăzut cu 25% ✓
- a crescut cu 25%
- a scăzut cu 3%
- a scăzut cu 29%

24. **item12-gr7-2**

Dacă la un cinematograful încasările au scăzut cu 8%, în condițiile în care prețul unui bilet la un film a crescut cu 15%, atunci numărul spectatorilor

- a scăzut cu 20% ✓
- a crescut cu 20%
- a scăzut cu 7%
- a scăzut cu 23%

25. **item13-gr8-1**

Dacă a , b și c sunt trei numere naturale nenule pentru care

$$\frac{a^3 + b^3}{c^2} = \frac{b^3 + c^3}{a^2} = \frac{c^3 + a^3}{b^2},$$

atunci valoarea raportului $\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3}$ este

- 9 ✓
- 1
- 3
- 6

26. item13-gr8-2

Dacă a , b și c sunt trei numere naturale nenule pentru care

$$\frac{a^3 + b^3}{c^2} = \frac{b^3 + c^3}{a^2} = \frac{c^3 + a^3}{b^2},$$

atunci valoarea raportului $\frac{(a + b + c)^4}{a^4 + b^4 + c^4}$ este

- 27 ✓
- 1
- 3
- 4

27. item14-gr9-1

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente, cu $m(\sphericalangle AOB) - m(\sphericalangle BOC) = 18^\circ$. Dacă $(OD$ este semidreapta opusă bisectoarei interioare a unghiului $\sphericalangle BOC$ și $m(\sphericalangle AOD) = 24^\circ$, atunci

- $m(\sphericalangle COD) = 134^\circ$ ✓
- $m(\sphericalangle COD) = 122^\circ$
- $m(\sphericalangle COD) = 156^\circ$
- $m(\sphericalangle COD) = 143^\circ$

28. item14-gr9-2

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente, cu $m(\sphericalangle AOB) - m(\sphericalangle BOC) = 12^\circ$. Dacă $(OD$ este semidreapta opusă bisectoarei interioare a unghiului $\sphericalangle BOC$ și $m(\sphericalangle AOD) = 24^\circ$, atunci

- $m(\sphericalangle COD) = 132^\circ$ ✓
- $m(\sphericalangle COD) = 134^\circ$
- $m(\sphericalangle COD) = 156^\circ$
- $m(\sphericalangle COD) = 123^\circ$

29. item15-gr10-1

Fie d_1 , d_2 două drepte paralele și punctele $X, A \in d_1$, $Y, B \in d_2$ astfel încât $m(\sphericalangle XAB) + m(\sphericalangle YBA) > 180^\circ$. În semiplanul $(d_1, B$ se consideră semidreptele (AA_1) , (AA_2) și (AA_3) astfel încât $m(\sphericalangle XAA_1) + 6^\circ = m(\sphericalangle A_1AA_2) = 6^\circ + m(\sphericalangle A_2AA_3) = 24^\circ$. În semiplanul $(d_2, A$ se consideră semidreptele (BB_1) , (BB_2) , (BB_3) și (BB_4) astfel încât $m(\sphericalangle YBB_1) = 6^\circ$ și $2 \cdot m(\sphericalangle B_1BB_2) = m(\sphericalangle B_4BB_3)$, $m(\sphericalangle B_2BB_1) = 2 \cdot m(\sphericalangle B_1BY)$. Dacă semidreapta $[BB_2$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle YBB_3$, atunci

- dreptele AA_2 și BB_3 sunt concurente ✓
- dreptele AA_2 și BB_3 sunt paralele
- semidreptele $[AA_2$ și $[BB_3$ sunt incluse în aceeași dreaptă
- dreptele AA_2 și BB_3 sunt drepte confundate

30. item15-gr10-2

Fie d_1, d_2 două drepte paralele și punctele $X, A \in d_1, Y, B \in d_2$ astfel încât $m(\sphericalangle XAB) + m(\sphericalangle YBA) > 180^\circ$. În semiplanul $(d_1, B$ se consideră semidreptele $(AA_1, (AA_2$ și $(AA_3$ astfel încât $m(\sphericalangle XAA_1) + 7^\circ = m(\sphericalangle A_1AA_2) = 7^\circ + m(\sphericalangle A_2AA_3) = 24^\circ$. În semiplanul $(d_2, A$ se consideră semidreptele $(BB_1, (BB_2, (BB_3$ și $(BB_4$ astfel încât $m(\sphericalangle YBB_1) = 7^\circ$ și $2 \cdot m(\sphericalangle B_1BB_2) = m(\sphericalangle B_4BB_3), m(\sphericalangle B_2BB_1) = 2 \cdot m(\sphericalangle B_1BY)$. Dacă semidreapta $[BB_2$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle YBB_3$, atunci

- dreptele AA_2 și BB_3 sunt concurente ✓
- dreptele AA_2 și BB_3 sunt paralele
- semidreptele $[AA_2$ și $[BB_3$ sunt incluse în aceeași dreaptă
- dreptele AA_2 și BB_3 sunt drepte confundate

31. item16-GM-1

Fie A mulțimea tuturor numerelor naturale $N \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că cifrele numărului N pot fi așezate astfel încât să formeze un șir de numere nenule consecutive și $10^3 \leq N < 10^4$. Dacă n este cardinalul mulțimii A , iar m este cardinalul mulțimii M , cu $M = \left\{ N \in A \mid N:36 \text{ și } 72 \nmid N \right\}$ atunci raportul $\frac{m}{n}$ are valoarea

- $\frac{m}{n} = \frac{1}{36}$ ✓
- $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$
- $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}$
- $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

32. item17-GM-2

Dacă N reprezintă numărul numerelor de forma \overline{abcd} scrise în baza 10, cu cifre nenule, care au proprietatea că micșorate cu 11 devin un număr divizibil cu 43 și micșorate cu 15 devin un număr divizibil cu 47, atunci N este

- $N = 1$ ✓
- $N = 4$
- $N = 0$
- $N = 5$

33. item18-GM-3

Dacă semidreptele $[OA_0, [OA_1, [OA_2, [OA_3, \dots, [OA_n$ sunt așezate în jurul punctului O astfel încât $\sphericalangle A_0OA_1 = 1^\circ, \sphericalangle A_1OA_2 = 3^\circ, \sphericalangle A_2OA_3 = 5^\circ, \dots, \sphericalangle A_{n-1}OA_n = (2n-1)^\circ$, atunci cea mai mică valoare a lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care semidreapta $[OA_n$ coincide cu semidreapta $[OA_0$ este

- $n = 60$ ✓
- $n = 30$
- $n = 15$
- $n = 18$

34. **item19-GM-4**

Dacă produsul tuturor divizorilor proprii ai numărului natural N este 2021^{1905} , atunci

- $N = 2021^{15}$ ✓
- $N = 2021^{16}$
- $N = 2021^{2020}$
- $N = 2021^5$

35. **item20-GM-5**

Fie r un număr rațional strict pozitiv și numerele naturale nenule m și n , cu $m \neq 3^{n-1}$. Pe segmentul de dreaptă $[AB]$ sunt situate, în această ordine punctele $M_1, M_2, \dots, M_m, N_n, N_{n-1}, \dots, N_1$ astfel încât cercurile $\mathcal{C}_1(A_0, r), \mathcal{C}_2(A_1, 2r), \mathcal{C}_3(A_2, 3r), \dots, \mathcal{C}_m(A_{m-1}, mr)$ au centrele situate pe segmentul $[AB]$ și $M_1 \in \mathcal{C}_1(A_0, r) \cap \mathcal{C}_2(A_1, 2r), M_2 \in \mathcal{C}_2(A_1, 2r) \cap \mathcal{C}_3(A_2, 3r), \dots, M_{m-1} \in \mathcal{C}_{m-1}(A_{m-2}, (m-1)r) \cap \mathcal{C}_m(A_{m-1}, mr)$, iar cercurile $\mathcal{C}_{m+1}(B_0, r), \mathcal{C}_{m+2}(B_1, 3r), \mathcal{C}_{m+3}(B_2, 3^2r), \dots, \mathcal{C}_{m+n}(B_{n-1}, 3^{n-1}r)$ au centrele situate pe segmentul $[AB]$ și $N_1 \in \mathcal{C}_{m+1}(B_0, r) \cap \mathcal{C}_{m+2}(B_1, 3r), N_2 \in \mathcal{C}_{m+2}(B_1, 3r) \cap \mathcal{C}_{m+3}(B_2, 3^2r), \dots, N_{n-1} \in \mathcal{C}_{m+n-1}(B_{n-2}, 3^{n-2}r) \cap \mathcal{C}_{m+n}(B_{n-1}, 3^{n-1}r)$. Dacă $[AA_0] = r, [BB_0] = r, M_m \in \mathcal{C}_{m+n}(B_{n-1}, 3^{n-1}r)$ și $N_n \in \mathcal{C}_m(A_{m-1}, mr)$, atunci

- $[AB] = r(m^2 + m - 1 + 3^n)$ ✓
- $[AB] = r(m^2 + m + 3^n)$
- $[AB] = r(m^2 + m - 1 + 3^{n-1})$
- $[AB] = r(m^2 + m + 1 + 3^n)$