

Olimpiada Națională "Gazeta Matematică"

ETAPA I – Maramureș & Sălaj
20.02.2021

clasa a IX-a

1. item1-gr1-1

Partea fracționară a numărului $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$ este egală cu:

- $\{a\} = 5 - \sqrt{24}$ ✓
- $\{a\} = 5 + 2\sqrt{6}$
- $\{a\} = -1 - \sqrt{24}$
- $\{a\} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

2. item1-gr1-2

Partea fracționară a numărului $a = (3 - \sqrt{5})^2$ este

- $\{a\} = 14 - \sqrt{180}$ ✓
- $\{a\} = 14 + 6\sqrt{5}$
- $\{a\} = 4 - 6\sqrt{5}$
- $\{a\} = 3 - \sqrt{5}$

3. item2-gr2-1

Dacă A este mulțimea soluțiilor ecuației $\left[\frac{3x+1}{4} \right] = 2$, atunci:

- $A \subset [2, 4]$ ✓
- $A \subset [2, 3]$
- $A \subset [-1, 3]$
- $A = \emptyset$

4. item2-gr2-2

Dacă A este mulțimea soluțiilor ecuației $\left[\frac{2x-1}{3} \right] = -2$, atunci:

- $A \subset [-3, -1]$ ✓
- $A \subset [-2, -1]$
- $A \subset [0, 2]$
- $A = \emptyset$.

5. item3-gr3-1

Suma soluțiilor întregi ale inecuației $|3 - 7x| \leq 15$ este egală cu:

- 2 ✓
- 0
- 1
- -1

6. item3-gr3-2

Suma soluțiilor întregi ale inecuației $|5x - 8| \leq 21$ este egală cu:

- 12 ✓
- 9
- 0
- 18

7. item4-gr4-1

Dacă M și N sunt mijloacele laturilor $[AD]$ și $[BC]$ ale patrulaterului $ABCD$, atunci

- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ ✓
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB})$
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

8. item4-gr4-2

Dacă M și N sunt mijloacele diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$ ale patrulaterului $ABCD$, atunci

- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$ ✓
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD})$

9. item5-gr5-1

Fie numerele reale a și b . În planul \mathcal{P} înzestrat cu un reper cartezian xOy , considerăm punctele $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(2, -2)$ și $D(a, b)$. Dacă $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, atunci

- $a \cdot b + 4 = 0$ ✓
- $a \cdot b - 4 = 0$
- $a \cdot b = 0$
- $a \cdot b = 20$

10. item5-gr5-2

Fie numerele reale a și b . În planul \mathcal{P} înzestrat cu un reper cartezian xOy , considerăm punctele $A(1, 0)$, $B(4, 6)$, $C(3, -1)$ și $D(a, b)$. Dacă $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$, atunci

- $a + b + 1 = 0$ ✓
- $a + b = 1$
- $a + b = 0$
- $a + b = 11$

11. item6-gr1-1

Numărul numerelor de forma \overline{xy} cu proprietățile $[\sqrt{xy}] = 5$ și $x + y = 8$ este:

- 2 ✓

- 0
- 11
- 3

12. **item6-gr1-2**

Numărul numerelor de forma \overline{xy} cu proprietățile $[\sqrt{xy}] = 9$ și $x + 2y = 19$ este:

- 1 ✓
- 17
- 0
- 2

13. **item7-gr2-1**

Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b + c + d = 1$, atunci cea mai mică valoare a expresiei $4a^2 + b^2 + 3c^2 + d^2$ este:

- $\frac{12}{31}$ ✓
- $\frac{1}{48}$
- $\frac{31}{31}$
- $\frac{1}{9}$

14. **item7-gr2-2**

Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b + c + d = 2$, atunci cea mai mică valoare a expresiei $4a^2 + b^2 + 3c^2 + d^2$ este:

- $\frac{48}{31}$ ✓
- $\frac{12}{31}$
- $\frac{1}{31}$
- $\frac{1}{9}$

15. **item8-gr3-1**

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu proprietățile:

- (i) numerele 2 și 6 aparțin mulțimii A ;
- (ii) pentru orice $x, y \in A$ avem că $|x| - |y| \in A$.

Cel mai mic număr de elemente pe care îl poate avea mulțimea A este:

- 7 ✓
- 2
- 11
- 8

16. **item8-gr3-2**

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu proprietățile:

- (i) numerele 1 și 5 aparțin mulțimii A ;
- (ii) pentru orice $x, y \in A$ avem că $|x| - |y| \in A$.

Cel mai mic număr de elemente pe care îl poate avea mulțimea A este:

- 11 ✓
- 2

- 7
- 12

17. **item9-gr4-1**

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, cu $a + b + c = 4$ și

$$N = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 - ca + a^2}$$

atunci

- $N = 8$ ✓
- $N = 4$
- $N = 0$
- $N = 16$

18. **item9-gr4-2**

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, cu $a + b + c = 4$ și

$$N = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 + ca + a^2},$$

atunci

- $N = 0$ ✓
- $N = 4$
- $N = 8$
- $N = 16$

19. **item10-gr5-1**

Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , iar $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 6$, atunci lungimea vectorului $\vec{v} = \vec{AG} + 2\vec{BG} + 3\vec{CG}$ este:

- $|\vec{v}| = 4$ ✓
- $|\vec{v}| = 3$
- $|\vec{v}| = 7$
- $|\vec{v}| = 0$

20. **item10-gr5-2**

Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , iar $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 6$, atunci lungimea vectorului $\vec{v} = \vec{AG} + 3\vec{BG} + 2\vec{CG}$ este:

- $|\vec{v}| = 3$ ✓
- $|\vec{v}| = 4$
- $|\vec{v}| = 9$
- $|\vec{v}| = 0$

21. **item11-gr6-1**

Dacă numerele reale a și b sunt soluțiile ecuației $x^2 - 5x + 3 = 0$, atunci valoarea expresiei

$$E = \frac{a^2 - 2}{a^2 + 3} + \frac{b^2 - 2}{b^2 + 3} \text{ este:}$$

- $E = \frac{1}{3}$ ✓

- $E = \frac{1}{2}$
- $E = \frac{\sqrt{13}}{2}$
- $E = \frac{4}{3}$

22. **item11-gr6-2**

Dacă numerele reale a și b sunt soluțiile ecuației $x^2 - 6x + 4 = 0$, atunci valoarea expresiei

$$E = \frac{a^2 - 2}{a^2 + 4} + \frac{b^2 - 2}{b^2 + 4} \text{ este:}$$

- $\frac{1}{2}$ ✓
- $E = \frac{1}{3}$
- $E = \frac{\sqrt{13}}{2}$
- $E = \frac{4}{3}$

23. **item12-gr7-1**

Fie $a \in \mathbb{R}$ și predicatul $p(x, y) : yx^2 + 2yx + y + 3x + 2 = 0$, cu $x \in \mathbb{R}$ și $y \in (a, \infty)$. Considerăm propoziția $q : (\forall y \in (a, \infty)), (\exists x \in \mathbb{R}), p(x, y)$.

Dacă a este cel mai mic număr întreg pentru care propoziția q este adevărată, atunci

- $a = -2$ ✓
- $a = -\frac{4}{3}$
- $a = -\frac{1}{9}$
- $a = -\frac{9}{4}$

24. **item12-gr7-2**

Fie $a \in \mathbb{R}$ și predicatul $p(x, y) : yx^2 + 2yx + y + 4x + 1 = 0$, cu $x \in \mathbb{R}$ și $y \in (a, \infty)$. Considerăm propoziția $q : (\forall y \in (a, \infty)), (\exists x \in \mathbb{R}), p(x, y)$.

Dacă a este cel mai mic număr întreg pentru care propoziția q este adevărată, atunci

- $a = -\frac{1}{9}$ ✓
- $a = -\frac{4}{9}$
- $a = -\frac{2}{4}$
- $a = -\frac{4}{3}$

25. **item13-gr8-1**

Dacă $x \in (0, 2021)$ și n este numărul soluțiilor ecuației

$$\left\{ \frac{x}{2} \right\} = \left\{ \frac{x}{5} \right\},$$

atunci

- $n = 606$ ✓
- $n = 2021$
- $n = 607$
- $n = 605$

26. **item13-gr8-2**

Dacă $x \in (0, 2020)$ și n este numărul soluțiilor ecuației

$$\left\{ \frac{x}{2} \right\} = \left\{ \frac{x}{5} \right\},$$

atunci

- $n = 605$ ✓
- $n = 606$
- $n = 607$
- $n = 2021$

27. **item14-gr9-1**

Fie triunghiul ABC și punctele $D \in (BC)$ și $E \in (AD)$, astfel încât $4 \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{AE} = \alpha \cdot \overrightarrow{ED}$. Dacă punctele C, E și mijlocul segmentului $[AB]$ sunt coliniare, atunci

- $\alpha = 4$ ✓
- $\alpha = 3$
- $\alpha + 3 = 0$
- $\alpha + 4 = 0$

28. **item14-gr9-2**

Fie triunghiul ABC și punctele $D \in (BC)$ și $E \in (AD)$, astfel încât $3 \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{AE} = \alpha \cdot \overrightarrow{ED}$. Dacă punctele C, E și mijlocul segmentului $[AB]$ sunt coliniare, atunci

- $\alpha = 3$ ✓
- $\alpha + 3 = 0$
- $\alpha = 4$
- $\alpha + 4 = 0$

29. **item15-gr10-1**

Fie numerele reale m și n , triunghiul ABC și punctele $D \in (BC)$, $M \in AB$ și $N \in AC$, astfel încât (AD este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} , $\overrightarrow{AM} = m \cdot \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = n \cdot \overrightarrow{AC}$). Dacă $AB = 3$, $AC = 6$, iar dreptele MC și ND sunt paralele, atunci între numerele m și n există relația:

- $m(3n - 1) = 2$ ✓
- $n(3m - 2) = 1$
- $m = n$
- $m \cdot n = 1$

30. **item15-gr10-2**

Fie numerele reale m și n , triunghiul ABC și punctele $D \in (BC)$, $M \in AB$ și $N \in AC$, astfel încât (AD este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} , $\overrightarrow{AM} = m \cdot \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = n \cdot \overrightarrow{AC}$). Dacă $AB = 3$, $AC = 6$, iar dreptele MD și NB sunt paralele, atunci între numerele m și n există relația:

- $n(3m - 2) = 1$ ✓
- $m(3n - 1) = 2$
- $m = n$
- $m \cdot n = 1$

31. **item16-GM-1**

Rezultatul calculului $1 - 4 + 9 - 16 + \dots + 99^2 - 100^2$ este:

- -5050 ✓
- 5050
- 2500
- -2500

32. **item17-GM-2**

Numărul soluțiilor reale ale ecuației $3x^2 - 22[x] + 24 = 0$ este:

- 5 ✓
- 1
- 2
- infinit

33. **item18-GM-3**

Fie $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 3$ și numerele $t, a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$, astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n$. Dacă

$$\sqrt{ta_1a_2 - a_1a_3} + \sqrt{ta_2a_3 - a_2a_4} + \dots + \sqrt{ta_{n-1}a_n - a_{n-1}a_1} + \sqrt{ta_na_1 - a_na_2} = nt,$$

atunci valoarea produsului $p = t \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ este:

- $p = 2^{n+1}$ ✓
- $p = 2^n$
- $p = 1$
- $p = n$

34. **item19-GM-4**

Dacă m reprezintă numărul mulțimilor M , finite și nevide, de numere reale pozitive care au proprietatea că

$$\text{pentru orice } x \in M, \text{ numărul } \frac{x^2 + 4}{5} \text{ este element al mulțimii } M,$$

atunci

- $m = 3$ ✓
- $m = 1$
- $m = 0$
- $m = 2$

35. **item20-GM-5**

Fie $ABCD$ un patrulater convex în care M este mijlocul laturii $[BC]$, iar N este mijlocul laturii $[CD]$. Dreptele AM și BN se intersectează în P , iar $\frac{PM}{AM} = \frac{1}{5}$ și $\frac{PB}{BN} = \frac{2}{5}$. Dacă $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{u}$, atunci

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ✓
- $\overrightarrow{u} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD}$