# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**
- Timpul de lucru este 120 minute
- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

**Clasa a V-a – Enunţuri**

**1.** Numărul natural $a = 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + ... + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2020$ este o sumă în care termenul de pe „locul" $n$ este un produs de $n$ factori. Ultima cifră a numărului $a - 2$ este egală cu:

**A.** 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 8

**2.** Un număr natural se numeşte *artistic* dacă este de 13 ori mai mare decât suma cifrelor sale. Suma numerelor *artistice* de trei cifre este egală cu:

**A.** 351 **B.** 273 **C.** 468 **D.** 312 **E.** 2021

**3.** Un număr natural $\overline{abc}$ se numeşte *interesant* dacă $b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10$ . Suma dintre cel mai mic şi cel mai mare număr *interesant* este egală cu:

**A.** 297 **B.** 319 **C.** 275 **D.** 308 **E.** 385

**4.** Un număr natural se numeşte *foarte interesant* dacă se poate scrie ca suma a trei numere naturale consecutive. Stabiliţi care dintre următoarele numere este *foarte interesant*:

**A.** 140 **B.**142 **C.** 107 **D.** 108 **E.** 100

**5.** Unui număr natural de cinci cifre i se inversează locurile ultimelor două cifre (de exemplu, din numărul 12345 se obţine numărul 12354), apoi numărul obţinut se adună cu cel iniţial şi se obţine astfel un număr de cinci cifre, ale cărui prime cifre sunt, în această ordine, 2, 0, 2, 1. Produsul cifrelor nenule ale numărului obţinut în final este egal cu:

**A.** 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 8 **E.** 12

**6.** Răzvan colorează pătrăţele pe o coală de matematică în ordine, astfel: un pătrăţel cu galben, două pătrăţele cu negru, apoi patru pătrăţele cu roşu, cinci pătrăţele cu albastru, după aceea şase pătrăţele cu verde şi continuă acest procedeu până colorează 2021 pătrăţele. Ce culoare are ultimul pătrăţel colorat?

**A.** galben **B.** negru **C.** roşu **D.** albastru **E.** verde

**7.** Notăm $s(n)$ suma cifrelor numărului natural $n$. Câte numere naturale $n$ verifică egalitatea $n - s(n) = 2025$ ?

**A.** 2021 **B.** 10 **C.** 90 **D.** 100 **E.** 9

**8.** Un şir de numere naturale consecutive are suma dintre primul şi ultimul termen egală cu $n$, iar suma dintre ultimii doi termeni egală cu $n + 2021$. Numărul termenilor şirului este egal cu:

**A.** 2023 **B.** 2020 **C.** 2021 **D.** 2022 **E.** $n$

**9.** Dacă $A^2 = \left(2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot ... \cdot 2^{2020}\right) : \left(2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot ... \cdot 2^{2019}\right)$, atunci numărul $A$ este egal cu:

**A.** 2 **B.** $2^{1010}$ **C.** $2^{505}$ **D.** $2^{1011}$ **E.** $2^{2020}$

**10.** Bogdan a avut o sumă de bani, de patru ori mai mică decât prietena sa Ana. Bogdan a primit 420 lei, iar Ana a cheltuit 225 lei şi astfel, acum, cei doi prieteni au sume egale de bani. Ce sumă de bani au acum, împreună, cei doi prieteni ?

**A.** 1304 lei **B.** 1246 lei **C.** 1295 lei **D.** 1270 lei **E.** 1210 lei

**11.** La Concursul de matematică GM au fost propuse concurenților 20 de probleme; pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă câte 5 puncte, pentru o problemă rezolvată greșit se scad 2 puncte iar problemele nerezolvate au valoare 0 puncte (nu se depunctează). Câte probleme a rezolvat corect elevul care a obținut Premiul I cu un total de 83 puncte?

**A.** 17 **B.** 16 **C.** 20 **D.** 18 **E.** 19

**12.** Alexia are în total 2021 bile galbene şi albastre. La un *schimb*, Alexia oferă prietenei sale Cristina 43 bile galbene şi primeşte 23 bile albastre. După mai multe astfel de *schimburi*, Alexia rămâne fără bile galbene, dar cu 1541 bile albastre. Numărul bilelor galbene avute iniţial de Alexia este egal cu:

**A.** 1032 **B**. 1024 **C.** 1048 **D.** 989 **E.** 1089

**13.** Stabiliţi care dintre următoarele numere **nu** poate fi pătrat perfect, pentru niciun număr natural nenul *n:*

**A.** $11n+1$ **B.** $17n+2$ **C.** $14n+8$ **D.** $13n+7$ **E.** $15n+7$

**14.** Ordinea crescătoare a numerelor $t=2^{2021}$, $u=3^{1212}$ şi $v=5^{910}$ este:

**A.** $v<t<u$ **B.** $u<v<t$ **C.** $u<t<v$ **D.** $t<u<v$ **E.** $v<u<t$

**15.** Fie numărul $A=2^{n+2}\cdot 3^{n+2}\cdot 5^{n+2}+2^{n}\cdot 3^{n}\cdot 5^{n+4}+2^{n}\cdot 3^{n+5}\cdot 5^{n}+2^{n+8}\cdot 3^{n}\cdot 5^{n}+2^{n+1}\cdot 3^{n+1}\cdot 5^{n}-2^{n+1}\cdot 3^{n}\cdot 5^{n+1}$, unde *n* este un număr natural nenul. Restul împărțirii numărului $A$ la 30 este egal cu:

**A.** 2 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 0 **E.** 29

**16.** Numărul $2^{2021}+2^{2021}+2^{2021}+2^{2021}$ este egal cu:

**A.** $2^{2021}$ **B.** $2^{2023}$ **C.** $8^{2021}$ **D.** $2^{8084}$ **E.** $2^{2022}$

**17.** Se consideră numerele $a=2^{2021}$ şi $b=5^{2022}$. Suma cifrelor numărului $a\cdot b-1$ este egală cu:

**A.** 2 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 18193 **E.** 18181

**18.** Se consideră şirul crescător al tuturor numerelor naturale scrise numai cu cifrele $0$, $1$ şi $2$, adică şirul: $0,1,2,10,11,12,20,21,22,100,101,102,110,111,112,120,121,\ldots$ . Câte cifre de 2 se folosesc pentru a scrie numerele de trei cifre?

**A.** 17 **B.** 10 **C.** 21 **D.** 19 **E.** 13

**19.** Suma numerelor de două cifre, care împărţite la 4 dau câtul de o cifră şi restul 3, este egală cu:

**A.** 161 **B.** 200 **C.** 189 **D.** 241 **E.** 177

**20.** Fie *m* şi *n* două numere numere naturale astfel încât $n>m$ şi $2^{21}+2^{22}+2^{23}+\ldots+2^{2021}=2^{n}-2^{m}$. Suma $n+m$ este egală cu:

**A.** 2043 **B.** 2022 **C.** 2036 **D.** 2042 **E.** 2062

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Timpul de lucru este 120 minute
- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a VI-a – Enunţuri

**1.** Câte numere de forma $\overline{xy2t}$ sunt divizibile cu 5?

**A.** 162 **B.** 175 **C.** 180 **D.** 200 **E.** 190

**2.** Suma divizorilor naturali impari ai numărului 2020 este egală cu:

**A.** 612 **B.** 1623 **C.** 606 **D.** 510 **E.** 611

**3.** Cel mai mic număr de elevi care pot fi grupaţi câte 6, câte 9 și câte 10 este egal cu:

**A.** 540 **B.** 180 **C.** 54 **D.** 120 **E.** 90

**4.** Mulţimea numerelor naturale nenule se împarte în submulţimi astfel: $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,4,5\}$, $A_3=\{6,7,8,9\},\ldots$. Cel mai mic element din mulţimea $A_{100}$ este egal cu:

**A.** 2026 **B.** 5049 **C.** 5025 **D.** 2025 **E.** 5050

**5.** Câte numere de 4 cifre au produsul cifrelor egal cu 4?

**A.** 10 **B.** 8 **C.** 11 **D.** 9 **E.** 12

**6.** Preţul unui produs creşte cu 25% și apoi scade cu $p\%$, astfel încât preţul de vânzare rămâne același. Valoarea procentului $p\%$ este:

**A.** 10% **B.** 25% **C.** 20% **D.** 50% **E.** 10%

**7.** Numărul elementelor mulţimii $A=\left\{\overline{ab}\,\middle|\,\frac{\overline{ab}}{4}=\frac{\overline{ba}}{7}\right\}$, unde $\overline{ab}$ este un număr scris în baza 10, este egal cu:

**A.** 4 **B.** 8 **C.** 16 **D.** 32 **E.** 5

**8.** Pe un cerc $C(O,r)$, se consideră punctele $A,B$ astfel încât $\sphericalangle AOB=72^\circ$. Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, iar $[ON$ este semidreapta opusă semidreptei $[OB$, unde $M,N\in C(O,r)$, atunci măsura arcului mic $\overset{\frown}{MN}$ este egală cu:

**A.** $144^\circ$ **B.** $108^\circ$ **C.** $180^\circ$ **D.** $162^\circ$ **E.** $72^\circ$

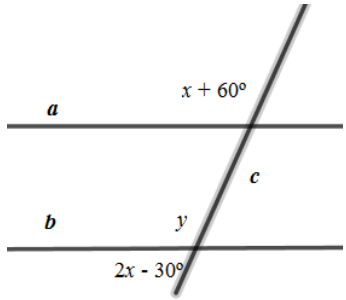
**9.** Numărul elementelor mulţimii $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,2\le\frac{n}{3}\le3\frac{1}{4}\right\}$ este egal cu:

**A.** 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 2 **E.** 6

**10.** Alexia are în total 2021 bile galbene şi albastre. La un *schimb*, Alexia oferă prietenei sale Cristina 43 bile galbene şi primeşte 23 bile albastre. După mai multe astfel de *schimburi*, Alexia rămâne fără bile galbene, dar cu 1541 bile albastre. Numărul bilelor galbene avute iniţial de Alexia este egal cu:

**A.** 1032 **B.** 1024 **C.** 1048 **D.** 989 **E.** 1089

**11.** Conform desenului alăturat, dreptele paralele $a$ și $b$ sunt intersectate de secanta $c$. Măsura unghiului $y$ este egală cu:




**A.** $110^\circ$ **B.** $150^\circ$ **C.** $100^\circ$ **D.** $105^\circ$ **E.** $90^\circ$

**12.** Numerele naturale $a, b, c, d, e$ reprezintă măsurile a cinci unghiuri (măsurate în grade) în jurul unui punct. Se știe că $a, b, c$ sunt invers proporționale cu numerele $0{,}5; 0{,}1;$, respectiv $0{,}25$, iar $c, d, e$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 6,respectiv 14. Suma măsurilor dintre cel mai mic și cel mai mare unghi este egală cu:

**A.** $186^\circ$ **B.** $160^\circ$ **C.** $144^o$ **D.** $180^\circ$ **E.** $175^\circ$

**13.** Semidreptele $(OX$ și $(OY$ sunt semidrepte opuse, iar punctele $A$ și $B$ sunt de aceeași parte a dreptei $XY$, astfel încât unghiul $\sphericalangle BOX$ este obtuz, iar $m(\sphericalangle BOX) = 2m(\sphericalangle AOY)$. Dacă $(OB$ este bisectoarea unghiului $AOY$, atunci măsura unghiului $\sphericalangle AOY$ este egală cu:

**A.** $60^\circ$ **B.** $72^\circ$ **C.** $54^\circ$ **D.** $80^\circ$ **E.** $45^\circ$

**14.** Se consideră numerele de trei cifre $\overline{abc}$ unde $a, b, c$ sunt cifre nenule și au proprietatea că $5a-b, 5b-c, 5c-a$ sunt direct proporționale cu $a, b,$ respectiv $c$. Câte numere de această formă există?

**A.** 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 5 **E.** 4

**15.** Pentru orice număr natural $n$ se notează $a_n = n+2$ și $b_n = 5n+20$. Suma tuturor numerelor naturale $n$ pentru care $a_n \mid b_n$ este egală cu:

**A.** 3 **B.** 11 **C.** 8 **D.** 13 **E.** 24

**16.** Pentru orice număr natural nenul $n$ se consideră mulțimile $A = \{n+2, 5n+2\}$ și $B = \{4n+6, 5n-4\}$. Dacă mulțimea $A \cup B$ are 3 elemente, atunci suma elementelor mulțimii $B$ este egală cu:

**A.** 28 **B.** 25 **C.** 31 **D.** 35 **E.** 38

**17.** Se consideră unghiurile adiacente complementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ și $OD \perp OB$, punctele $B, D$ fiind de o parte și de alta a dreptei $OC$; dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DOC$, $[ON$ este semidreapta opusă semidreptei $[OB$ și $\sphericalangle AOB = 28^\circ$, atunci măsura unghiului $\sphericalangle MON$ este egală cu:

**A.** $100^\circ$ **B.** $140^\circ$ **C.** $90^\circ$ **D.** $114^\circ$ **E.** $104^\circ$

**18.** Câte grade măsoară unghiul dintre limbile unui ceas când acesta arată ora 4 și 40 de minute?

**A.** $100^\circ$ **B.** $120^\circ$ **C.** $90^\circ$ **D.** $140^\circ$ **E.** $110^\circ$

**19.** Dacă adunăm jumătatea, sfertul și optimea măsurilor unghiului $\alpha$, obținem măsura suplementului unghiului $\alpha$. Măsura complementului suplementului unghiului $\alpha$ este egală cu:

**A.** $76^\circ$ **B.** $84^\circ$ **C.** $6^\circ$ **D.** $48^\circ$ **E.** $16^\circ$

**20.** Elevii unei clase merg în drumeţie, pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Daniel a ajuns la cabană, în cabană se aflau deja jumătate din numărul celor aflaţi încă pe traseu. Alexia a sosit a zecea după Daniel, iar după ea au rămas de două ori mai puţini elevi decât cei ajunşi înaintea sa. Câţi elevi au fost, în total, în drumeţie ?

**A.** 32 **B.** 26 **C.** 29 **D.** 28 **E.** 31

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Timpul de lucru este 120 minute
- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a VII-a – Enunţuri

**1.** Dacă $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real $x$, atunci numărul $a=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left\{13+\sqrt{2}\right\}$ este egal cu :

**A.** $\sqrt{2}$ **B.** 1 **C.** 13 **D.** $\sqrt{2}-1$ **E.** $13-\sqrt{2}$

**2.** Produsul cifrelor distincte $x$ și $y$ pentru care numărul $\sqrt{\overline{2,(x)}+\overline{3,(y)}}$ este un număr rațional este egal cu:

**A.** 1 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2 **E.** 6

**3.** Dacă $n$ reprezintă numărul soluțiilor reale ale ecuației $\left|\left||2x-1|-\sqrt{7}\right|-2,(3)\right|=1$ , atunci $n$ este egal cu:

**A.** 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 6 **E.** 2

**4.** Dacă $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,\frac{2x+1}{3x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$ și $a\in M$ , atunci suma $s=1+a+a^2+a^3...+a^{2020}+a^{2021}$ este egală cu:

**A.** 1 **B.** $-1$ **C.** 2 **D.** 0 **E.** 3

**5.** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se notează cu $p(n)$ numărul pătratelor perfecte nenule cel mult egale cu $n$. Dacă $S_n=p(1)+p(2)+p(3)+...+p(n)$, atunci numărul $S_{17}$ este egal cu:

**A.** 51 **B.** 42 **C.** 43 **D.** 46 **E.** 59

**6.** Dacă $x,y\in\mathbb{Z}$ și $2x^2-5xy+2y^2+13=0$ , atunci numărul $S=|x+y|$ este egal cu:

**A.** 15 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 14 **E.** 13

**7.** Suma numerelor naturale nenule $m$ şi $n$ pentru care $\frac{4n}{2m+3}=\frac{n-2}{m}$ este egală cu:

**A.** 16 **B.** 9 **C.** 11 **D.** 14 **E.** 12

**8.** Răzvan colorează pătrăţele pe o coală de matematică în ordine, astfel: un pătrăţel cu galben, două pătrăţele cu negru, apoi patru pătrăţele cu roşu, cinci pătrăţele cu albastru, după aceea şase pătrăţele cu verde şi continuă acest procedeu până colorează 2021 pătrăţele. Ce culoare are ultimul pătrăţel colorat?

**A.** galben **B.** negru **C.** **roşu** **D.** albastru **E.** verde

**9.** Suma tuturor numerelor naturale $n$ pentru care numărul $r=\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ este număr întreg este egală cu:

**A.** 406 **B.** 413 **C.** 412 **D.** 350 **E.** 356

**10.** Dacă mulţimea numerelor naturale nenule se împarte în submulţimi astfel: $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,4,5\}$, $A_3=\{6,7,8,9\},....$, atunci cel mai mic element din mulţimea $A_{100}$ este egal cu:

**A.** 2026 **B.** 5049 **C.** 5025 **D.** 2025 **E.** 5050

**11.** Dacă *MNPQ* este un pătrat, iar *NIP* şi *PQJ* sunt două triunghiuri echilaterale astfel încât punctul *I* se află în interiorul pătratului *MNPQ*, iar punctul *J* se află în exteriorul aceluiaşi pătrat, atunci măsura unghiului $\sphericalangle MIJ$ este egală cu:

**A.** $180^o$ **B.** $135^o$ **C.** $160^o$ **D.** $175^o$ **E.** $140^o$

**12.** Într-un triunghi $ABC$ dreptunghic în $A$ se înscrie un cerc cu raza de 2 cm. Dacă lungimea segmentului *(BC)* este egală cu 10 cm, atunci măsura unghiului $\sphericalangle BIC$, unde $I$ este centrul cercului înscris în triunghiul $ABC$, este egală cu:

**A.** $125^o$ **B.** $120^o$ **C.** $135^o$ **D.** $110^o$ **E.** $140^o$

**13.** Într-un triunghi $ABC$ dreptunghic în $A$ se înscrie un cerc cu raza de 2 cm. Dacă lungimea segmentului *(BC)* este egală cu 10 cm, atunci aria triunghiului $ABC$ este egală cu:

**A.** $10\ cm^2$ **B.** $16\ cm^2$ **C.** $24\ cm^2$ **D.** $22\ cm^2$ **E.** $20\ cm^2$

**14.** Punctele $A,B,C$ sunt situate pe un cerc de centru $O$ și de rază $r=6$ cm, astfel încât $[AB]$ este diametru. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ intersectează cercul $\mathcal{C}(O,r)$ în punctul $D$, iar $\sphericalangle CBA = 55^o$. Măsura unghiului ascuţit determinat de diagonalele patrulaterului $ACBD$ este egală cu:

**A.** $105^o$ **B.** $80^o$ **C.** $100^o$ **D.** $75^o$ **E.** $90^o$

**15.** Punctele $A,B,C$ sunt situate pe un cerc de centru $O$ și de rază $r=6$ cm, astfel încât $[AB]$ este diametru. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ intersectează cercul $\mathcal{C}(O,r)$ în punctul $D$, iar $\sphericalangle CBA = 55^o$. Aria triunghiului $ABD$ este egală cu:

**A.** $12\ cm^2$ **B.** $36\ cm^2$ **C.** $40\ cm^2$ **D.** $18\ cm^2$ **E.** $24\ cm^2$

**16.** Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ a paralelogramului $ABCD$ intersectează latura *(BC)* în punctul $M$, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$ trece prin punctul $D$. Se știe că $\sphericalangle MDC = 45^o$, $AB=\sqrt{7}\ cm$ și $MC=\sqrt{3}\ cm$. Suma măsurilor unghiurilor $\sphericalangle MAD$ şi $\sphericalangle MDA$ este egală cu:

**A.** $95^\circ$ **B.** $115^\circ$ **C.** $90^\circ$ **D.** $125^\circ$ **E.** $105^\circ$

**17.** Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ a paralelogramului $ABCD$ intersectează latura *(BC)* în punctul $M$, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$ trece prin punctul $D$. Se știe că $\sphericalangle MDC = 45^o$, $AB=\sqrt{7}\ cm$ și $MC=\sqrt{3}\ cm$. Perimetrul triunghiului ABM este egal cu:

**A.** $2\cdot\sqrt{7}$ cm **B.** $\left(2\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$cm **C.** $\left(3\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$cm **D.** $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$cm **E.** $\left(\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{3}\right)$cm

**18.** Dacă $x$ este un număr natural nenul, mulţimea $A=\left\{x, 2021-x, \frac{2021}{x}\right\}$ se numeşte *prietenoasă* dacă $A\subset\mathbb{N}^*$.

Numărul mulţimilor *prietenoase* este egal cu:

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 7

**19.** Elevii unei clase merg în drumeţie, pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Daniel a ajuns la cabană, în cabană se aflau deja jumătate din numărul celor aflaţi încă pe traseu. Alexia a sosit a zecea după Daniel, iar după ea au rămas de două ori mai puţini elevi decât cei ajunşi înaintea sa. Câţi elevi au fost, în total, în drumeţie ?

**A.** 32 **B.** 26 **C.** 29 **D.** 28 **E.** 31

**20.** Un număr natural se numeşte *interesant* dacă se poate scrie ca sumă a patru numere naturale consecutive. Stabiliţi care dintre următoarele numere este *interesant:*

**A.** 2021 **B.** 2016 **C.** 2024 **D.** 2020 **E.** 2022

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Timpul de lucru este 120 minute
- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

**Clasa a VIII-a – Enunţuri**

**1.** Dacă $m$ și $n$ sunt numere raționale astfel încât: $(3m+n)\cdot\sqrt{2}+2m-n=4\sqrt{2}+1$ atunci numărul $m+n$ este egal cu:

**A.** 0 **B.** 1 **C. 2** **D. 3** **E. – 1**

**2.** Fie mulțimile: $A=\left\{\sqrt{n}\mid 40\le n<300\right\}$ și $B=A\bigcap\mathbb{Q}$. Dacă $a$ și $b$ sunt cel mai mic, respectiv cel mai mare element din $B$, atunci numărul $a+b$ este egal cu:

**A.** $\sqrt{40}+\sqrt{300}$ **B.** 24 **C.** 25 **D.** $\sqrt{40}+\sqrt{299}$ **E.** 23

**3.** (SGM) Dacă $x$ şi $y$ sunt numere întregi astfel încât numerele $\frac{2x+1}{y^2+2}$ şi $\frac{2y+1}{x^2+2}$ sunt naturale, atunci numărul $A=2x+3y$ este egal cu:

**A.** – 1 **B. 0** **C.** 1 **D.** 3 **E.** 5

**4.** Fie $x$ şi $y$ sunt numere întregi. Valoarea minimă a expresiei $E(x,y)=x^2+4y^2+4x+4y+10$ este egală cu:

**A.** 9 **B.** 5 **C. 6** **D.** 8 **E.** 7

**5.** Se consideră mulţimea $A=\left\{k\cdot(k+1)\mid 10\le k\le 19, k\in\mathbb{N}\right\}$. Suma inverselor elementelor mulţimii $A$ este egală cu:

**A.** $\frac{1}{15}$ **B.** $\frac{1}{19}$ **C.** $\frac{1}{20}$ **D.** $\frac{1}{18}$ **E.** $\frac{1}{21}$

**6.** Se consideră mulţimile $A=\{2,4,6,8,10,12,14,16\}, B=\{5,7,9,11,13,15,17\}$ şi $C=\{x+y\mid x\in A, y\in B\}$. Cardinalul mulțimii $C$ este egal cu:

**A.** 31 **B. 1**5 **C.** 12 **D.** 26 **E.** 14

**7.** Dacă numărul real $x$ verifică relaţia $x+\frac{1}{x}=3$, atunci numărul $S=x^3+\frac{1}{x^3}$ este egal cu:

**A.** 18 **B.** 24 **C.** 27 **D.** $9+6\sqrt{5}$ **E.** $9\sqrt{5}$

**8.** Cel mai mic număr întreg $a$, pentru care mulţimea $M=\left(-\infty,\frac{3a+1}{2}\right)\cap\left(\frac{2a-1}{5},+\infty\right)$ conţine exact trei numere întregi, este egal cu:

**A.** 1 **B.** – 1 **C.** 3 **D.** 0 **E.** 2

**9.** Fie $n\in\mathbb{N}$ se consideră mulţimea $A_n=\left\{a\in\mathbb{Z}\mid |3n+1-a|\le n\right\}$. Numărul elementelor mulţimii $A_{1009}$ este egal cu:

**A.** 2021 **B.** 2017 **C.** 2020 **D.** 2019 **E.** 2018

**10.** Stabiliţi câte dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(a) Suma a două numere iraţionale este un număr iraţional.
(b) Suma a două numere raţionale este un număr raţional.
(c) Produsul a două numere iraţionale este un număr iraţional.
(d) Produsul a două numere raţionale este un număr raţional.
(e) Raportul dintre un număr raţional nenul şi unul iraţional este un număr iraţional.

**A.** 4 **B.** 5 **C.** 2 **D. 3** **E.** 1

**11.** Dacă 8 puncte coplanare determină 26 de drepte distincte, stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

(a) Oricare trei puncte sunt necoliniare.
(b) Există un singur triplet de puncte coliniare.
(c) Există două triplete de puncte coliniare.
(d) Exact patru puncte sunt coliniare.
(e) Exact cinci puncte sunt coliniare.

**A.** (a) **B.** (b) **C.** (c) **D.** (d) **E.** (e)

**12.** Un poliedru are 10 vârfuri şi 6 feţe. Numărul muchiilor acestui poliedru este egal cu:

**A.** 14 **B.** 16 **C.** 12 **D.** 18 **E.** 10

**13.** Se consideră 10 drepte în spaţiu, oricare trei necoplanare şi oricare două concurente. Numărul planelor determinate de cele 10 drepte este egal cu:

**A.** 120 **B.** 110 **C.** 45 **D.** 100 **E.** 90

**14.** Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=3, AD=4$ şi $AA'=12$. Dacă $AC' \cap (BDA') = \{M\}$, atunci distanţa $AM$ este egală cu:

**A.** $\frac{13}{3}$ **B.** 5 **C.** 4 **D.** $\frac{13}{2}$ **E.** $\frac{25}{6}$

**15.** Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=5, AD=12$ şi $AA'=13\sqrt{3}$. Dacă $M$ este un punct în interiorul paralelipipedului, iar $a, b, c, d, e, f$ sunt distanţele de la $M$ la feţele paralelipipedului astfel încât $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=338$, atunci cardinalul mulţimii $\{a,b,c,d,e,f\}$ este egal cu:

**A.** 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 6 **E.** 4

**16.** Numărul posibilităţilor de a colora vârfurile unui cub, folosind culorile galben sau roşu, este egal cu:

**A.** 64 **B.** 256 **C.** 128 **D.** 512 **E.** 16

**17.** Într-un plan $\alpha$ considerăm punctele fixe $A$ şi $B$, iar $M \in \alpha$ un punct astfel încât $m(\sphericalangle AMB)=90^o$. Dacă $P$ este un punct care nu aparţine planului $\alpha$ şi $PA=PB=PM=AB=\sqrt{108}$, atunci distanţa de la $P$ la planul $\alpha$ este egală cu:

**A. 9** **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** 10 **D.** $4\sqrt{3}$ **E.** $3\sqrt{7}$

**18.** Într-un plan $\alpha$ se consideră punctele $A$, $B$ şi $C$ astfel încât $AB=10, BC=8, CA=6$. Dacă $P$ este un punct care nu aparţine planului $\alpha$ şi $PC \perp \alpha, PC=\frac{18}{5}$, atunci distanţa de la $P$ la dreapta $AB$ este egală cu:

**A. 6** **B. 7** **C.** $\frac{31}{5}$ **D.** $\frac{36}{5}$ **E.** 8

**19.** Într-un plan $\alpha$ se consideră punctele $A$, $B$ şi $C$ astfel încât $AB=BC=3, CA=4$. De aceeaşi parte a planului $\alpha$ se consideră punctele $M, N, P$ astfel încât $MA \perp \alpha, NB \perp \alpha, PC \perp \alpha$ şi $MA=PC=13, NB=17$. Perimetrul triunghiului $MNP$ este egal cu:

**A.** 15 **B.** 10 **C.** $10+3\sqrt{2}$ **D.** $8+5\sqrt{2}$ **E.** 14

**20.** Într-un plan $\alpha$ se consideră punctele $A$, $B$ şi $C$ astfel încât $AB=\sqrt{5}, BC=\sqrt{3}, CA=\sqrt{2}$ şi $D \in (AB)$ cu $CD \perp AB$. Dacă $P$ este un punct care nu aparţine planului $\alpha$ şi $PC \perp \alpha, PC=\frac{3\sqrt{10}}{5}$, atunci măsura unghiului $\sphericalangle PDC$ este egală cu:

**A.** $45^o$ **B.** $30^o$ **C.** $60^o$ **D.** $90^o$ **E.** $75^o$

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**
- Timpul de lucru este 120 minute
- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a IX-a – Enunţuri

**1.** Fie $x, y \in \mathbb{R}$ şi $|2x+1| \le 10$, $|3y-2| \le 11$. Valoarea minimă a expresiei $E(x,y) = 3x + 2y$ este egală cu:

**A.** $-\frac{49}{2}$ **B.** $-\frac{45}{2}$ **C.** $-\frac{41}{2}$ **D.** $-\frac{49}{6}$ **E.** $-\frac{41}{6}$

**2.** Partea întreagă a numărului $a = \frac{18}{\sqrt{10}-1}$ este egală cu:

**A.** 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9 **E.** 10

**3.** Suma soluţiilor ecuaţiei $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$ este egală cu:

**A.** – 15 **B.** – 13 **C. – 11** **D.** – 9 **E.** – 4

**4.** Fie predicatul $p(x,y): "3x + 4y^2 = 1"$, $x, y \in \mathbb{R}$ . Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii este adevărată:

**A.** $(\exists y)\, p(1,y)$ **B.** $(\forall y)\, p(\sqrt{2}, y)$ **C.** $(\forall x)(\exists y)\, p(x,y)$ **D.** $(\forall y)(\exists x)\, p(x,y)$ **E.** $(\exists x)(\forall y)\, p(x,y)$

**5.** Numărul numerelor de patru cifre, care au produsul ultimelor două cifre egal cu 0, este egal cu:

**A.** 270 **B.** 400 **C.** 1710 **D.**1890 **E.**1980

**6.** Se consideră predicatul $q(x,y): "x - 3y = 4"$, $x, y \in \mathbb{Z}$ . Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii este adevărată:

**A.** $(\exists y) q(2021, y)$ **B.** $(\forall x)(\exists y) q(x,y)$ **C.** $(\forall y)(\exists x) q(x,y)$ **D.** $(\exists x)(\forall y) q(x,y)$ **E.** $(\exists y)(\forall x) q(x,y)$

**7.** Numărul elementelor mulţimii $T = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n = 4 \cdot \left[\sqrt{n}\right] - 3 \right\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*, este egal cu:

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.**5 **E.**7

**8.** Produsul elementelor mulţimii $S = \left\{ x \in (0,3) \mid \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = 2x \right\}$ , unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real $a$ , este egal cu:

**A.** $\frac{27}{8}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{16}$ **D.** $\frac{3}{2}$ **E.** $\frac{15}{4}$

**9.** Numărul modalităţilor de a colora vârfurile unui triunghi cu una dintre culorile roşu, orange, galben, verde, albastru, indigo şi violet, astfel încât fiecare vârf să fie colorat cu altă culoare, este egal cu:

**A.** 343 **B.** 264 **C.** 210 **D.** 64 **E.** 18

**10.** Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ şi $abc = \sqrt{3}$ . Valoarea minimă a expresiei $E = (a+b)(b+c)(c+a)$ este egală cu:

**A.** $\sqrt{216}$ **B.** $\sqrt{192}$ **C.** $\sqrt{147}$ **D.** $\sqrt{108}$ **E.** $\sqrt{75}$

**11.** Pentru orice număr natural nenul *n* se notează $S_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ . Partea întreagă a numărului real $S_{2021}$ este egală cu:

**A.** 1 **B.** 0 **C.** 1010 **D.** 3 **E.** 1011

**12.** Suma elementelor mulţimii $M = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{2n^2+2n+5}{2n+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ este egală cu:

**A.** – 4 **B.** – 3 **C.** – 2 **D.** 0 **E.** 1

**13.** Numărul elementelor mulţimii $P = \left\{ k \in \mathbb{Z} \mid 1 \le \left[\frac{2k}{3}\right] < 2021 \right\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$ , este egal cu:

**A.** 3031 **B.** 3030 **C.** 3029 **D.** 2029 **E.** 2020

**14.** Dacă $a,b \in \mathbb{R}$ şi $a\sqrt{5}+b\sqrt{8}=\sqrt{26}$ , atunci valoarea minimă a sumei $s=a^2+b^2$ este egală cu:

**A.** 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 2 **E.** $\sqrt{13}$

**Problemele 15 – 20 se referă la următorul enunţ:**

Pe laturile *(AB), (AC)* şi *(BC)* ale unui triunghi *ABC* se consideră punctele *D, E,* respectiv *F*; se notează cu *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*, cu *M* mijlocul laturii *(BC),* cu *N* mijlocul segmentului *(AG)* şi cu $a=BC, b=CA, c=AB$ lungimile laturilor triunghiului *ABC.*

**15.** Numărul real *k* pentru care este adevărată egalitatea $3\cdot\overrightarrow{GB}+3\cdot\overrightarrow{GC}+k\cdot\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ este egal cu:

**A.** – 3 **B.** – 2 **C.** 1 **D.** 2 **E.** 3

**16.** Dacă $\overrightarrow{CE} = p\cdot\overrightarrow{EA}$ şi punctele *B, N, E* sunt coliniare, atunci numărul real *p* este egal cu:

**A.** $\frac{16}{5}$ **B.** 3 **C.** $\frac{17}{4}$ **D.** 4 **E.** $-4$

**17.** Dacă $a=10, b=8, c=6$ , atunci lungimea segmentului *(AM)* este egală cu:

**A.** $\frac{11}{2}$ **B.** $\frac{21}{4}$ **C.** 5 D. $\frac{19}{4}$ **E.** 4

**18.** Dacă $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=r\cdot\overrightarrow{DG}$ , atunci numărul real *r* este egal cu:

**A.** 4 **B.** 3 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$ **E.** $\frac{3}{2}$

**19.** Dacă $(AF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ , stabiliţi care dintre următoarele inegalităţi este adevărată:

**A.** $BF \le \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}$ **B.** $BF \le \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$ **C.** $BF \ge \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}$ **D.** $BF \ge \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$ **E.** $BF \le \frac{a+c}{2\cdot\sqrt{bc}}$ .

**20.** Dacă $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ şi $DC \cap BE = \{P\}$ , atunci numărul raţional *t* pentru care este adevărată egalitatea $t\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ , este egal cu:

**A.** 1 **B.** – 1 **C.** $-\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$ **E.** $\frac{4}{3}$

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**
- Timpul de lucru este 120 minute
- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

**Clasa a X-a - Enunţuri**

**1.** Partea întreagă a numărului $a=\log_3 4+\log_4 27$ este egală cu:

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

**2.** Partea întreagă a numărului $b=\sqrt[4]{200}$ este egală cu:

**A.** 3 **B. 4** **C.** 5 **D.** 7 **E.** 9

**3.** Dacă $F(t)=t^3-9t^2+27t$ şi $u=3+\sqrt[3]{3}$ , atunci numărul $F(u)$ este egal cu:

**A.** $\sqrt[3]{9}$ **B.** 30 **C.** $6\cdot\sqrt[3]{3}$ **D.** 36 **E.** 81

**4.** Dacă $a_k=\left(\sqrt[4]{2}\right)^{60-k}\cdot\left(\sqrt[3]{5}\right)^k, k=\overline{1,60}$ , atunci numărul numerelor iraţionale din mulţimea $A=\{a_1,a_2,a_3,...,a_{60}\}$, este egal cu:

**A.** 56 **B.** 55 **C.** 30 **D.** 6 **E.** 5

**5.** Suma elementelor mulţimii $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2\cdot3^x+9\cdot2^x=6^x+18\right\}$ este egală cu:

**A.** $\frac{3}{2}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $\frac{5}{2}$ **E.** 6

**6.** Suma elementelor mulţimii $C=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \sqrt{x}+\sqrt[3]{9-x}=3\right\}$ este egală cu:

**A.** 9 **B.** 10 **C.** 37 **D.** 45 **E.** 46

**7.** Dacă $x\geq\frac{1}{2}$, $4y+\sqrt{2x+3}=5$ şi $8y+\sqrt{2x-1}=6$ atunci numărul $s=x+y$ este egal cu:

**A.** $\frac{7}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{4}$ **E.** 1

**8.** Dacă $a=\log_{16}9$ , atunci numărul $x=\log_6 24$ este egal cu:

**A.** $\frac{2a+1}{2a+2}$ **B.** $\frac{2a}{2a+3}$ **C.** $\frac{2a+2}{2a+1}$ **D.** $\frac{2a+3}{2a+1}$ **E.** $\frac{2a+1}{2a+3}$

**9.** Ordinea crescătoare a numerelor $m=\sqrt{3}, n=\sqrt[3]{4}, p=\sqrt[4]{5}$ este:

**A.** $m<p<n$ **B.** $m<n<p$ **C.** $n<p<m$ **D.** $n<m<p$ **E.** $p<n<m$

**10.** Se consideră funcţiile $f_k:\mathbb{R}\to(1,+\infty), k=\overline{1,4}$ definite prin $f_1(x)=2^x+1$, $f_2(x)=3+\sin x$, $f_3(x)=2+\log_2\left(1+x^2\right)$, $f_4(x)=\begin{cases}2-x, & x<1\\ 1+x^2, & x\geq1\end{cases}$. Stabiliţi care dintre funcţiile considerate sunt surjective.

**A.** $f_1, f_2$ **B.** $f_1, f_3$ **C.** $f_1, f_4$ **D.** $f_2, f_3$ **E.** $f_3, f_4$

**11.** Suma inverselor soluţiilor ecuaţiei $8x+2^{x+2}=32+x\cdot 2^{x}$ este egală cu:

**A.** $\frac{7}{12}$ **B.** $\frac{5}{12}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$ **E.** $\frac{5}{6}$

**12.** Numărul funcţiilor injective $f:\{1,2,3,4\}\to\{5,6,7,8,9\}$ este egal cu:

**A.** 0 **B.** 24 **C.** 120 **D.** 256 **E.** 625

**13.** Mulţimea *M*, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to M$, $f(x)=\frac{x+2}{x^2+5}$ este surjectivă, este egală cu:

**A.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ **B.** $\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{4}\right]$ **C.** $\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]$ **D.** $\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{7}\right]$ **E.** $\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{2}\right]$

**14.** Diametrul cercului circumscris unui triunghi *ABC* în care $BC=8$ şi $\cos A=\frac{3}{5}$ este egal cu:

**A.** 10 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 9 **E.** 5

**15.** Dacă $u=\sin\frac{27\pi}{4}$, atunci numărul $v=4u^2$ este egal cu:

**A.** 4 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 6 **E.** 8

**16.** Funcţia $f:\mathbb{R}\to(4,+\infty)$, $f(x)=64^x+16^x+4$ este bijectivă, deci inversabilă, inversa ei fiind funcţia *g*. Numărul $A=g(16)+g(84)$ este egal cu:

**A.** $\frac{3}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{11}{2}$ **D.** 48 **E.** 100

**17.** Se consideră expresia $E(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}}$, $x\in(0,+\infty)$. Numărul $E(243)$ este egal cu:

**A.** 9 **B.** 16 **C.** 27 **D.** 64 **E.** 81

**18.** Suma elementelor mulţimii $P=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \log_{3x}2+\log_8 6x=\frac{5}{3}\right\}$ este egală cu:

**A.** $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{5}{12}$ D. $\frac{10}{3}$ **E.** $\frac{3}{4}$

**19.** Se consideră numerele $a,b,c\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^x=bc$, $b^y=ca$, $c^z=ab$. Numărul $t=xyz-x-y-z$ este egal cu:

**A.** 0 **B.** 2 **C.** $a+b+c$ **D.** 1 **E.** $abc-a-b-c$

**20.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 2\\ 4x-m, & x>2\end{cases}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-m, & x\le 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$. Suma tuturor numerelor întregi *m* pentru care *f* este injectivă, iar *g* este surjectivă, este egală cu:

**A.** 9 **B.** 15 **C.** 14 **D.** 12 **E.** 16

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**
- Timpul de lucru este 120 minute
- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a XI-a – Enunţuri

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 0 & 4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Dacă $A\cdot X\cdot B=C$, atunci suma elementelor matricei $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este egală cu:

**A.** $-2$ **B.** $1$ **C.** $-1$ **D.** $2$ **E.** $0$

**2.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Dacă $A^3=m\cdot A+n\cdot I_2$, atunci numărul întreg $p=m-n$ este egal cu:

**A.** – 4 **B.** 8 **C.** 28 **D.** 32 **E.** 12

**3.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Suma elementelor matricei $A^{10}$ este egală cu:

**A.** 4608 **B.** 23040 **C. 14848** **D.** 27648 **E.** 26624

**4.** Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $G=\{X(a)=I_2+a\cdot M \mid a\in\mathbb{R}\}$. Dacă $X(a), X(b)\in G$ şi $X(a)\cdot X(b)=X(c)$, atunci numărul $c$ este egal cu:

**A.** $a+b$ **B.** $a+b+2ab$ **C.** $a+b-ab$ **D.** $a+b+3ab$ **E.** $a+b+ab$

**5.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & m & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Numărul numerelor întregi $m$ pentru care matricea considerată este inversabilă, pentru orice număr real $x$, este egal cu:

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

**6.** Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}x-1 & 1 & -2\\ -2 & x-1 & 1\\ 1 & -2 & x-1\end{vmatrix}$, $x\in\mathbb{C}$. Suma soluţiilor complexe **nereale** ale ecuaţiei $D(x)=0$ este egală cu:

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** $2+2i$ **E.** $4-2i$

**7.** În reperul $xOy$ considerăm punctele $A(1,0), B(3,1), C(2,4), D(-1,3)$. Aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu:

**A.** 8 **B.** 16 **C.** 10 **D.**18 **E.**9

**8.** Folosind notaţiile uzuale pentru lungimile laturilor şi lungimile înălţimilor unui triunghi $ABC$, pentru care lungimea razei cercului circumscris este egală cu 4, determinantul $D=\begin{vmatrix}1 & a & h_a\\ 1 & b & h_b\\ 1 & c & h_c\end{vmatrix}$ este egal cu:

**A.** $4(c-b)(c-a)(b-a)$ **B.** $\dfrac{(c-b)(c-a)(b-a)}{8}$ **C.** $\dfrac{(c-b)(c-a)(b-a)}{4}$ **D.** $8abc$ **E.** $4abc$

**9.** Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A \neq B,$ astfel încât $A + B = A \cdot B$ şi pentru care există $k \in \mathbb{N}, k \geq 3,$ astfel încât $A + B + B^2 + ... + B^{k-1} = O_2$. Stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

**A.** $A^k = O_2$ **B.** $A^k = I_2$ **C.** $B^k = O_2$ **D.** $B^k = I_2$ **E.** $A^k = B^k$

**10.** Dacă $x \in (0, +\infty), A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\det\left(A^2 + x \cdot I_2\right) = 0,$ atunci numărul $d = \det\left(A^2 + A + x \cdot I_2\right)$ este egal cu:

**A.** 0 **B.** $x$ **C.** 1 **D.** $1 + x$ **E.** $x^2$

**11.** Dacă $L_1 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + x - 2}$ şi $L_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \ln(1 + 3x)$, atunci numărul $L_3 = L_1 \cdot L_2$ este egal cu:

**A.** 4 **B.** $4e^3$ **C.** $3e$ **D.** $e^4$ **E.** 3

**12.** Dacă $a = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 4x} - 1}{3x}$ şi $b = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} - 1}{4x}$ , atunci numărul $c = a \cdot b$ este egal cu:

**A.** $\dfrac{\ln 3}{3}$ **B.** $\dfrac{\ln 2}{2}$ **C.** $\dfrac{\ln 3}{2}$ **D.** $2 \cdot \ln 3$ **E.** $3 \cdot \ln 3$

**13.** Numărul $d = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\sin 3\pi t}{t}$ este egal cu:

**A.** 0 **B.** $\dfrac{\pi}{3}$ **C.** $3\pi$ **D.** $\dfrac{1}{3\pi}$ **E.** $\dfrac{3}{\pi}$

**14.** Valoarea limitei $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$ este egală cu:

**A.** $\dfrac{1}{2}$ **B.** $+\infty$ **C.** 2 **D.** 1 **E.** $e$

**15.** Numărul real $M = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4^n}{\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}}$ este egal cu:

**A.** $e^{-2}$ **B.** $e^{-1}$ **C.** **1** **D.** $e^2$ **E.** 0

**16.** Valoarea limitei $A = \lim\limits_{n \to \infty} \left[2 \cdot \ln(n + 3) - \ln\left(e \cdot n^2 + 2\right)\right]$ este egală cu:

**A.** $-2$ **B.** 0 **C.** $+\infty$ **D.** $-1$ **E.** $2e$

**17.** Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1, x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\sqrt{1 + x_n^2}}, n \geq 1.$ Numărul real $P = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n} \cdot x_n$ este egal cu:

**A.** 0 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 1 D. $\sqrt{3}$ **E.** 2

**18.** Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^n}{x^{2n}}, n \geq 1.$ . Limita $S = \lim\limits_{n \to \infty} (2n + 1) \cdot a_n$ este egală cu:

**A.** 1 **B.** 0 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $+\infty$ **E.** $\dfrac{\pi}{2}$

**19.** Se consideră şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x \cdot \sin nx)^{1/x^2}, n \geq 1.$ Limita $B = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ este egală cu:

**A.** 0 **B.** $\dfrac{e}{e - 1}$ **C.** $\dfrac{1}{e - 1}$ **D.** 1 **E.** $e$ .

**20.** Limita $U = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}$ este egală cu:

**A.** 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 7 **E.** $+\infty$

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Timpul de lucru este 120 minute
- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a XII-a – Enunţuri

**1.** Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie asociativă definită prin $x\circ y = xy-2x-2y+6,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$. Simetricul elementului $a=5$ faţă de legea considerată este egal cu:

**A.** $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{10}{3}$ **E.** $\frac{8}{3}$

**2.** Ordinul elementului $b=\widehat{18}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{100},+)$ este egal cu:

**A.** 54 **B. 24** **C.** 50 **D.** 42 **E.** 30

**3.** Pe mulţimea numerelor reale strict pozitive se defineşte o lege de compoziţie "$*$" care are următoarele proprietăţi:

$(a)\ \ (x+1)*x=1,\quad \forall x>0;$

$(b)\ \ (xy)*z=x(y*z),\quad \forall x,y,z>0.$

Numărul $6*2$ este egal cu: este egală cu:

**A.** 12 **B.** 8 **C.** 3 **D.** 2 **E.** 4

**4.** Se consideră o funcţie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ şi mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & f(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}^*\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Stabiliţi pentru care dintre următoarele funcţii mulţimea $G$ are o structură de grup abelian în raport cu înmulţirea matricelor:

**A.** $f(x)=\frac{1}{x}$ **B.** $f(x)=2(x+1)$ **C.** $f(x)=x+2$ **D.** $f(x)=3(x-1)$ **E.** $f(x)=x^2$

**5.** Se consideră pe mulţimea numerelor reale legea de compoziţie definită prin $x\bullet y=xy+2ax+by,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$, cu $a,b\in\mathbb{R}^*$. Dacă legea considerată este asociativă şi comutativă, atunci numărul $c=4a+3b$ este egal cu:

**A.** 11 **B.** 6 **C.** 5 **D.**10 **E.**7

**6.** Dacă legea de compoziţie definită prin $x\vartriangle y=xy+5x+ay+b,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$, admite element neutru, atunci numărul $d=a\cdot b$ este egal cu:

**A.** 10 **B.** 80 **C.** 100 **D.** 50 **E.** 40

**7.** Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie bijectivă, cu $f^{-1}(3)=5$, atunci elementul neutru al legii de compoziţie definite prin $x\bigcirc y=f\left(f^{-1}(x)+f^{-1}(y)-5\right),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$, este egal cu:

**A.** 0 **B.** 3 **C.** 8 **D.** 15 **E.**5

**8.** Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\perp y=2xy-2x-2y+3,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Suma soluţiilor ecuaţiei $x\perp x\perp x\perp x=x$ este egală cu:

**A.** $\frac{3}{2}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $\frac{7}{2}$ **E.** $\frac{5}{2}$

**9.** Dacă $n\in\mathbb{N}^*$ şi $(G,\cdot)$ este un grup multiplicativ cu $3n+1$ elemente, atunci, pentru orice $a\in G$, numărul soluţiilor ecuaţiei $x^3=a^2$ este egal cu:

**A. 0** **B.** 4 **C.** 1 **D.** $3n$ **E.** $n$

**10.** Se consideră un grup multiplicativ $(G,\cdot)$ având elementul neutru $e$, iar $a,b\in G\setminus\{e\}$ două elemente care verifică egalităţile $ab=b^4a$ şi $b^6=e.$ Stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

**A.** $b^{1000}=e$ **B.** $b^{2020}=e$ **C.** $b^{2000}=e$ **D.** $b^{2019}=e$ **E.** $b^{2021}=e$

**11.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-12x^2+18x+m$. Produsul tuturor numerelor întregi $m$ pentru care ecuaţia $f(x)=0$ are trei soluţii reale distincte este egal cu:

**A.** – 5040 **B.** 5040 **C.** – 720 **D.** 720 **E.** 0

**12.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-12x^2+18x-3.$ Dacă $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f'(x)$, stabiliţi care dintre următoarele inegalităţi este adevărată:

**A.** $G(\sqrt{2})<G(\sqrt{3})$ **B.** $G(0)>G(1)$ **C.** $G(3)>G(4)$ **D.** $G(\sqrt{10})<G(\sqrt{11})$ **E.** $G(\sqrt[3]{15})<G(\sqrt[3]{25})$

**13.** Dacă $H$ este o primitivă a funcţiei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+2x+2}$ pentru care $\ln 2+H(-1)=0$, atunci numărul $H(0)$ este egal cu:

**A.** $\dfrac{\pi}{4}$ **B.** $\dfrac{\pi}{2}$ **C.** $\dfrac{\pi}{2}+\ln 4$ **D.** $\dfrac{\pi}{4}-\ln 2$ **E.** $\pi+\ln 2$

**14.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x+2.$ Dacă $J$ este o primitivă a funcţiei $j:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ j(x)=f(tgx)$ şi $J(0)=0$, atunci numărul $J\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ este egal cu:

**A.** $\dfrac{\pi}{4}+\ln 2e$ **B.** $\dfrac{\pi}{4}-\ln 2$ **C.** $\dfrac{\pi}{4}+\ln 2$ **D.** $\dfrac{\pi}{4}-\ln 2e$ **E.** $\dfrac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$

**15.** Dacă $F_n$ este o primitivă a funcţiei $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x\cdot e^{nx},\ \ n\in\mathbb{N}^*$ şi $\dfrac{1}{n^2}+F_n(0)=0,$ atunci numărul $F_n(1)$ este egal cu:

**A.** $\dfrac{1+ne^n}{n^2}$ **B.** $\dfrac{1+(n-1)e^n}{n^2}$ **C.** $\dfrac{1+(n+1)e^n}{n^2}$ **D.** $\dfrac{(n-1)e^n}{n^2}$ **E.** $\dfrac{1+e^n}{n}$

**16.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+4$. Numărul $L=\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{f(2x)}{f(x)}dx$ este egal cu:

**A.** $e$ **B.** 4 **C. 0** **D.** 2 **E.** 1

**17.** Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă al cărei grafic conţine punctul $A(1,1)$ şi pentru care tangenta la grafic în orice punct $M(a,F(a))$ are panta $f(a)=2a+1,\ a\in\mathbb{R}$, atunci numărul $F(2)$ este egal cu:

**A. 1** **B.** 3 **C.** 5 D. 2 **E.** 4

**18.** Fie $G$ este o primitivă a funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{x(x^4+1)}$ cu $G(1)=0.$ Numărul $G(2)$ este egal cu:

**A.** $\dfrac{1}{4}\cdot\ln\dfrac{16}{17}$ **B.** $\dfrac{1}{4}\cdot\ln\dfrac{32}{17}$ **C.** $\dfrac{1}{4}\cdot\ln\dfrac{2}{17}$ **D.** $\dfrac{1}{4}\cdot\ln\dfrac{17}{16}$ **E.** $\dfrac{1}{4}\cdot\ln\dfrac{17}{2}$

**19.** Numărul $I=\displaystyle\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ este egal cu:

**A.** $4-\pi$ **B.** $4+\pi$ **C.** $2\pi$ **D.** $\pi+\ln 4$ **E.** $2-\pi$

**20.** Numărul $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 [nx]\,dx$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*, este egal cu:

**A.** 1 **B.** 0 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$ **E.** $\frac{2}{3}$

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a V-a – Grila de răspunsuri

| Problema | Răspunsul |
|---|---|
| 1. | A |
| 2. | C |
| 3. | D |
| 4. | D |
| 5. | C |
| 6. | C |
| 7. | B |
| 8. | A |
| 9. | C |
| 10. | D |
| 11. | A |
| 12. | A |
| 13. | E |
| 14. | C |
| 15. | D |
| 16. | B |
| 17. | D |
| 18. | C |
| 19. | B |
| 20. | A |

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a VI-a – Grila de răspunsuri

| Problema | Răspunsul |
|---|---|
| 1. | C |
| 2. | A |
| 3. | E |
| 4. | E |
| 5. | A |
| 6. | C |
| 7. | A |
| 8. | A |
| 9. | B |
| 10. | A |
| 11. | A |
| 12. | B |
| 13. | B |
| 14. | B |
| 15. | B |
| 16. | E |
| 17. | E |
| 18. | A |
| 19. | C |
| 20. | E |

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a VII-a – Grila de răspunsuri

| Problema | Răspunsul |
|---|---|
| 1. | B |
| 2. | C |
| 3. | D |
| 4. | A |
| 5. | B |
| 6. | D |
| 7. | C |
| 8. | C |
| 9. | B |
| 10. | E |
| 11. | A |
| 12. | C |
| 13. | C |
| 14. | B |
| 15. | B |
| 16. | E |
| 17. | C |
| 18. | C |
| 19. | E |
| 20. | E |

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a VIII-a – Grila de răspunsuri

| Problema | Răspunsul |
|---|---|
| 1. | C |
| 2. | B |
| 3. | E |
| 4. | C |
| 5. | C |
| 6. | E |
| 7. | A |
| 8. | E |
| 9. | D |
| 10. | D |
| 11. | B |
| 12. | A |
| 13. | C |
| 14. | A |
| 15. | C |
| 16. | B |
| 17. | A |
| 18. | A |
| 19. | E |
| 20. | C |

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a IX-a – Grila de răspunsuri

| Problema | Răspunsul |
|---|---|
| 1. | B |
| 2. | C |
| 3. | D |
| 4. | D |
| 5. | C |
| 6. | C |
| 7. | B |
| 8. | A |
| 9. | C |
| 10. | B |
| 11. | A |
| 12. | B |
| 13. | B |
| 14. | D |
| 15. | B |
| 16. | D |
| 17. | C |
| 18. | B |
| 19. | A |
| 20. | A |

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a X-a – Grila de răspunsuri

| Problema | Răspunsul |
|---|---|
| 1. | C |
| 2. | A |
| 3. | B |
| 4. | B |
| 5. | C |
| 6. | E |
| 7. | D |
| 8. | D |
| 9. | E |
| 10. | C |
| 11. | A |
| 12. | C |
| 13. | E |
| 14. | A |
| 15. | B |
| 16. | A |
| 17. | E |
| 18. | D |
| 19. | B |
| 20. | C |

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a XI-a – Grila de răspunsuri

| Problema | Răspunsul |
|---|---|
| 1. | B |
| 2. | C |
| 3. | D |
| 4. | E |
| 5. | C |
| 6. | A |
| 7. | E |
| 8. | B |
| 9. | C |
| 10. | B |
| 11. | A |
| 12. | A |
| 13. | A |
| 14. | D |
| 15. | B |
| 16. | D |
| 17. | C |
| 18. | B |
| 19. | B |
| 20. | C |

# Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România**
**Filiala Hunedoara**
**Etapa I – 20.02.2021**

**NOTĂ**

- Fiecare problemă admite un singur răspuns corect
- Fiecare răspuns corect primeşte 1p

## Clasa a XII-a – Grila de răspunsuri

| Problema | Răspunsul |
|---|---|
| 1. | B |
| 2. | C |
| 3. | D |
| 4. | D |
| 5. | C |
| 6. | C |
| 7. | B |
| 8. | E |
| 9. | C |
| 10. | D |
| 11. | A |
| 12. | D |
| 13. | B |
| 14. | A |
| 15. | D |
| 16. | D |
| 17. | C |
| 18. | B |
| 19. | A |
| 20. | C |