OLIMPIADA NAȚIONALĂ
GAZETA MATEMATICĂ
CLASA a X a
Etapa I

Timp de lucru:120 minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns

1.
Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_x(x^2+2x)+\log_{x^2}(x+2)=4$ este:
A. {2 ; -1} B. {2} C. $\varnothing$ D. {1 ; 2}

2.
Suma următoare este egală cu:

$$S=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2021}\log_2 k^4}+\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2021}\log_3 k^4}+\ldots+\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2021}\log_{2021} k^4}-\frac{1}{5}$$

A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{20}$ D. $\frac{1}{2021!}$

3.
Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$.
Suma elementelor mulțimii $\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)+x\cdot f^{-1}(x)=0\}$ este :
A. 0 B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

4.
Ecuația $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$ are soluția :
A. x=64 B. x=32 C. x=12 D. x=2

5.
Numărul soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{97-x}=5$ este :
A. 4 B. 1 C. 0 D. 2

6.
Numărul soluțiilor reale ale ecuației $e^{4x}+e^{2x}=12$ este :
A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

7.

Mulțimea $D\subseteq\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to D$, $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x^2-x+1}$ este surjectivă este:

A. $\mathbb{R}$ B. $\left(-\infty;-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{5}}{3};+\infty\right)$ C. $\left[-\frac{2\sqrt{5}}{3};\frac{2\sqrt{5}}{3}\right]$ D. $\left[\frac{7-2\sqrt{7}}{3};\frac{7+2\sqrt{7}}{3}\right]$

8.

Rezultatul calculului : $\frac{5}{1-3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}-\frac{17}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}-2\sqrt[3]{2}$ este:

A. 0 B. 2 C. 8 D. $-\sqrt[3]{2}$

9.

Dacă $\log_{40}100=a$, atunci $\log_{16}25$ în funcție de a este:

A. $\frac{3a+2}{2a+4}$ B. $\frac{3a+1}{a+2}$ C. $\frac{3a-1}{2a+3}$ D. $\frac{3a-2}{4-2a}$

10.

Partea întreagă a numărului $\log_2 3+\log_3 5+\log_5 8$ este:

A. 0 B. 4 C. 3 D. 5

11.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x^2-6x+m\right)$. Valoarea numărului real m astfel încât $f\left([1;5]\right)$ să fie interval de lungime egală cu $\ln 2$ este:

A. 2 B. 9 C. 13 D. 11

12.

Fie $a,b,c\in(0;1)$ și $x,y,z\in(0;+\infty)$ astfel încât $a=(bc)^x$, $b=(ca)^y$ si $c=(ab)^z$. Atunci $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$ este:

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 6

13.

Valorile reale ale lui x pentru care

$\sqrt{\left(\log_x 2+\log_2 x-2\right)\log_2 x}+\sqrt{\left(\log_x 2+\log_2 x+2\right)\log_2 x}=2$ sunt:

A. $(1;+\infty)$ B. $[1;2]\cup\{3\}$ C. $\left[\frac{1}{2};2\right]$ D. $\left[\frac{1}{2};2\right]-\{1\}$

14.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in(-\infty;1]\\(m+2)x+m, & x\in(1;+\infty)\end{cases}$. Valoarea numărului real m, astfel încât funcția f să fie bijectivă este:

A. 0 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

15.
Valoarea numărului $a = 2^{\log_6 18} \cdot 3^{\log_6 3}$ este:
A. 6 B. 12 C. 4 D. -4

16.
Fie funcțiile $f, g : □ \to □$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$ si $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le a \\ x+2a, & x > a \end{cases}$. Dacă $f \circ g$ este inversabilă, atunci *a* este:
A. 0 B. 1 C. 3 D. -1

17.
În $[0,\infty)$ ecuația $3^x + 4^x + 5^x + 10^x + 14^x + 21^x = 2^{x+1} + 2 \cdot 6^x + 2 \cdot 35^x$ are
A. o soluție B. nici o soluție C.o infinitate de soluții D. două soluții

18.
Fie mulțimea $A=\{x \in N^* \mid 5^{2x} \cdot 3^{2(1-x)} - 2 \cdot 3^{1-x} \cdot 5^{x+1} + 25 = 0\}$. Numărul de elemente ale mulțimii este :
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

19.
Numărul de numere naturale n care verifică relația $n=3[\sqrt{n}]+1$ este
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

20.
Se consideră funcțiile f,g,h:$□ \to □$ cu proprietățile :
g și h sunt bijective și f(n)=g(n)-h(n), $\forall$ n $\in □$.
Decideți care dintre afirmațiile următoare este adevărată :
A. f este o funcție bijectivă.
B. f este o funcție strict monotonă.
C. f este o funcție constantă.
D. f este o funcție injectivă.

Problemele au fost selectate de profesorii

Georgeta Balacea *de la Colegiul Național ”Vasile Alecsandri” din Galați*
și
Florin Antohe *de la Colegiul Național ”Vasile Alecsandri” din Galați.*