



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ
GAZETA MATEMATICĂ
CLASA a XI- a
Etapa I**



Timp de lucru: 120 minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1010 & 1011 & \dots & 2019 & 2020 \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2019 & 2 & \dots & 2018 & 2020 \end{pmatrix}$.

Numărul inversiunilor permutării σ este egal cu:

- A. 1010 B. $505 \cdot 1009$ C. $1019 \cdot 1010$ D. 2020

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, atunci $(A \cdot B)^{-1} - B^{-1} \cdot A^{-1}$ este matricea:

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Numărul de elemente ale mulțimii $\{A \in M_2(\mathbb{Q}) / \text{Tr}(^t A \cdot A) = 2\}$ este:

- A. 24 B. 6 C. 8 D. 16

4. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci A^{2020} este matricea

- A. $\begin{pmatrix} 2^{2020} & -1 \\ 1 & 2^{2020} \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -2^{1010} & 0 \\ 0 & -2^{1010} \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2^{1010} & 0 \\ 0 & 2^{1010} \end{pmatrix}$

5. Dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{Q})$ și verifică $\begin{cases} 2 \cdot X + 3 \cdot Y = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix} \\ 3 \cdot X - Y = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$ atunci $\det(X)$ are valoarea:

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 8

6. Numărul de elemente ale mulțimii $\{A \in M_2(\mathbb{Q}) / A^2 = 2025 \cdot I_2\}$ este:

- A. 2 B. 4 C. 45 D. infinit

7. Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ atunci suma elementelor matricei $1000 \cdot A^{-1}$ este:

- A. 1000 B. 2000 C. 1500 D. 0

8. Numărul de soluții din mulțimea numerelor naturale ale ecuației :

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & x^4+1 & 17 \\ x^2+x & x^4+x^2 & 20 \\ x^2 & x^4 & 16 \end{vmatrix} = 0 \text{ este:}$$

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 0

9. Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ este soluție a ecuației $X^9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, atunci partea întreagă a numărului $a+d$ este:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. Suma soluțiilor ecuației $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix} = 0$ este:

- A. 5 B. 4 C. 2 D. 6

11. Mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & x & 3 \\ 2x & -1 & x \\ m+1 & 2 & m \end{pmatrix}$ este inversabilă

$(\forall) x \in \mathbb{R}$ este:

- A. $(1,3) \cup (5,6)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$ C. $(0, \infty)$ D. $[0, 2]$

12. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2 \cdot n}{n^2 + n + 1} \right)^{\frac{n^2}{3 \cdot n + 1}}$ este:

- A. $\sqrt[3]{e}$ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. e

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} + 2 \cdot \sqrt{n+2} - 3 \cdot \sqrt{n+3})$ este:

- A. 0 B. -1 C. -2 D. 1

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \cdot \sqrt{n^2 + 2021 \cdot n} \right)$ este egală cu:

- A. 0 B. 1 C. nu există D. $\frac{1}{2}$

15. Dacă $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2 \cdot k - 1) \cdot (2 \cdot k + 1)}$ atunci:

- A. $L = 0$ B. $L \in [2, 3)$ C. $L \in [1, 2)$ D. $L \in [0, 1)$

16. Dacă $x_n = 2021^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ este egală cu:

- A. ∞ B. 1 C. 2021 D. 2020

17. Valoarea $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{n^2 + 4 \cdot n} \right\}$ (unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x) este:

- A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2 \cdot \sqrt[k]{k}}{(n^2 + n) \cdot (2 \cdot n + 1)}$ este egală cu:

- A. 1 B. 0 C. $\frac{1}{6}$ D. 1

19. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relația de recurență:

$x_1 = 1$, $\frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot x_n \cdot x_{n+1} = x_n - x_{n+1}$, $(\forall) n \geq 1$. Dacă produsul $x_9 \cdot x_{17} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$,

$b \neq 0$, $(a, b) = 1$ atunci $a + b$ este:

- A. 26 B. 30 C. 28 D. 14

20. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} - \sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{e}}$ este:

- A. $\frac{1 - \ln 2}{\ln 3 - 1}$ B. $\ln \frac{e^2}{6}$ C. $\log_3 \frac{e}{2}$ D. $\frac{\ln(e-2)}{\ln(3-e)}$

Problemele au fost selectate de profesorii

Radu Marius Tătaru de la Colegiul Național "Vasile Alecsandri" din Galați
și
Mihai Dragoș Totolici de la Colegiul Național "Vasile Alecsandri" din Galați.