OLIMPIADA NAȚIONALĂ
GAZETA MATEMATICĂ
CLASA a XII- a
Etapa I

Timp de lucru:120 minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns.

1. Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ notăm $\hat{x}$ și $\tilde{x}$ clasele lui x în $\mathbb{Z}_7$ și respectiv $\mathbb{Z}_5$. Să se determine toate numerele $x \in \mathbb{Z}$, $1 \leq x \leq 25$, astfel încât $\hat{x}^2 - \hat{5}\hat{x} + \hat{6} = \hat{0}$ și $\tilde{3}\tilde{x}^2 + \tilde{x} = \tilde{0}$.

A. 8; 10; 23 **B.** 3; 10 **C.** 3; 10;25 **D.** 3; 10; 23

2. Numărul legilor de compoziție comutative definite pe o mulțime cu 5 elemente este:

A. 5^{25} **B.** 5^{15} **C.** 5^{10} **D.** 5^{5}

3. Pe mulţimea $G = [0,1)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = \{x + y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracţionară a numărului real a . Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x * x * x = \frac{3}{4}$ este:

A. $S = \left\{\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}\right\}$ **B.** $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{11}{12}\right\}$

C. $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}\right\}$ **D.** $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}\right\}$

4. Mulţimea elementelor inversabile ale monoidului $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$, $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi / a, b \in \mathbb{Z}\}$, este:

A. $\{-1, 1, i, -i\}$ **B.** $\{1 - i, 1 + i\}$ **C.** $\{1, i\}$ **D.** $\{1, -1\}$

5. Fie $(A,\square)$ un grup, unde $A=\{e,a,b,c,d\}$, e este elementul neutru. Dacă $a\square b=d$, $c\square a=e$, $d\square c=b$, atunci numărul a^{2019} este egal cu:

A. a **B.** b **C.** c **D.** d

6. Mulţimea $G=\{z\in\square \ / \ a\cdot z^n=b\}, a\in\square^*, b\in\square$ este un subgrup al grupului $(\square^*,\cdot)$, dacă:

A. $a=-b$ **B.** $a=b$ **C.** $|a|=|b|$ **D.** $b=0$

7. Pe mulțimea $G=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție „ $*$ ” astfel:
$x*y=\sqrt[3]{x^3\cdot y^3-a\cdot x^3-b\cdot y^3+c}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}^*$. Știind că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă și admite elementul neutru $\sqrt[3]{c}$, calculați $\frac{(\sqrt[3]{3}*\sqrt[3]{4}*\sqrt[3]{5}*\ldots*\sqrt[3]{2021})^3-1}{(\sqrt[3]{3}*\sqrt[3]{4}*\sqrt[3]{5}*\ldots*\sqrt[3]{2020})^3-1}$.

A. 2020 **B.** 2021 **C.** $\frac{2021}{2020}$ **D.** 2020^3

8. Fie $a\in\mathbb{R}$ fixat și $b>0$. Pentru $x,y\in[a-b,a+b]$ se definește
$x*y=x\cdot y-a\cdot(x+y)+a^2+a$. Pentru ce valori ale lui b „ $*$ ” este o lege de compoziție pe mulțimea $[a-b,a+b]$?

A. $b\in(0;1]$ **B.** $b=1$ **C.** $b\in(0;2)$ **D.** $b\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}$

9. Se consideră mulțimile

$\square(i)=\{a+bi \ / \ a,b\in\square\}$,

$\square(\varepsilon)=\{a+b\varepsilon \ / \ a,b\in\square\}$ unde $\varepsilon\in\square$ astfel încât $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$,

$\square(i)=\{a+bi \ / \ a,b\in\square\}$.

Grupul $(\square(i),+)$ este izomorf cu grupul:

A. $(\square(\varepsilon),+)$ **B.** $(\square,+)$ **C.** $(\square(\mathrm{i}),+)$ **D.** $(\square,+)$

10. Fie $(G,\square)$ grup şi $a,b\in G$. Se ştie că suma dintre numărul elementelor lui G care comută cu a şi numărul elementelor din G care comută cu b este un număr prim p.

Numărul elementelor care comută şi cu a şi cu b este:

A. p **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

11. Numărul $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$ este egal cu:

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ **B**. $\ln 2-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}\ln 2-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

12. Se consideră funcția $f: [1; 3] \to [2; 5]$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [1; 2] \\ 3 \cdot x - 4, & x \in (2; 3] \end{cases}$.

Atunci:

A. f admite primitive **B.** f are Proprietatea lui Darboux

C. f este funcție monotonă **D**. f este integrabilă pe [1;3]

13. Fie funcţia continuă $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$ şi $F:[0,2]\to\mathbb{R}$ primitiva lui f care se anulează pentru $x=1$ ($\{x\}$ = partea fracţionară a numărului x).

Numărul $F(2)-F(0)$ este egal cu:

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C**. $\frac{1}{3}$ **D**. $\frac{5}{6}$

14. Fie $I_n=\int \cos^n x\cdot \sin nx\, dx$ şi $I_n=\mathrm{a}\cdot\cos^n x\cdot\cos nx+b\cdot I_{n-1}$ pentru oricare număr natural $n\geq 2$ şi oricare $x\in\mathbb{R}$. Atunci:

A. $a=-\frac{1}{2n}, b=\frac{1}{4}$ **B**. $a=-\frac{1}{2n}, b=\frac{1}{2}$

C. $a=-\frac{1}{2n}, b=-\frac{1}{2}$ **D.** $a=b=-1$

15. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to(0,+\infty)$ care admite primitiva F.

Ştiind că $F(x)=2021^x\cdot f(x)$, pentru orice $x\geq 0$ şi $f(0)=1$, atunci are loc egalitatea:

A. $f(1)=2021\cdot e^{\frac{2020}{2021\cdot\ln 2021}}$ **B**. $f(1)=\frac{1}{2021}\cdot e^{\frac{2021}{2020\cdot\ln 2021}}$

C. $f(1)=2021\cdot e^{\frac{2021}{2020\cdot\ln 2021}}$ **D.** $f(1)=\frac{1}{2021}\cdot e^{\frac{2020}{2021\cdot\ln 2021}}$

16. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{arctg\, x^2}{1+x^2}$ şi F o primitivă a sa care se anulează în $x_0=0$.

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ este:

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$ **B**. 0 **C.** $\dfrac{\pi}{2}$ **D.** $\dfrac{\pi^2}{8}$

17. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ și F o primitivă a sa. Atunci $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x\cdot f(x)}$ este:

A. e **B**. $+\infty$ **C**. 0 **D.** 1

18. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}\cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}$ și F primitiva funcției f pentru care $F(1)=1$. Atunci $F(2)$ este:

A. 2 **B.** $\frac{5}{12}\cdot e^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{5}{12}\cdot e^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}$ **D** . $-\frac{5}{12}\cdot e^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}$

19. Fie şirul $(I_n)_{n\ge2}, I_n=\int_0^1\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}dx$, n $\in\mathbb{N}$, n $\ge$ 2. Numărul I_2 este egal cu:

A. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B.** $\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$

C. $\dfrac{1}{2}+\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ **D.** $\dfrac{1}{2}+\ln 2$

20. Fie şirul $(I_n)_{n\ge2}, I_n=\int_0^1\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}dx$, n $\in\mathbb{N}$, n $\ge$ 2. Valoarea $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ este egală cu:

A. ∞ **B**. 0 **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D**. $\dfrac{1}{2}$

Problemele au fost selectate de profesorii

***Mirela Grigore** de la Colegiul Național ”Costache Negri” din Galați,*

***Ion Mocanu** de la Colegiul Economic ”Virgil Madgearu” din Galați*
și
***Alina Dumitrașcu** de la Liceul Teoretic ”Dunărea” din Galați.*