OLIMPIADA NAȚIONALĂ
GAZETA MATEMATICĂ
CLASA a IX- a
Etapa I

Timp de lucru:120 minue
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns

1. Suma soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - 2x \cdot [x] + 4 = 0$ este egală cu:

a) 4 b) 0 c) -3 d) 1

2. Fie $a, b \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $5\sqrt{2+\sqrt{3}} - a\sqrt{2-\sqrt{3}} - b\sqrt{2} = 0$, atunci:

a) $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$ b) $a + b \leq 5$ c) $a^2 + 2b^2 = 27$ d) $a - b = 1$

3. Cardinalul mulțimii $A = \left\{n \in \mathbb{Z} \middle| \frac{2n^2+4n+2}{n^2+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ este egal cu:

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

4. Fie numerele reale strict pozitive x, y și z astfel încât $x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \geq x + y + z$. Determinați minimul expresiei $E = x + y + z$.

a) 2 b) 1 c) 3 d) 6

5. Să se determine câte numere naturale n satisfac inegalitatea: $\left|\frac{3n}{n+3} - 1\right| < \frac{1}{3}$.

a) o infinitate b) 1 c) 2 d) niciunul

6. Se consideră predicatul $p(x, y)$: $2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{y} = 1, x, y \in \mathbb{R}$. Stabiliți care dintre următoarele propoziții este falsă:

a) $(\exists x)p(x, -1)$ b) $(\exists y)p(-1, y)$ c) $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ d) $(\exists y)(\forall x)p(x, y)$

7. Dacă $\frac{x}{x^2+x+1} = t \in \mathbb{R}^*$, atunci expresia $\frac{x^3}{x^6+x^3+1}$, în funcție de t este egală cu:

a) $\frac{t^3}{t^3+3t^2+1}$ b) $\frac{t^3}{3t^3-3t+1}$ c) $\frac{t^3}{t^3+t-1}$ d) $\frac{t^3}{t^3-3t^2+1}$

8. Se consideră în $\mathbb{R}$ ecuația: $[x] - \frac{2021}{\{x\}} = \{x\} - \frac{2021}{[x]}$. Numărul soluțiilor ecuației este:

a) 0 b) 1 c) 2 d) o infinitate

9. Cardinalul mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 - n + 31} \in \mathbb{N}\}$ este egal cu:

a) 0 b)4 c) 2 d) 1

10. Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive și distincte, ordonați crescător numerele:

$x = ab + bc + ac, y = a^2 + b^2 + c^2, z = \sqrt{3abc(a + b + c)}$ și $t = \frac{(a+b+c)^2}{3}$.

a) $z < x < t < y$ b) $x < t < z < y$ c) $x < y < z < t$ d) $y < t < x < z$

11. Dacă $2x^2 + 2y^2 = 5xy, x, y \in \mathbb{R}^*$, atunci $\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$ este egal cu:

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$

12. Câte soluții reale are ecuația: $|x^2 + x - 2| = x - 1$?

a) 4 b) 2 c) 3 d) 1

13. Partea fracționară a numărului: $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3}$ este egală cu:

a) $\sqrt{3} - 1$ b) $3 - 2\sqrt{2}$ c) 0,73 d) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3} - 7$

14. Determinați numărul elementelor mulțimii $B = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{n^2+7}{n^2+n+6}, n = \overline{1,100}\right\}$.

a) 0 b) 100 c) 98 d) 2

15. Fie trapezul $ABCD, AB \parallel CD$ și $\frac{AB}{CD} = k, k > 0$. Punctele M, N sunt mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$. Dacă $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AB}$, atunci α este egal cu:

a) $\frac{k-1}{2k}$ b)$\frac{2k-1}{k}$ c) $\frac{k-2}{2k}$ d) $\frac{2(k-1)}{k}$

16. Fie trapezul $ABCD, AB \parallel CD$ și $\frac{AB}{CD} = k, k > 0$. Punctele M, N sunt mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$. Dacă dreptele AB, CN *și* DM sunt concurente, atunci k este egal cu:

a) 1 b)2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$

17. Dacă A, B, C sunt trei puncte distincte din plan, atunci valoarea lui $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care vectorul $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ este independent de M este egală cu:

a) 5 b) 5 c) 1 d) 3

18. Fie A, B, C trei puncte distincte din plan, M mijlocul segmentului $[BC]$ și

$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\beta\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{BA}$, $\beta \in \mathbb{R}$, atunci β este:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) – 2

19. Punctele distincte $A_1, A_2, \ldots A_n$ sunt situate, în această ordine, pe dreapta d astfel încât $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots = A_{n-1}A_n$. Dacă O este un punct arbitrar din plan și $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \alpha\overrightarrow{OA_1} + \beta\overrightarrow{OA_n}$, atunci $\alpha - \beta$ este egal cu:

a) $\frac{n}{2}$ b) n c) $\frac{3n}{2}$ d) 0

20. Ordonați descrescător numerele reale a, b, c știind că:

$$a^2 - 2a\sqrt{3} + b^2 + b + c^2 + 7c + \frac{29}{2} = 0.$$

a) $b > c > a$ b) $a > c > b$ c) $a > b > c$ d) $b > a > c$

Problemele au fost selectate de profesorii

Mariana Coadă *de la Colegiul Național ”Vasile Alecsandri” din Galați*
și
Laura Ionela Dumitriu *de la Colegiul Național ”Vasile Alecsandri” din Galați.*