ONGM, Etapa I - Constanța, 20 februarie 2021

Clasa a XII-a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup de ordin $2021.$ Numărul soluțiilor comune ale ecuațiilor $x^{43}=e$ și $x^{47}=e$ este:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{+}^{*}$ izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)\simeq(\mathbb{R}_{+}^{*},\cdot)$ cu proprietatea $f(1)=2.$ Soluția ecuației $f(x)=\dfrac{1}{32}$ este:

A. $x=2$ **B.** $x=-5$ **C.** $x=-\dfrac{1}{2}$ **D.** $x=4$

3. Pe mulțimea $G=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(x)=ax^2+bx,a,b\in\mathbb{R}\}$ definim legea de compoziție $(f*g)(x)=x(f'(x)+g'(x)),\forall x\in\mathbb{R}.$ Atunci:

A. $(G,*)$ este grup necomutativ
B. G nu este parte stabilă a lui $F(\mathbb{R})=\{f\mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f$ derivabilă pe $\mathbb{R}\}$, în raport cu legea “$*$”
C. nu există element neutru al legii de compoziție
D. $(G,*)$ este monoid, dar nu este grup

4. Fie $m\in\mathbb{C}^{*}$. Pe $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=mz_1z_2-im(z_1+z_2)-m+i,z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Calculați suma modulelor valorilor lui m pentru care simetricul elementului $1+i$ este $2+i$.

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$

5. Fie $f:[0,1]\to\left[0,\dfrac{1}{2021}\right]$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2020}$ și fie $I=\int_0^{\frac{1}{2021}} f^{-1}(x)dx.$ Atunci

A. $I\in\left(-2021,\dfrac{1}{2021}\right)$ **B.** $I\in\left(\dfrac{1}{2021},2021\right)$ **C.** $I\in(2021,2022)$ **D.** $I\in(2022,\infty)$

6. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit astfel încât $\forall x\in G, x^{11}=e.$ Atunci ordinul lui G poate fi:

A. 1331 **B.** 131 **C.** 3113 **D.** 313

7. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_1^x t^{2021}\ln t\,dt.$ Valoarea limitei $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^{2023}}$ este:

A. $L=\infty$ **B.** $L=\dfrac{1}{2}$ **C.** $L=1$ **D.** $L=0$

8. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_1^x \dfrac{1-t}{t^2}dt.$ Atunci:

A. $f(e)=-\dfrac{1}{e}$ **B.** $f(e)=1$ **C.** $f(e)=-1$ **D.** $f(e)=-e$

9. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^{x^2} e^{t^2}dt.$ Atunci:

- **A.** f are două puncte de extrem local
- **B.** f este crescătoare pe $\mathbb{R}$
- **C.** $f'(0)=3$
- **D.** f este convexă pe $\mathbb{R}$

10. Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6\ln x-\int_1^{x^2}\dfrac{e^t}{t}dt.$ Imaginea funcției f este:

A. $[0,\infty)$ **B.** $\left[0, f(\sqrt{\ln 3})\right]$ **C.** $\left(-\infty, f(\sqrt{\ln 3})\right]$ **D.** $(-e,1]$

11. Fie $a,b>0$ astfel încât $\int_1^e \frac{ax-be^x+bxe^x}{ax^2\ln x+bxe^x}dx=e+\ln 2-2.$ Valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este:

A. 1 **B.** e **C.** $\sqrt{e^3}$ **D.** e^{e-1}

12. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{(1+x^2)(1+x^3)}$ și $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt-\int_1^x t^3 f(t)dt+\ln\sqrt{x}.$

Ecuația tangentei la graficul funcției g în punctul de abscisă $x=e$ este:

A. $ex-y+1=0$ **B.** $x+ey=0$ **C.** $x-2ey=0$ **D.** $-ex+2y+1=0$

13. Cea mai mică valoare posibilă a integralei $\int_{-1}^{1}(x^2-a-bx)^2dx,$ pentru $a,b\in\mathbb{R}$, este:

A. $\frac{1}{45}$ **B.** $\frac{8}{45}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** 1

14. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{(x^2+1)(x^{2021}+1)}dx$ este:

A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** $\frac{\pi}{8}$ **D.** $\frac{\pi}{4}$

15. Dacă a,b,c sunt numere reale astfel încât $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\int_0^x(a+b\cos 2t+c\cos 3t)dt=-\frac{3}{2},$ atunci

$S=|a|+|b|+|c|$ are valoarea:

A. $S=18$ **B.** $S=16$ **C.** $S=14$ **D.** $S=20$

16. Fie $a>1$ astfel încât o primitivă a funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{a^x(x\ln a+1)}{(a^x+x\ln a+2)^2}$ este $F(x)=-\dfrac{x+2}{e^x+x+2}$. Atunci a poate lua valoarea:

A. $\sqrt{e}$ **B.** e **C.** $e\sqrt{e}$ **D.** e^2

17. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^6+3x^4+x^2}}$. Mulțimea primitivelor funcției f este:

A. $\ln\left(\dfrac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right)+C$

B. $\ln\left(\dfrac{x^2+1+\sqrt{x^4+7x^2+1}}{x}\right)+C$

C. $\ln\left(\dfrac{x^2-1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right)+C$

D. $\ln\left(\dfrac{x^2+\sqrt{x^4+7x^2+1}}{x}\right)+C$

18. Presupunem cunoscut faptul că mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$, înzestrată cu legea de compoziție $x*y=\sqrt[n]{y^{\log_n x}},\forall x,y\in G$ unde $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$ este fixat, formează o structură de grup. Dacă x' este simetricul elementului x din G, atunci x' este:

A. $n^{2\log_x n}$ **B.** $n^{n\log_x n}$ **C.** $n^{n^2\log_x n}$ **D.** $n^2\log_x n$

19. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Definim funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$. Știind că g este o funcție descrescătoare, atunci rezultatul calculului $f(1)+f(e)+f(e^2)$ este:

A. $-e$ **B.** -1 **C.** 0 **D.** e

20. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$. Folosind, eventual faptul că $(\mathbb{R},*)\simeq(\mathbb{R},+)$, atunci $x*x*x*\cdots*x$, unde x este n ori, $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, este:

A. $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-n}}{2}$ **B.** $\dfrac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)^n-\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-n}}{2}$ **C.** $2x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n$

D. $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-n}}{2}$

21. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + ax + by + c$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se consideră mulțimea $G = (1, \infty)$. Dacă $(G, \circ)$ este grup, atunci $a^3 + b^3 + c^3$ este egal cu:

A. -2 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 8

22. Fie S mulțimea soluțiilor reale și strict pozitive ale ecuației $x + \dfrac{1}{x} = \int_0^x e^{t^2} dt$. Atunci:

A. $S \bigcap (0,1) \neq \varnothing$ **B.** $S \subset \mathbb{N}$ **C.** $S \bigcap (1,2) \neq \varnothing$ **D.** $S \bigcap (2,\infty) \neq \varnothing$

23. Fie $G = (-1,1)$. Pe intervalul G se definește $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Folosind eventual faptul că $(G,*) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, calculați: $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{4} * \dfrac{1}{6} * \cdots * \dfrac{1}{2020} = ?$

A. $\dfrac{1010}{1011}$ **B.** $\dfrac{2020}{2021}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1012}{1013}$

24. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$. Dacă F este primitiva lui f care se anulează în $x = 0$, atunci:

A. $F(1) = \pi + \ln 2$ **B.** $F(1) = \pi - 2\ln 2$ **C.** $F(1) = \pi + \ln\sqrt{2}$ **D.** $F(1) = \pi + \ln 4$

Raspunsuri:

1. B
2. B
3. C
4. D
5. A
6. A
7. D
8. A
9. D
10. C
11. D
12. C
13. B
14. D
15. A
16. B
17. A
18. C
19. C
20. D
21. B
22. C
23. A
24. B