ONGM, Etapa I - Constanța, 20 februarie 2021

Clasa a X-a

1. Fie $f: D \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \log_3[\log_2(x-1)]$,unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f. Atunci D este:

a) $(1, \infty)$ **b)** $(2, \infty)$ **c)** $(1,3)$ **d)** $\boldsymbol{R}$

2. Suma soluțiilor ecuației $5 \cdot 16^x - 9 \cdot 20^x + 4 \cdot 25^x = 0$ este:

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** $\frac{9}{5}$

3. Rezultatul calculului $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}} + 2(xy)^{\frac{1}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}}}$ pentru $x = 2$ și $y = 3$ este:

a) 1 **b)** $2^{\frac{1}{3}} - 24^{\frac{1}{3}}$ **c)** $6^{\frac{1}{3}}$ **d)** $1 - 16^{\frac{1}{3}}$

4. Valoarea expresiei $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ este

a) $2\sqrt{5}$ **b)** 2 **c)** $\sqrt{5}$ **d)** 1

5. Dacă $\lg\sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$, $\lg x$ sunt în progresie aritmetică, atunci:

a) $x \in (10, 2021)$ **b)** $x \in (0, 1)$ **c)** $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ **d)** $x \in [3, 10]$

6. Funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{Z}$ are proprietatea $2^{f(x)-1} \le x < 2^{f(x)}$, $(\forall) x > 0$. Atunci $f(2021)$ este

a) 1 **b)** 12 **c)** 11 **d)** 10

7. Dacă $\sqrt{24-x^3} - \sqrt{8-x^3} = 2$, atunci $\sqrt{24-x^3} + \sqrt{8-x^3}$ este egal cu

a) 8 **b)** $\sqrt[3]{32}$ **c)** 10 **d)** 4

8. Fie $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k^2-k}}$. Dacă $a = 2021 - S_{2021}$, atunci partea întreagă a numărului a este:

a) 2020 **b)** 2021 **c)** 0 **d)** -1

9. Fie $a,b,c,n \in (0,\infty) \setminus \{1\}$. Dacă $\log_a n = x$, $\log_b n = y$, $\log_c n = z$, atunci $\log_c ab$ este egal cu:

a) $\frac{x+y}{z}$ **b)** $\frac{(x+y)z}{xy}$ **c)** 1 **d)** $\frac{xy}{z}$

10. Fie funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 5^x + 5^{-x}$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații este falsă:

a) f nu este surjectivă **b)** f nu este injectivă **c)** f este monotonă
d) f nu este o funcție impară

11. Fie ecuația $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 1$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații este adevarată:

a) ecuația are o singură soluție **b)** ecuația nu are soluții **c)** ecuația are trei soluții
d) ecuația are două soluții

12. Fie functia $f: D \to \boldsymbol{R}, f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, unde *D* este domeniul maxim de definiție al funcției. Imaginea funcției f este:

a) $(0, \sqrt{2}-1)$ **b)** $(0, \infty)$ **c)** $(\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ **d)** $[\sqrt{2}-1, +\infty)$

13. Partea întreagă a numărului $a = \log_2 6 + \log_3 2$ este egală cu:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)**4

14. Fie funcția f: $(0,\infty)\setminus\{1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}}$

unde *n* este un număr natural, $n \geq 5$. Suma soluțiilor ecuației $f(x) = \frac{4n}{n+1}$ este:

a) 10 **b)** 6 **c)** $\frac{9}{2}$ **d)** $\frac{17}{4}$

15. Mulțimea valorilor lui $m \in \boldsymbol{R}$ pentru care funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx - 1, & x \leq 0 \\ x - m, & x > 0 \end{cases}$
este strict crescătoare este:

a) $(-\infty, 0]$ **b)** $[0,1]$ **c)** $[0,2)$ **d)** $[0, \infty)$

16. Numărul soluțiilor întregi ale ecuației: $9^x + 9^{-x} - 4(3^x + 3^{-x}) + 6 = 0$ este:

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1

17. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $x^{\sqrt{x}} < \left(\sqrt{x}\right)^x$ este:

a) $(0,1) \cup (4, \infty)$ **b)** $(1, \infty)$ **c)** $(4, \infty)$ **d)** $(1, 4)$

18. Fie ecuația $\sqrt[3]{3-2x}+\sqrt[3]{6x+2}+\sqrt[3]{3-4x}=2$. Numărul soluțiilor reale ale ecuației este:

a) 1 **b)** 3 **c)** 0 **d)** 2

19. Valoarea numărului $A=\lg^3 4+\lg^3 25-24\lg^2 2+24\lg 2$ este :

a) 4 **b)** 1 **c)** 8 **d)** 3

20. Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = x + (-1)^{[x]}$. Atunci funcția f:

a) este surjectivă, dar nu este injectivă **b)** este injectivă, dar nu este surjectivă

c) nu este nici injectivă, nici surjectivă **d)** este bijectivă

21. Fie ecuația $\boldsymbol{|x-3|^{lg^2 x - lg\, x^2} = |x-3|^3}$. Numărul soluțiilor ecuației este egal cu

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 5

22. Numărul valorilor lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuația $\left(m^2+1\right)\left(2^{x-1}+2^{x^2-1}\right)-m^2-m-1=0$ are cel puțin o soluție întreagă este:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

23. Fie $a,b,c \in \mathbf{R}$ astfel încât $\sqrt[2020]{a^{2022}-4b^2-4c-1}+\sqrt[2021]{a^{2022}+4c^2+4b+1}=0$. Atunci $(a+b+c)^{2021}$ este:

a) -2 **b)** 1 **c)** 0 **d)** -1

24. Fie sistemul $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3m \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$. Fie *A* mulțimea valorilor reale ale lui *m* pentru care sistemul are soluție unică. Atunci:

a) $A \subset \left(1, \frac{11}{3}\right)$ **b)** $A \subset \left(-2, \frac{2}{5}\right)$ **c)** $A = \varnothing$ **d)** $A \subset \left[\frac{11}{3}, 5\right]$

1 b, 2 c, 3 b, 4 d, 5 a, 6 c, 7 a, 8 a, 9 b, 10 c, 11 b, 12 c, 13 c, 14 d, 15 b, 16 d, 17 a, 18 b, 19 c, 20 d 21 a, 22 d, 23 d, 24 a