Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
1902-2021

ONGM, Etapa I - Constanța, 20 februarie 2021

Clasa a XI-a

1. Fie mulțimea $M=\left\{m\in\mathbb{R}\mid A^3-m^2A=O_2\right\}$, unde $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{pmatrix}$. Mulțimea M este:

a) $\{0\}$ b) $\varnothing$ c) $\{6\}$ d) $\{-6;6\}$

2. O matrice se numește simetrică dacă este egală cu transpusa ei. Fie A și B două matrice simetrice și $X=AB+BA,\ Y=AB-BA$. Atunci transpusa matricei XY este:

a) YX b) $-YX$ c) XY d) $-XY$

3. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C}),\ A\neq O_2$ cu proprietatea $AB-BA=A$ și $M=\left\{n\in\mathbb{N}^*\mid A^n=O_2\right\}$. Atunci mulțimea M este:

a) $\mathbb{N}^*-\{1\}$ b) $\{1;2;3\}$ c) $\varnothing$ d) $\{2021\}$

4. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1},\ a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\ln\left(n^2+1\right)$. Dacă $L=\lim_{n\to\infty}a_n$, atunci:

a) $L\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ b) $L\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ c) $L\in\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ d) $L\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

5. Fie șirul $\left(a_n\right)_{n\geq0}$ cu $a_0\in\mathbb{R}$ și $a_{n+1}=a_n-a_n{}^2\ (\forall)n\in\mathbb{N}$.

Dacă $A=\left\{a_0\in\mathbb{R}\mid\left(a_n\right)_{n\geq0}\text{ convergent}\right\}$, atunci A este:

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $(0;1]$ c) $[0;1]$ d) $[1;+\infty)$

6. Dacă $A=\left\{m\in\mathbf{R}\,\middle|\,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{m\cdot x^2}-\cos x}{x^2}\geq -\dfrac{5}{2}\right\}$, atunci:

a) $(-4,\infty)\subset A$ b) $A=[-3,\infty)$ c) $A\cap(-2,2)=\varnothing$ d) $A=\left[-\dfrac{11}{4},\infty\right)$

7. Valoarea lui n, număr natural, pentru care $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}=45$ este:

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

8. Pentru fiecare n natural, $n\geq 4$, definim $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin(n-3)x\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Dacă $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=4}^{n}a_k$, atunci L este:

a) $\dfrac{e}{e-1}$ b) $\dfrac{1}{e+1}$ c) $\dfrac{1}{e-1}$ d) $\dfrac{e-1}{2}$

9. Fie $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ și $B=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\,A^n=I_2\right\}$. Atunci min B este:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16

10. Fie $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2021x}{x}$. Atunci:

a) $L=0$ b) $L=1$ c) $L=2021$ d) nu există

11. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ cu $a_0=\dfrac{1}{2}$ și $a_{n+1}=a_n-a_n{}^2\ (\forall)n\in\mathbb{N}$. Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n},\, l\in\overline{\mathbb{R}}$ atunci l este:

a) 0 b) 1 c) e d) $+\infty$

12. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ cu $a_0=0$ și $a_n=1+\dfrac{a_0+a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n}\ (\forall)n\geq 1$. Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in\overline{\mathbb{R}}$ atunci l este:

a) 1 b) $+\infty$ c) 0 d) 2

13. Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(n^n+n!\right)}{\ln\left(n!+2021^n\right)}\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci l este:

a) $\dfrac{1}{\ln 2021}$ b) 1 c) 0 d) $+\infty$

14. Fie $L=\lim\limits_{x\to\infty}x^k\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}\right),\, k\in\mathbb{N}$. Valoarea maximă a lui k pentru care L este finită este:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

15. Fie $a_n = \ln(1+n) + \alpha\ln(2+n) + \beta\ln(3+n), \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci α, β verifică relația:

a) $\alpha+\beta=-1$ b) $\alpha+\beta=-2$ c) $\alpha+\beta=0$ d) $\alpha+\beta=1$

16. Se consideră matricea $A \in M_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ cu proprietatea $A^2 - A + I_n = O_n$. Valoarea lui n pentru care $\det\left(A^{1020} + I_n\right) = 1024$ este:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

17. Fie a un număr real. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ a & x+a & x \\ x+a & x & a \end{vmatrix} = 0$ are:

a) 0 elemente b) 1 element c) 2 elemente d) 3 elemente

18. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ 0 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}, \forall n \geq 1$, suma modulelor elementelor matricei $A^n, n \geq 3$ este

a) $2n^2 - n + 3$ b) $2n^2 - 3n + 3$ c) $2n^2 - 5n + 3$ d) $2n^2 - 7n + 3$

19. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $S = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \middle| X^2 = A \right\}$, atunci:

a) $S = \emptyset$ b) $\text{card}\, S = 1$ c) $\text{card}\, S = 2$ d) $\text{card}\, S = 4$

20. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \right)^{3n+2021}$ este:

a) e^4 b) e^2 c) e^{-4} d) $+\infty$

21. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Suma soluțiilor ecuației $\det(A - xI_3) = 0$ este:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

22. O matrice A se numește ortogonală dacă produsul dintre matrice și transpusa ei este matricea identitate. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 2b & b & -b \\ c & -c & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Numărul tripletelor (a, b, c) pentru care matricea A este ortogonală este egal cu:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

23. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;2)$, $B(4;-1)$, $C(-3;-2)$. Punctul D de pe axa Oy cu proprietatea că $ABDC$ este patrulater convex și $aria(ABDC) = 2 \cdot aria(ABC)$ are coordonatele:

a) $\left(0;\frac{13}{7}\right)$ b) $\left(0;-\frac{13}{7}\right)$ c) $(0;5)$ d) $(0;-5)$

24. Știind că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n \cdot x_{n+1} - (n+1)\cdot x_n}{n^2+2n+2} = 2021$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$ este egală cu:

a) 2021 b) 0 c) $\frac{2021}{2}$ d) $+\infty$

Soluții:

1 – d	5 – c	9 – c	13 – b	17 – b	21 – c
2 – b	6 – b	10 – a	14 – c	18 – a	22 – d
3 – a	7 – b	11 – b	15 – a	19 – a	23 – d
4 – d	8 – c	12 – b	16 – c	20 – c	24 – a