



ONGM, Etapa I - Constanța, 20 februarie 2021

Clasa a VIII-a

1. Dacă a și b sunt numere reale cu proprietatea că $a^2 + b^2 + 6a - 10b + 30 = 0$, atunci $a + b$ se află în intervalul:

a) $[-5; -1]$ b) $[3; 7]$ c) $[-2; 6]$ d) $[-8; 8]$

2. Câte numere iraționale sunt în șirul : $\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \dots, \sqrt{2018}, \sqrt{2020}$?

a) 988 b) 1009 c) 1974 d) 989

3. Dacă $E(x) = 3(x+1)^2 - (x+2)(x-2) - (x-1)^2 - 5x - 4$, pentru orice număr real x , atunci suma

$$\frac{1}{E(0)} + \frac{1}{E(1)} + \frac{1}{E(2)} + \dots + \frac{1}{E(98)}$$
 este egală cu:

a) 2020 b) 2021 c) 10,1 d) 0,99

4. Câte triplete de numere reale nenule a, b și c satisfac relația:

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^2} = 12 ?$$

a) 1 b) 2 c) 8 d) 4

5. Dacă $a = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019} + \sqrt{2021}}$, atunci numărul a este egal cu:

a) $1 - \sqrt{2021}$ b) $\sqrt{2021} - 1$ c) $\frac{1 - \sqrt{2021}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2021} - 1}{2}$

6. Suma numerelor întregi nenule x, y și z care verifică relațiile $x + y - z = xy$ și $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5

7. Care este cea mai mică valoare a numărului m real, pentru care $x = 4 + \sqrt{3}$ verifică relația:

$$m - x = \frac{-3}{m + x} ?$$

- a) $-2 + \sqrt{3}$ b) $2 - 2\sqrt{3}$ c) $-2 - \sqrt{3}$ d) $-2 - 2\sqrt{3}$

8. Produsul numerelor raționale a și b care verifică egalitatea : $\frac{a}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{b}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2} - 6$ este egal cu

- a) -8 b) 8 c) -24 d) 2

9. Câte elemente are mulțimea $M = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^5 + x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$?

- a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

10. Numărul numerelor naturale n pentru care $\left[\frac{n+9}{9} \right] = \left[\frac{n+10}{10} \right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x , este:

- a) 55 b) 50 c) 45 d) 90

11. Câte numere prime de forma $p = n^4 + n^2 + 1$, unde $n \in \mathbb{N}$, există?

- a) 3 b) 2 c) 4 d) 1

12. Se consideră numărul real $x = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2023}^2}$, unde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2023}$ sunt numere naturale impare. Atunci:

- a) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ b) $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ c) $x \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$ d) $x \in \mathbb{N}$

13. Fie a, b , și c numere naturale care verifică relația:

$$a + 2b + 3c + 21 = 4(\sqrt{a+1} - 1) + 6(\sqrt{2b+1} - 1) + 10(\sqrt{3c+1} - 1)$$

Ultima cifră a numărului $\overline{abc}^{2020} + \overline{acb}^{2021}$ este:

- a) 0 b) 4 c) 8 d) 2

14. Fie $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \left| (2x - y)^2 - 3x - 2y + 7 \right| + (7 - 3x - 2y)^2 + 3x + 2y = 7 \right\}$. Cardinalul mulțimii M este:

- a) 4 b) 1 c) 3 d) 2

15. În piramida triunghiulară regulată VABC, cu vârful în V, muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30° . Dacă muchia laterală VA are lungimea egală cu 6 cm, atunci aria bazei este egală cu:

- a) $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ c) 27 cm^2 d) $\frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

16. În piramida triunghiulară regulată VABC, cu vârful în V, se notează cu O centrul de greutate al bazei și cu G centrul de greutate al triunghiului VBC. Dacă M este mijlocul laturii BC, atunci raportul ariilor triunghiurilor MOG și MAV este egal cu:

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{81}$

17. În piramida triunghiulară regulată VABC, cu vârful în V, muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30° . Se notează cu O centrul de greutate al bazei și cu G centrul de greutate al triunghiului VBC. Dacă $OG = 4 \text{ cm}$, atunci lungimea înălțimii piramidei VABC este egală cu:

- a) 3 cm b) 6 cm c) $3\sqrt{3} \text{ cm}$ d) 9 cm

18. Fie ABCD un romb cu $BD = 8 \text{ cm}$ și măsura unghiului ABC egală cu 120° . În punctul A se ridică perpendiculara AP pe planul rombului astfel încât $AP = BD$. Distanța de la punctul P la dreapta BC este egală cu:

- a) $8\sqrt{2} \text{ cm}$ b) $4\sqrt{7} \text{ cm}$ c) $8\sqrt{3} \text{ cm}$ d) 8 cm

19. Fie ABCD un romb cu $BD = 8 \text{ cm}$ și măsura unghiului ABC egală cu 120° . În punctul A se ridică perpendiculara AP pe planul rombului astfel încât $AP = BD$. Aria triunghiului PBD este egală cu:

- a) 64 cm^2 b) 32 cm^2 c) $32\sqrt{7} \text{ cm}^2$ d) $16\sqrt{7} \text{ cm}^2$

20. Fie ABCD un romb cu $BD = 8 \text{ cm}$ și măsura unghiului ABC egală cu 120° . În punctul A se ridică perpendiculara AP pe planul rombului astfel încât $AP = BD$. Măsura unghiului dintre dreapta PD și planul (ABC) este egală cu:

- a) 90° b) 30° c) 45° d) 60°

21. În cubul ABCDA'B'C'D' cu latura de $n \text{ cm}$, $n > 0$, notăm cu G_1 , G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor AA'B și BB'C'. Sinusul unghiului format de dreptele G_1G_2 și AC este:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

22. În cubul ABCDA'B'C'D' cu latura de $n \text{ cm}$, $n > 0$, notăm cu G_1 , G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AA'B și A'C'D'. Distanța de la punctul B' la dreapta G_1G_3 este:

- a) $\frac{n}{2} \text{ cm}$ b) $\frac{n\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$ c) $\frac{2n\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ d) $\frac{2n}{3} \text{ cm}$

23. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura de n cm, $n > 0$, notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor $AA'B, BB'C'$ și $A'C'D'$, iar $G_1G_2 \cap (ABC) = \{S\}$, $G_1G_3 \cap (ABC) = \{T\}$. Aria triunghiului AST este egală cu :

a) $\frac{n^2}{4} \text{ cm}^2$
b) $\frac{n^2}{2} \text{ cm}^2$
c) $\frac{n^2}{9} \text{ cm}^2$
d) $\frac{2n^2\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2$

24. Cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura de n cm, cu n număr natural impar, $n \geq 2021$, se împarte în n^3 cuburi cu latura de 1 cm. Fețele cubului $ABCD A'B'C'D'$ se colorează cu roșu, iar diagonalele fețelor cubului inițial le desenăm cu alb. Câte cuburi, cu latura de 1 cm, au cel puțin un segment alb pe fețe?

a) $12 \cdot n - 8$
b) $12 \cdot n - 22$
c) $12 \cdot n - 16$
d) $12 \cdot n - 14$

Răspunsuri:

1-c, 2-a, 3-d, 4-c, 5-d, 6-b, 7-d, 8-a, 9-a, 10-c, 11-d, 12-a, 13-a, 14-b, 15-d, 16-c, 17-b, 18-b, 19-d, 20-c, 21-a, 22-b, 23-c, 24-b