



ONGM, Etapa I - Constanța, 20 februarie 2021

Clasa a IX-a

- Partea întreagă a numărului $S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}$ este:
a) 6 b) 7 c) 9 d) 10
- Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ astfel încât $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} = 2$. Maximul expresiei $(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab)$ este:
a) 512 b) 729 c) 343 d) 1000
- Suma soluțiilor reale ale ecuației $\left\lfloor \frac{2x+1}{3} \right\rfloor - \left\{ \frac{2x+1}{3} \right\} = x$ este:
a) -7 b) 0 c) -1 d) -8
- Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ în progresie aritmetică, cu proprietatea $a_{31} + a_{49} + a_{51} + a_{71} = 1000$. Atunci suma $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ este egală cu:
a) 25000 b) 50000 c) 5000 d) 10000
- Dacă $S = \{x \in \mathbb{R} \mid ||2x-1|-2| \leq 1\}$, atunci S este:
a) $[1, 2]$ b) $[-1, 0] \cup [1, 2]$ c) $[-1, 2]$ d) $[0, 2]$
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(2021)$ este:
a) 2021 b) $\frac{2021}{4}$ c) $\frac{2021}{3}$ d) $\frac{2021}{2}$
- Dacă $E(x) = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-100|$, atunci $\min \{E(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ este:
a) 0 b) 5050 c) 2500 d) 1000
- Fie $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2 + 3x} \in \mathbb{Q}\right\}$. Atunci suma elementelor mulțimii A este:
a) -6 b) 1 c) 0 d) -2
- Dacă n este numărul numerelor naturale cuprinse între 1 și 1000 care se divid cu 12 sau 15 sau 18, atunci n este egal cu:
a) 83 b) 100 c) 175 d) 155

10. În planul triunghiului ABC considerăm punctele M, N, P astfel încât: $5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $34\overrightarrow{PA} + 36\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Suma numerelor naturale x și y , prime între ele, pentru care $x\overrightarrow{PM} + y\overrightarrow{PN} = \vec{0}$ este:
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6
11. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt distincte și $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, atunci suma $a + b + c$ este egală cu:
a) 3 b) 0 c) 6 d) 1
12. Fie $M = \left\{ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{9}{z} \mid x, y, z > 0, x + y + z = 2 \right\}$. Dacă $m = \min M$, atunci m este egal cu:
a) 12 b) $4 + 2\sqrt{2}$ c) $3 + 2\sqrt{2}$ d) $9 + 4\sqrt{2}$
13. Fie $E = \left\{ (a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \mid a, b, c, d \in [1, 2] \right\}$. Dacă $M = \max E$, atunci M este egal cu:
a) 20 b) 16 c) 18 d) 24
14. Fie $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(1) = 2$ și $f(n+1) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Atunci $f(2021)$ este:
a) 2^{2020} b) 2^{2021} c) 2^{2019} d) 2021
15. Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $[2x] - [x] = [x + a]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci a este egal cu:
a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$
16. Maximul mulțimii $\left\{ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \mid x, y, z \in \mathbb{R}, (x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{5})^2 = 1 \right\}$ este egal cu:
a) 5 b) 4 c) 3 d) 2
17. În reperul (O, \vec{i}, \vec{j}) considerăm vectorii $\vec{u} = x \cdot \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + (2x-3) \cdot \vec{j}$, $x \in \mathbb{R}$. Dacă $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \vec{u}, \vec{v} \text{ sunt coliniari}\}$, atunci suma elementelor mulțimii S este egală cu:
a) 0 b) 3 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$
18. Fie $ABCD$ paralelogram și $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Atunci \vec{v} este:
a) \overrightarrow{AB} b) \overrightarrow{AD} c) $2 \cdot \overrightarrow{AD}$ d) $2 \cdot \overrightarrow{AB}$
19. Se consideră triunghiul ABC și $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \cdot \overrightarrow{AB} + (y-1) \cdot \overrightarrow{BC} + (2y-2x) \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Atunci $x^2 + y^2$ este:
a) 5 b) 13 c) 10 d) 2
20. Se consideră triunghiul ABC , O centrul cercului circumscris, H ortocentrul și G centrul de greutate. Atunci:
a) $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$ b) $\overrightarrow{OH} = 2 \cdot \overrightarrow{OG}$ c) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ d) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$
21. Se consideră triunghiul ABC și I centrul cercului înscris în triunghi. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor BC, AC și, respectiv AB , atunci \overrightarrow{AI} este:
a) $\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$ b) $\frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{a + b + c}$ c) $\frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{b + c}$ d) $\frac{c \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}}{a + b + c}$

22. Fie $ABCD$ trapez cu bazele AB și CD astfel încât $AB = 2 \cdot CD$. Fie $M \in (AB)$ astfel încât

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \text{ și } P \in (DM) \text{ astfel încât } \frac{DP}{PM} = x. \text{ Știind că punctele } A, P, C \text{ sunt coliniare,}$$

valoarea numărului real x este:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) $\frac{3}{2}$

23. Fie triunghiul ABC , O centrul cercului său circumscris, A' punctul diametral opus lui A în cerc și H' ortocentrul triunghiului BCA' . Atunci $\overrightarrow{OH'}$ este:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$ d) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$

24. Fie $ABCD$ trapez cu $AB \parallel CD$ și $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$. Se notează cu

$$x = \frac{CP - AM}{CN} \text{ și } \frac{AB}{BC} = k. \text{ Știind că centrul de greutate al triunghiului } MNP \text{ aparține dreptei}$$

AC , atunci:

a) $x = 2k$ b) $x = k$ c) $3x = k$ d) $3x = 2k$

1-c, 2-a, 3-a, 4-a, 5-b, 6-d, 7-c, 8-a, 9-d, 10-c, 11-b, 12-d, 13-c, 14-a, 15-c, 16-b, 17-d, 18-c, 19-b, 20-a, 21-b, 22-d, 23-d, 24-b