

OLIMPIADA PE SCOALA

CLASA 12

27.02.2021

1 PROBLEME

- Pe intervalul $(-1, 1)$ consideram urmatoarea operatie asociativa $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in (-1, 1)$. Rezultatul calcului $\frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{6} \dots \frac{1}{2022}$ este:
 (A) $\frac{1011}{1012}$ (B) $\frac{1012}{1011}$ (C) $\frac{1012}{1013}$ (D) $\frac{1013}{1012}$ (E) $\frac{1013}{1014}$
- Rezultatul integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 dx$ este:
 (A) $\frac{2}{\pi}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\pi}{8}$ (E) $\frac{\pi^2}{8}$
- Fie F o primitiva a functiei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$. Care e valoarea limitei $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$?
 (A) $-\infty$ (B) ∞ (C) 0 (D) $-e$ (E) e
- Pe \mathbb{R} se defineste legea de compozitie $x \circ y = xy - 2ax - 2ay + 4a$, $a \in \mathbb{R}$. Care sunt toate valorile lui a pentru care $(1, \infty)$ este parte stabila a lui \mathbb{R} in raport cu legea \circ ?
 (A) $a \in (-\infty, \frac{1}{2}]$
 (B) $a = \frac{1}{2}$
 (C) $a \in [0, \frac{1}{2}]$
 (D) $a \in [\frac{1}{2}, \infty)$
 (E) $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ derivabila si F o primitva a sa .
 Daca $F(x) = f(x)^2 + f(x)$, $\forall x > 0$, atunci:
 (A) f e strict crescatoare
 (B) f e strict descrescatoare
 (C) f nu e monotona
 (D) f e periodica
 (E) f nu e monotona pe $(0, 1)$.
- Fie G un grup cu proprietatea ca $x^2 = e$, $\forall x \in G$. Atunci:
 (A) G e ciclic
 (B) G e finit
 (C) G e comutativ
 (D) $|G| = \infty$
 (E) $G \cong (Z_{2^n}, +)$

7. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o functie care admite primitive si care are proprietatea ca $f(x) + f(y) = f(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Daca $f(1) = \sqrt{2}$ atunci $f(\sqrt{2})$ este egal cu:
- (A) $2\sqrt{2}$
(B) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(D) 2
(E) 1
8. Rezultatul integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{2020}}{(\cos x)^{2020} + (\sin x)^{2020}} dx$ este:
- (A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) π (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) $\frac{\pi}{4}$
9. Rezultatul integralei $\int_0^{2\pi} \arcsin|\sin x| dx$ este:
- (A) 0 (B) $\frac{\pi^2}{4}$ (C) $\frac{\pi^2}{2}$ (D) $\frac{\pi^2}{8}$ (E) alt rezultat decat cele precedente
10. Fie (G, \cdot) un grup abelian cu elementul unitate e . Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notam $H_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$. Definim $H_m \cdot H_n = \{x \cdot y \mid x \in H_m \text{ si } y \in H_n\}$. Definim $[m, n] = \text{c.m.m.m.c}$ si $(m, n) = \text{c.m.m.d.c}$. Atunci:
- (A) $H_m \cdot H_n = H_{[m, n]}$
(B) $H_m \cdot H_n = H_{(m, n)}$
(C) $H_m \cdot H_n \neq H_{[m, n]}$
(D) $H_m \cdot H_n \neq H_{(m, n)}$
(E) $H_m \cdot H_n = G$
11. Fie G un grup finit cu n elemente astfel incat oricare ar fi 2 subgrupuri ale sale H si K avem ca $H \subseteq K$ sau $K \subseteq H$ Atunci :
- (A) G nu poate fi comutativ
(B) G nu poate contine elemente de ordin n
(C) G nu poate fi ciclic
(D) $n = p^m$, p prim , $m \in \mathbb{N}$
(E) $n = pq$, p, q prime distincte
12. Fie G un grup care are un singur automorfism. Atunci:
- (A) G e comutativ
(B) $G \cong (Z, +)$

- (C) $|G| = \infty$
(D) G nu e ciclic
(E) $|G|$ e finit si impar
13. Fie G un grup cu 10 elemente in care exista $a, b \in G - \{e\}$ distincte astfel incat $a^2 = b^2 = e$. Atunci:
(A) G e abelian
(B) G nu e abelian
(C) $G \cong (Z_{10}, +)$
(D) G e ciclic
(E) $x^2 = e, \forall x \in G$.
14. Fie sirul $I_n, I_n = \int_1^e x(\ln(x))^n dx$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ este:
(A) e^2 (B) $\frac{e^2}{2}$ (C) $\frac{e^2}{4}$ (D) $2e^2$ (E) $4e^2$
15. Fie $H = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ e derivabila, } f' \text{ e continua, } \int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 (f'(x))^2 dx = 1\}$
(A) $|f(1)^2 - f(0)^2| \leq 2, \forall f \in H$
(B) $H = \emptyset$
(C) $|f(1)^2 - f(0)^2| \geq 2, \forall f \in H$
(D) $f(0) = f(1)$
(E) $f(0)^2 = f(1)^2$
16. Numarul permutarilor impare din (S_5, \circ) este egal cu:
(A) 30
(B) 60
(C) 90
(D) 120
(E) 0
17. Cati generatori are grupul ciclic $(\mathbb{Z}_{70}, +)$?
(A) 24
(B) 48
(C) 36

- (D) 12
- (E) 35
18. Fie G un grup cu 2021 de elemente. Atunci:
- (A) Exista $x \in G - \{e\}$ astfel incat $x^3 = e$
- (B) Exista $x \in G - \{e\}$ astfel incat $x^5 = e$
- (C) Exista $x \in G - \{e\}$ astfel incat $x^2 = e$
- (D) Nu exista $x \in G - \{e\}$ astfel incat $x^{2021} = e$
- (E) Exista $x \in G - \{e\}$ astfel incat $x^{43} = e$
19. Fie G un grup cu p elemente , unde p e numar prim. Atunci neaparat:
- (A) G e ciclic
- (B) G nu poate fi ciclic
- (C) $p \in \{2, 3\}$
- (D) $p \equiv 1(mod 3)$
- (E) $p = 2^n + 1, n \in \mathbb{N}^*$.
20. Rezultatul integralei $\int_{2020\pi}^{2022\pi} (\sin x)^{2021} dx$, este
- (A) 0
- (B) π
- (C) $-\pi$
- (D) 2π
- (E) altul decat cele anterioare