

OLIMPIADA PE SCOALA

CLASA 9

26.02.2021

1 PROBLEME

1. Rezultatul calculului $\{2x\} - \{x\} - \{x + \frac{1}{2}\}$ este :
 (A) 0 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 1
2. Maximul expresiei $\sqrt{a^2 + a} + \sqrt{b^2 + b} + \sqrt{c^2 + c}$ unde $a, b, c \geq 0$ cu $a + b + c = 3$:
 (A) $3\sqrt{2}$ (B) $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
3. Rezultatul calculului

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} * [\frac{k}{k+1}]$$
 (A) $n + 1$ (B) n (C) 1 (D) 0
4. Care dintre functiile urmatoare nu verifica ecuatiile functionale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x + y) = f(x) + f(y)$:
 (A) $f(x) = x$ (B) $f(x) = -x$ (C) $f(x) = x + 1$ (D) $f(x) = 3x$
5. Fie $P \in \text{Int}(ABC)$ echilateral de centru O si P_1, P_2, P_3 proiectiile lui P pe laturi. Care este suma $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3}$?
 (A) $\frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$ (B) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PO}$ (C) \overrightarrow{PO} (D) 0
6. Fie S dublul sumei diagonalelor unui patrulater convex si P perimetrul sau. Stabiliti care dintre afirmatii este adevarata:
 (A) $S < P$ (B) $S \leq P$ (C) $S = P$ (D) $S > P$
7. Stabiliti care din urmatoarele afirmatii este adevarata
 (A) Exista o progresie aritmetica formata din numere naturale, nenule in care fiecare termen sa fie o putere de numar natural.
 (B) Exista o progresie aritmetica formata din numere naturale, nenule in care fiecare termen sa nu fie o putere de numar natural .
 (C) Orice progresie aritmetica are toate elementele puteri
 (D) Orice progresie aritmetica are toate elementele care nu sunt puteri
8. Cate functii monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(f(x)) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ exista?
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
9. Ecuatia $x[\frac{1}{x}] + \frac{1}{x}[x] = 2$ are solutiile :
 (A) 1 (B) -1 (C) $\{1, -1\}$ (D) \emptyset

10. Fie afirmatiile:

a) Triunghiul ABC e dreptunghic in A

b) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$.

Care dintre afirmatii este adevarata ?

(A) $a \iff b$ (B) $a \not\Rightarrow b$ (C) $b \not\Rightarrow a$

(D) a e falsa si b e adevarata

11. Minimul expresiei $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2$ cu $a, b > 0$ $a + b = 1$, este :

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{25}{2}$

12. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Expresia $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ apartine intervalului:

(A) $[\frac{3}{2}, 2)$ (B) $[2, 3)$ (C) $[3, \frac{7}{2})$ (D) $(\frac{7}{2}, \infty)$

13. Cate solutii are ecuatia in N^*

$x^5 + y^7 = z^9$?

(A) 0 (B) ∞ (C) 2 (D) 2021

14. Fie Ω si H, I, O centrul cercului Euler si respectiv ortocentrul , incentrul si centrul cercului circumscris triunghiului ABC scalen. Tripletul de puncte coliniare este:

(A) A, Ω si centrul cercului circumscris tr. ABC

(B) A, Ω si centrul cercului circumscris tr. BHC

(C) A, Ω si centrul cercului circumscris tr. BIC

(D) A, Ω si centrul cercului circumscris tr. BOC

15. Triunghiul scalen ABC cu centrul de greutate G are l dreapta lui Euler. Fie $M \in (ABC)$ si A_1, B_1, C_1 simetricile lui M fata de mijloacele segmentelor BC, CA, AB. Daca $G' \in l$ unde G' este centrul de greutate al lui $A_1B_1C_1$ atunci care dintre urmatoarele afirmatii este adevarata:

(A) $\forall M \in (ABC) \implies G' = G$.

(B) $\forall M \in (ABC) \implies G' \in l$.

(C) $\forall M \in l \implies G' \in l$.

(D) $M \neq A \implies G' \in l$.

16. Cate diagonale are un poligon convex cu n laturi ?

(A) $\frac{n(n+3)}{2}$ (B) $\frac{n(n-3)}{2}$ (C) $\frac{n(n-1)}{2}$ (D) $\frac{n(n+1)}{2}$

-
17. Fie a_n o progresie aritmetica de numere naturale nenule. Notam $\forall p \geq 1$ $S(p) = \sum_{i=1}^p a_i^2$. Stabiliti care afirmatie este falsa:
- (A) $S(p) \leq S(p+1), \forall p \geq 1$
 - (B) $S(4)$ e numar prim
 - (C) $S(p) \in \mathbb{Q}, \forall p \geq 1$
 - (D) $S(1)$ e patrat perfect
18. Fie predicatul $P(n) \mid 9^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ precizati care dintre urmatoarele propozitii este falsa:
- (A) $\exists n \in \mathbb{N}$ astfel incat $P(n)$ este falsa
 - (B) $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel incat $P(n)$ este adevarata
 - (C) $\nexists n \in \mathbb{N}$ astfel incat $P(n)$ este falsa
 - (D) $\exists n \in \mathbb{N}$ astfel incat $P(n)$ este adevarata
19. Masurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic aflate in progresie aritmetica sunt:
- (A) 15, 75, 90
 - (B) 20, 30, 130
 - (C) 30, 60, 90
 - (D) 45, 45, 90
20. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel incat $\forall x \in \mathbb{R} \ f(x+1) = f([x]) + 2$ si $f(0) = 1$. Stabiliti propozitia adevarata:
- (A) $f(\sqrt{2}) = 6$
 - (B) $f(\pi) = 7$
 - (C) $f(\frac{\pi}{2}) = 20$
 - (D) $f(1) = 0$