Timp de lucru 120 de minute. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Calculaţi $a = \{1,1(6)\} + \{-1,1(6)\} + \left[\sqrt{3} - 2\right]$

A -1 **B** $-\frac{2}{3}$ **C** 0 **D** $\frac{1}{6}$ **E** $\frac{2}{3}$

2. Fie $M = \{x | x \in \mathbb{Z}$ şi $|x-10|\left(|x-2|-3\right) \leqslant 0\}$. Atunci $|M|$ este egal cu:

A 7 **B** 8 **C** 6 **D** 0 **E** 9

3. Dacă $A = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2020^2}\right)$ atunci partea întreagă a numărului $2020 \cdot A$ este egală cu:

A 0 **B** 1 **C** 2020 **D** 2020! **E** 1010

4. Fie $a, b, c \in (0; +\infty)$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 27$ şi $(a+b)(b+c)(a+c) = 8abc$

Dacă $N = a + b + c$ atunci :

A $N \in (10; 12)$ **B** $N \in (7; 9)$ **C** $N \in (8; 10)$ **D** $N \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ **E** $N \in (5; 7)$

5. Fie $x, y, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \in [-1, 2]$, $y = \frac{x+1}{3}$ şi $a = \sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}$. Atunci:

A $a = \sqrt{10}$ **B** $a \geqslant 3\sqrt{10}$ **C** $a = 2x + 2y - 2$ **D** $a = 2\sqrt{10}$ **E** $a = 2$

6. Fie $M = \{n | n \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{n! + 3} \in \mathbb{Q}\}$. Dacă $\alpha = \sum\limits_{n \in M} \frac{n}{n+1}$, atunci α este egal cu :

A 1 **B** $\frac{15}{4}$ **C** $\frac{23}{12}$ **D** $\frac{5}{4}$ **E** $\frac{4}{7}$

7. Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\left(3-\sqrt{10}\right)a + \sqrt{10} - b\left(1+\sqrt{10}\right) = 0$, atunci suma $a + b$ este egală cu:

A $\frac{5}{4}$ **B** 0 **C** 2 **D** 1 **E** 3

8. Daca $S = \sum\limits_{k=1}^{2021} \frac{1}{\left[\frac{k^2+k+1}{k+1}\right]\left[\frac{k^2+3k+3}{k+2}\right]}$ unde $[x]$reprezintă partea întreagă a lui x, atunci:

A $S = \frac{2021}{2022}$ **B** $S = \frac{1}{2021!}$ **C** $S = 0$ **D** $S = \frac{2022}{2021}$ **E** $S = 1$

9. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = x - 1$ este egal cu:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

10. Dacă $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ atunci $[a]$ este egală cu:

A 3 **B** 2 **C** 4 **D** 1 **E** 0

11. Se consideră predicatul $p(x, y) : x^3 + (y-2)^4 = 2^{2022}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Stabiliţi care din următoarele propoziţii este adevărată:

A $(\exists y)\, p(2^{1000}, y)$ **B** $(\forall x)\,(\exists y)\, p(x, y)$ **C** $(\forall x)\,(\forall y)\, p(x, y)$ **D** $(\forall y)\, p(2, y)$ **E** $(\exists x)\, p(x, 2)$

12. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 2021\}$. Definim mulţimea $B = \{x \in A \mid x \vdots 2$ sau $x \vdots 3\}$. Atunci cardinalul mulţimii B este egal cu:

A 1683 **B** 1347 **C** 1010 **D** 673 **E** 336

13. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{8-x} + \sqrt{6-y} = 14$ atunci diferenţa $y^2 - x^2$ este egală cu:

A 9 **B** 1 **C** 3 **D** -9 **E** -3

14. Dacă $M = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^{10}+3}{2x^2} \in \mathbb{Z}\right\}$, atunci suma elementelor lui M este egală cu :

A 6 **B** 0 **C** 1 **D** 3 **E** 4

15. Descompunerea în factori primi a numărului $f(n) = (n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+n)$ unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, conţine factorul prim 2 cu exponentul:

A 2^n **B** n **C** 2^{n+1} **D** $n+1$ **E** $2n+1$

16. Numărul numerelor naturale n care verifică egalitatea $n = \sqrt{n} - \{\sqrt{n}\} + 100$ este egal cu:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

17. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura 2. Modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ este

A $4 + 2\sqrt{2}$ **B** $2\sqrt{2}$ **C** $2 + 4\sqrt{2}$ **D** $4\sqrt{2}$ **E** 4

18. În triunghiul ABC cu $AB = 5$ şi $AC = 7$, AD este bisectoarea $\angle BAC$, $D \in (BC)$. Dacă $\overrightarrow{AD} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$, atunci suma $a^2 + b^2$ este egală cu:

A 1 **B** $\frac{74}{144}$ **C** $\frac{12}{24}$ **D** $\frac{1}{6}$ **E** $\frac{84}{49}$

19. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Descompunând $\overrightarrow{CD}$ după vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ obţinem:

A $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ **B** $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ **C** $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ **D** $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ **E** $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

20. În triunghiul ABC se notează M, N, P punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghi cu laturile AB, AC respectiv BC. Ştim că $AB = 5$, $AC = 7$ si $BC = 10$. Exprimând vectorul $\overrightarrow{AP}$ in funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ obţinem:

A $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ **B** $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ **C** $\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{10}\overrightarrow{AC}$ **D** $\frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\overrightarrow{AC}$ **E** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$