Prima etapă a Olimpiadei “Gazeta Matematică” – Clasa a IX-a

Colegiul Naţional “Sf. Sava”©*

27.02.2021

1. Date fiind afirmaţiile $(a) : [q \wedge (p \to q)] \to q$ şi $(b) : [(p \to q) \wedge p] \to q$, este adevărat că:

   (a) Niciuna nu e tautologie (b) Exact una e tautologie (c) $a \to b$ este adevărată și $b \to a$ este falsă (d) Ambele sunt tautologii (e) $a \to b$ este falsă și $b \to a$ este adevărată

2. Fie afirmaţiile $(\mathbf{p}) : (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, pentru orice mulțimi A, B, C, şi $(\mathbf{q}) : (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$, pentru orice mulțimi A, B, C. Atunci:

   (a) Ambele afirmaţii sunt adevărate (b) Ambele afirmaţii sunt false
   (c) $(\mathbf{p})$ e adevărată și $(\mathbf{q})$ e falsă (d) $(\mathbf{p})$ e falsă și $(\mathbf{q})$ e adevărată
   (e) Ambele sunt adevărate numai dacă toate cele trei mulțimi sunt vide

3. Fie A şi B două mulţimi pentru care $\forall X, X \subset A \cup B \Rightarrow X \subset A$ sau $X \subset B$. Atunci:

   (a) $A \subset B$ sau $B \subset A$ (b) $A \subset B$ şi $B \not\subset A$ (c) $A \not\subset B$ şi $B \subset A$ (d) $A = B$ (e) $A \not\subset B$ şi $B \not\subset A$

*Timp de lucru: 120 de minute. Fiecare dintre cele 20 de probleme are un singur răspuns corect. Încărcaţi o fotocopie până la 12:15. Punctajul necesar calificării este de peste 70% din cel mai mare punctaj obţinut.

4. Un pătrat se numeşte *magic* dacă suma numerelor de pe fiecare linie, coloană şi diagonală este aceeaşi; fie S această sumă. Pătratul

a	b	3
c	d	e
x	4	5

este magic. Atunci $S+x$ este egal cu:

(a) 20 (b) 21 (c) 29 (d) 25 (e) 27

5. Trei persoane, A, B şi C, beau fie Fanta, fie Cola. Afirmaţiile următoare sunt adevărate:

   i. Dacă A nu bea Cola, atunci B şi C beau aceeaşi băutură.
   ii. Dacă B bea Fanta, atunci A şi C beau băuturi diferite.
   iii. Dacă C bea Cola, atunci A şi C beau aceeaşi băutură.

Atunci, cu certitudine:

(a) A bea Fanta (b) B bea Cola (c) C bea Fanta (d) B bea Fanta (e) A bea Cola

6. Fie S mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\left[\dfrac{3x+1}{5}\right] = \dfrac{2x-1}{3}$. Atunci:

(a) $S=\emptyset$ (b) S are 10 elemente (c) $S \subset (-\infty, 0)$ (d) S are 5 elemente (e) $S \subset (0, \infty)$

7. Numerele reale a şi b verifică relaţia $[na] = [nb]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci:

(a) $a > b$ (b) $a < b$ (c) $a = b$ (d) $a, b > 0$ (e) $a, b < 0$

8. Numerele reale x şi y verifică relaţiile $[x+y] = [x] + [y]$ şi $[-x-y] = [-x] + [-y]$. Atunci:

(a) $x \in \mathbb{Z}$ sau $y \in \mathbb{Z}$ (b) $x \in \mathbb{Z}$ şi $y \in \mathbb{Z}$ (c) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ şi $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (d) $x, y \in (-\infty, 0)$ (e) $x, y \in (0, \infty)$

9. Fie M mulţimea triunghiurilor dreptunghice având lungimile catetelor $[x]$ şi $3\{x\}$, şi a ipotenuzei x. Atunci:

(a) M este infinită (b) M este vidă (c) M conţine triunghiuri neasemenea (d) Toate triunghiurile din M sunt asemenea (e) M conţine un singur element

Problemele 10, 11, 12 *fac referire la următorul enunţ:*

Fie n un număr natural nenul. Fie mulţimile $A = \left\{p \in \mathbb{N} \mid \left[\sqrt{n^2+p}\right] = n\right\}$ şi $B = \left\{q \in \mathbb{N} \mid \left[\sqrt{n^2+q}\right] = 2n\right\}$. Notăm cu r numărul elementelor lui A şi cu s numărul elementelor lui B.

10. (a) $A = \emptyset$ (b) $A = \mathbb{N}$ (c) $A = \{0\}$ (d) r este număr par (e) r este număr impar

11. (a) s este număr par (b) s este număr impar (c) $B = \{0\}$ (d) $B = \emptyset$ (e) $B = \mathbb{N}$

12. Fie $S = \sum\limits_{p \in A}[\sqrt{n^2+p}]$ şi $T = \sum\limits_{q \in B}[\sqrt{n^2+q}]$. Fie $V = T/S$. Atunci:

    (a) $V < 3$ (b) $3 < V < 4$ (c) $5 < V < 7$ (d) $V < 1$ (e) $1 < V < 2$

13. Se consideră inegalitatea $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$. Atunci

    (a) Inegalitatea este adevărată pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$

    (b) Există $a, b, c > 0$ pentru care inegalitatea este falsă

    (c) Există $a, b, c < 0$ pentru care inegalitatea este falsă

    (d) Inegalitatea este adevărată numai dacă una dintre valori este 0

    (e) Inegalitatea este adevărată numai dacă $a, b, c \geq 0$

14. Fie $S = \{x = a + b + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, 2a^2 + 3b^2 + 6c^2 = 11\}$. Atunci

    (a) $S = \mathbb{R}$ (b) $S = [0, \infty)$ (c) $S \subset [-5, 5]$ (d) $S \subset [-3, 3]$ (e) $S \subset [-1, 1]$

15. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M mulţimea punctelor O din plan pentru care $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}$. Atunci

    (a) M este o mulţime infinită (b) M are exact un element (c) $M = \emptyset$ (d) $M \subset \{A, B, C, D\}$ (e) $\{A, B, C, D\} \subset M$

16. Fie C un punct nesituat pe dreapta AB. Punctul M verifică $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$. Atunci

(a) $M \in AC$ (b) $M \in BC$ (c) $M \notin AB$ (d) $M \in AB$ (e) $M \in \{A, B\}$

17. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au centrele de greutate G, respectiv G_1. Vectorul $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$ este egal cu

(a) $\overrightarrow{GG_1}$ (b) $3\overrightarrow{CC_1}$ (c) $3\overrightarrow{AA_1}$ (d) $3\overrightarrow{BB_1}$ (e) $3\overrightarrow{GG_1}$

18. Fie vectorii $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ şi $\overrightarrow{DC} = c\vec{i} + d\vec{j}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Atunci

(a) $a+c = b+d$ (b) $a-b = c-d$ (c) $a = c$ sau $b = d$ (d) $a = c$ şi $b = d$ (e) $ad = bc$

19. Fie $ABCD$ un paralelogram. O dreaptă taie segmentele AB, AC şi AD în punctele M, N, respectiv P. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = z\overrightarrow{AD}$. Atunci

(a) $x+z = y$ (b) $xz = y$ (c) $1/x+1/z = 1/y$ (d) $y/x+y/z = xz/y$ (e) $x + z = 2y$

20. Fie ABC un triunghi cu centrul de greutate G. Fie M mijlocul segmentului BC şi D simetricul lui G faţă de M. Numerele reale x, y, z verifică $x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DB} + z\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{O}$. Atunci

(a) $y = z = -2x$ (b) $x + z = -y$ (c) $x = y = z$ (d) $y = z = -x$ (e) $xz = y^2$