OLIMPIADA PE SCOALA

CLASA 10

27.02.2021

1 PROBLEME

1. Fie f,g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel incat $f(g(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci:
   (A) f este injectiva
   (B) g este injectiva
   (C) f este bijectiva
   (D) g este surjectiva
   (E) g este inversabila

2. Rezultatul expresiei $3^{1-log_3 10}$ - $4^{1-log_4 5}$ + $6^{log_6 9-1}$ este
   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** -1

3. Rezultatul expresiei $log_{\sqrt{2}-1}(\sqrt{3}+1) + log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{3}+1)$ este:
   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** -1

4. Fie $a, b \in (0,1)$. Valoarea minima a expresiei $log_a(\frac{2ab}{a+b}) + log_b(\frac{2ab}{a+b})$ este:
   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $lg2$ **(E)** $2lg2$

5. Rezultatul calcului $[lg1] + [lg2] + [lg3] + \ldots [lg10^{2021}]$ este:
   (A) Multiplu de 9
   (B) Congruent cu 1 modulo 9
   (C) Congruent cu 2 modulo 9
   (D) Congruent cu 4 modulo 9
   (E) Congruent cu 5 modulo 9

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.i. $45^a = 5$ si $45^b = 3$. $16^{\frac{1-a-b}{1-a}}$ = x.
   (A) x = 1
   (B) x = 2
   (C) x = 4
   (D) x = $\frac{1}{4}$
   (E) x = $\frac{1}{2}$

7. Fie $f : \mathbb{N} \to [0,1)$, f(n) = $\{n\sqrt{2}\}$. Atunci:
   (A) f inversabila
   (B) f este injectiva
   (C) f este surjectiva
   (D) f este crescatoare
   (E) f este periodica

8. Fie A $\{a + ib|$ a, b $\in$ Z unde $i^2 = -1$ $\}$. Fie f:$\mathbb{A} \to \mathbb{Z}$,
f(x+iy) = x + $(-1)^{x+y}$.
   (A) f nu e surjectiva
   (B) f e injectiva
   (C) f e bijectiva
   (D) f e surjectiva
   (E) f e marginita
9. Pentru fiecare numar intreg a definim functia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x + [ax]$. Fie M = $\{$ a $\in Z$ $|f_a$ injectiva $\}$. Atunci:
   (A) M = Z
   (B) M e finita
   (C) M = $\emptyset$
   (D) $Z - M$ finita
   (E) $Z - M$ e infinita
10. Fie M = $\{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}|\ f(f(x)) = -x\ ,\ \forall x \in \mathbb{Z}\}$. Atunci:
    (A) $|M|$ este par
    (B) M e infinita
    (C) M = $\emptyset$
    (D) $|M|$ impar
    (E) M are maxim 3 elemente
11. Fie M = $\{x \in R|\ log_2(4^x + 2^x - 4)$ = x + 2 $\}$. Atunci:
    (A) M este nemarginita
    (B) $M = \emptyset$
    (C) $|M| = 2$
    (D) $|M| = 1$
    (E) M are cel putin 4 elemente
12. Fie $a, b \in (1, \infty)$ a.i. $log_a b + log_b a \in Q$. Atunci numarul $(log_a b)^{2021} + (log_b a)^{2021}$ este:
    (A) rational
    (B) irational
    (C) 2^{2021}
    (D) 2
    (E) 2^{2020}

13. Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi.
Daca $a \cdot lg(\frac{a^2}{bc}) + b \cdot lg(\frac{b^2}{ac}) + c \cdot lg(\frac{c^2}{ab}) = 0$, atunci triunghiul:

(A) este dreptunghic

(B) este obtuzunghic

(C) este echilateral

(D) are un unghi de 120

(E) are un unghi de 150

14. Fie $z_1, z_2 \in C^*$ astfel incat $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$. Fie A $= \{(\frac{z_1}{z_2})^{2021n} | n \in N\}$. Atunci:

(A) $|A| = 1$

(B) $|A| = 2$

(C) $|A| = 3$

(D) $|A| = 2021$

(E) A este infinita.

15. Fie $a, b \in C$. Atunci $|a + b|^2 + |a - b|^2$ este egal cu:

(A) $|a|^2 + |b|^2$

(B) $(|a| + |b|)^2$

(C) $2(|a|^2 + |b|^2)$

(D) $2(|a| + |b|)^2$

(E) $(|a| + |b|)^4$

16. Fie A $=\{z \in C |\ |z| = 1$ si $|z + 1| = 1\}$. Suma elementelor multimii A este

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** -2

17. Numarul functiilor $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care verifica faptul ca $3f(f(x)) - 7f(x) + 2x = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ este egal cu:

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 7

18. Fie A = { x $\in (1, \infty)$ | $2^{x^2-3x+3} = log_x(3x - 2)$ }. Suma elementelor lui A este:

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 7

19. Fie A = { x $\in R$ | $(1 + x^{\frac{2}{x}})^{\frac{x}{2}} = 3^{log_2 x}$ }.Suma elementelor lui A este:

(A) 16 **(B)** 8 **(C)** 2 **(D)** 6 **(E)** 4

20. Fie A = { x $\in R$ | $(\sqrt{2}cosx)^{ctgx} = (tgx)^{tgx}$ } Atunci:

(A) A = $\emptyset$

(B) A e infinita

(C) $|A| = 1$

(D) $|A| = 2$

(E) $|A| = 3$