



Olimpiada Națională Gazeta Matematică
(ONGM) 2020-2021
Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-XII-a

- Subiecte -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Subiecte

Problema 1

Valoarea numărului $I = \int_0^2 |x - 1| dx$ este:

- a) 0 b) -1 c) 1 d) $\frac{1}{2}$ e) 2

Problema 2

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = ax + (bx^2 + c) \cdot \operatorname{arctg} x$ este primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$

- a) $a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2}$ b) $a = b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\frac{1}{2}$
d) $a = b = c = \frac{1}{2}$ e) $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$

Problema 3

Fie F primitiva funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin x$ cu proprietatea $F(0) = 0$. Atunci $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ are valoarea:

- a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) 1 e) -1

Problema 4

Fie F primitiva funcției $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 0) \\ \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in [0, 1) \end{cases}$, cu proprietatea $F\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$. Atunci $F\left(\frac{1}{2}\right)$ este egal cu:

- a) $\frac{\pi+2}{3}$ b) $\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}-\pi}{2}$

Problema 5

Primitivele funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{-2x}+1}}$, sunt:

- a) $\ln \sqrt{1+e^{2x}} + e$ b) $\ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}) + e$ c) $\sqrt{e^{-2x}+1} + e$
d) $(1+e^x)^2 + e$ e) $\operatorname{arctg}(e^x) + e$

Problema 6

Să se determine $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}, x > 0$

- a) $\ln \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + C$ b) $\ln \sqrt{1 + x^2} + C$ c) $-\ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) + C$
d) $\ln (x + \sqrt{1 + x^2}) + C$ e) $\frac{\ln (1 + x^2)}{x} + C$

Problema 7

Fie $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x+1)}$, atunci:

- a) $I = \frac{\pi}{6}$ b) $I = \frac{\pi}{12}$ c) $I = \frac{\pi}{18}$ d) $I = \frac{\pi}{8}$ e) $I = \frac{\pi}{24}$

Problema 8

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă $m \cdot \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2 + \ln x} dx = 1$.

- a) 4 b) $\ln 2$ c) 1 d) 2 e) $\ln \frac{1}{2}$

Problema 9

Să se calculeze $\int_1^9 \frac{[\ln x]}{x} dx$

- a) $2 \ln 3$ b) $2 \ln 9 - 1$ c) $4 \ln 3 - 3$ d) $2 \ln 3 - 2$ e) $4 \ln 3 - 2$

Problema 10

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}$. Să se calculeze $\int_0^3 f^{-1}(t) dt$, f^{-1} fiind inversa funcției f .

- a) $2 \ln 2 - 1$ b) $3 - \ln 2$ c) $\frac{5}{2} - \ln 4$ d) $\frac{3}{2} + \ln 2$ e) $-\frac{1}{2} + 3 \ln 2$

Problema 11

Să se calculeze $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$

Problema 12

Fie $I = \int_a^b \ln(x+1)dx$, $J = \int_a^b \frac{x}{x+1}dx$ cu $0 < a < b$. Care afirmație este adevărată:

- a) $I = J$ b) $I > J$ c) $J > I$ d) $I = 2J$ e) $I = \frac{a}{a+b}J$

Problema 13

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - i(x+y) - 1 + i$. Dacă $m = |e|$, unde e este elementul neutru al legii, atunci:

- a) $m = 1$ b) $m = \sqrt{2}$ c) $m = \sqrt{5}$ d) $m = 2$ e) $m = \sqrt{3}$

Problemele 14 și 15 au în comun următorul enunț:

Pe mulțimea \mathbb{Z} se definește legea de compoziție: $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$

Problema 14

Suma elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \circ x < 7\}$ este:

- a) 6 b) 8 c) 10 d) 5 e) -4

Problema 15

Suma pătratelor elementelor inversabile în raport cu legea " \circ " este:

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Problema 16

Fie mulțimea $G = \left\{ A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset M_2(\mathbb{Q})$. Să se determine simetricul elementului $A(3)$ în raport cu înmulțirea matricelor.

- a) $A(-3)$ b) $A(-2)$ c) $A\left(\frac{1}{3}\right)$ d) $A(-5)$ e) $A\left(-\frac{1}{3}\right)$

Problema 17

Elementul simetric al unui element x relativ la legea $x \circ y = \sqrt[n]{y^{\log_n x}}$, $x, y > 0$, $x, y \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ fixat este:

- a) $n^{\log_x n}$ b) $n^{n^2 \log_x n}$ c) $n^{2 \log_x n}$ d) $n^2 \cdot \log_x n$ e) $n^{\log_x n}$

Problemele 18, 19 și 20 au în comun următorul enunț:

Pe \mathbb{R} se consideră legea $x \circ y = ax + ay - xy$, $a \in \mathbb{R}$.

Problema 18

Valorile lui a pentru care legea este asociativă sunt:

- a) $[0, \infty)$ b) $\{-1, 0, 1\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $[0, 1]$ e) $\{1\}$

Problema 19

Valorile lui a pentru care legea admite element neutru sunt:

- a) $[-1, 1]$ b) $\{-1, 0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{0, 1\}$

Problema 20

Valorile lui a pentru care mulțimea $H = [0, 1]$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea sunt:

- a) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ b) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ c) $[0, 1]$ d) $[1, \infty)$ e) \mathbb{R}