

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 2021

Etapa pe școală

**CLASA A VII-a**

**Timp de lucru 120 minute. Fiecare problemă se punctează cu un punct.**

**Alegeți varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă**

1) Numărul  $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2021 + 5}$  este:

A) natural    B) întreg    C) rațional    D) irational    E) alt răspuns

2) Dacă  $x = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ , iar  $y = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$ , atunci media geometrică a numerelor  $x$  și  $y$  este:

A)  $\sqrt{3}$     B)  $\sqrt{2}$     C)  $\sqrt{8}$     D) 1    E) alt răspuns

3) Fie  $ABCD$  un trapez isoscel ( $AB \parallel CD$ ) cu diagonalele perpendiculare iar  $E$  și  $F$  sunt mijloacele laturilor neperalele. Dacă  $AC \cap BD = \{O\}$  și perimetrul trapezului  $ABCD$  este de 40 cm, atunci perimetrul triunghiului  $OEF$  este:

A) 30 cm    B) 10 cm    C) 20 cm    D) 15 cm    E) alt răspuns

4) Fie  $ABCD$  un pătrat și punctele  $M$  și  $N$  astfel încât  $A \in (MD)$ ,  $C \in (DN)$ ,  $AM = \frac{1}{2}CN$  și  $m(\widehat{NBC}) = 45^\circ$ . Dacă aria triunghiului  $MDN$  este de  $150 \text{ cm}^2$ , atunci aria pătratului  $ABCD$  este :

A)  $300 \text{ cm}^2$     B)  $75 \text{ cm}^2$     C)  $100 \text{ cm}^2$     D)  $200 \text{ cm}^2$     E) alt răspuns

5) Forma cea mai simplă a fracției  $\frac{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6})}{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  este:

A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     B) 1    C)  $\frac{4}{3}$     D)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$     E) alt răspuns

6) Fie trapezul  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$ ,  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $(AB)$  și  $(CD)$ , iar  $P$  și  $Q$  mijloacele diagonalelor  $(AC)$  și  $(BD)$ . Dacă  $MQNP$  este un pătrat, atunci măsura unghiului  $\hat{A}$  al trapezului este egală cu:

A)  $30^\circ$     B)  $45^\circ$     C)  $60^\circ$     D)  $90^\circ$     E) alt răspuns

7) În triunghiul  $ABC$  ascuțitunghic,  $[AM]$  este mediană, iar  $[BN]$  este înălțime. Dacă  $[BN] \equiv [CM]$ , iar  $BC = 20\text{ cm}$ , atunci perimetrul triunghiului  $BMN$  este egal cu:

A) 30cm      B) 40 cm      C) 50 cm      D) 60 cm      E) alt răspuns

8) Numărul de perechi  $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  ce verifică ecuația:

$$\sqrt{2 \cdot (a+1)^2} - 2\sqrt{2} = |b+1| \cdot \sqrt{3} - |\sqrt{2} - \sqrt{3}| \text{ este:}$$

A)2      B)3      C)2      D)4      E) alt răspuns

9) Dacă  $x$  este un număr natural pentru care  $\sqrt{\frac{5x-19}{x+2}} \in \mathbb{N}$ , atunci suma cifrelor lui  $x$  este:

A)7      B)8      C)9      D) 10      E) alt răspuns

10) Fie numerele reale  $x > 1, y > -1, z > -3$  astfel încât  $x + y + z + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+3} = 3$ . Atunci  $x + y - z$  este egal cu:

A)0      B)1      C)3      D)4      E) alt răspuns

11) În triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , construim bisectoarea  $CD$  a unghiului  $\widehat{ACB}$ ,  $D \in AB$  și  $BE \perp CD$ ,  $E \in CD$ . Știind că  $CD = 2 \cdot DE$ , atunci măsura unghiului  $\widehat{ABC}$  este de:

A)15°      B) 30°      C) 45°      D)60°      E) alt răspuns

12) Din punctul  $A$ , situat la  $13\text{ cm}$  de centrul unui cerc cu raza de  $5\text{ cm}$ , se construiesc tangentele la cerc,  $T_1$  și  $T_2$  fiind punctele de tangență. Dacă punctele  $B$  și  $C$  sunt pe segmentele  $AT_1$ , respectiv  $AT_2$  astfel încât dreapta  $BC$  este tangentă la cerc, atunci perimetrul triunghiului  $ABC$  este de:

A) 36 cm      B) 24 cm      C) 26 cm      D) 32 cm      E) alt răspuns

13) Se consideră ecuația:  $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-y} = 3$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Numărul soluțiilor ecuației este:

A) 4      B) 6      C) 2      D) 8      E) alt răspuns

14) Fie  $ABCD$  romb și  $O$  intersecția diagonalelor. Pe segmentul  $(OC)$  se consideră punctul  $N$  oarecare. Fie  $M$  un punct pe segmentul  $(AB)$  astfel încât  $DN \perp CM$  și  $CM \cap BD = \{P\}$ . Măsura unghiului dreptelor  $AP$  și  $BN$  este egală cu :

A)30°      B)60°      C)45°      D)90°      E) alt răspuns

**15)** Pentru câte valori ale numărului natural nenul  $n$ , numărul  $M = \frac{4n+10}{n^2+2}$  este număr natural ?

- A)8                      B)2                      C)4                      D)10                      E) alt răspuns

**16)** Pentru câte valori ale numărului natural nenul  $n$ ,  $a = \sqrt{1!+2!+3!+\dots+n!}$  este număr natural? ( $1! = 1, 2! = 1 \cdot 2, \dots, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ )

- A)1                      B)5                      C)2                      D)4                      E) alt răspuns

**17)** Dacă  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $\sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x_2 - \frac{1}{6}\right)^2} + \sqrt{\left(x_3 - \frac{1}{12}\right)^2} + \dots + \sqrt{\left(x_n - \frac{1}{2021 \cdot 2022}\right)^2} = 0$ . Atunci suma  $S = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$  verifică inegalitatea:

- A)  $S > 1$               B)  $S < 1$               C)  $S = 1$               D)  $S > 2$               E) alt răspuns

**18)** Care este ultima cifră a numărului  $a = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \dots + [\sqrt{2020 \cdot 2021}]$  unde  $[x] =$  partea întreagă a numărului  $x$

- B)6                      B)5                      C)4                      D)0                      E) alt răspuns

**19)** Prin vârfurile unui triunghi echilateral de latura  $2\text{ cm}$  se trasează arce de cerc care intersectează laturile triunghiului în mijlocul acestora. Aria suprafeței din interiorul triunghiului determinată de cele trei arce este:

- A)  $\pi + \sqrt{3}$               B)  $2\pi - \sqrt{3}$               C)  $\pi - \sqrt{3}$               D)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$               E) alt răspuns

**20)** Pe laturile  $[AB]$  și  $[BC]$  ale triunghiului  $\Delta ABC$  se consideră punctele  $E$  și  $F$  astfel încât  $AE = 2EB$  și  $CB = 3FB$ , iar  $D$  este un punct arbitrar pe latura  $[AC]$ . Dacă aria patrulaterului  $BEDF$  este  $16\text{ cm}^2$ , atunci aria triunghiului  $\Delta ABC$  este:

- A)  $48\text{ cm}^2$               B)  $32\text{ cm}^2$               C)  $64\text{ cm}^2$               D)  $24\text{ cm}^2$               E) alt răspuns