Olimpiada Națională Gazeta Matematică (ONGM) 2020-2021
Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-XII-a

- Soluții -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Soluții

Problema 1

Valoarea numărului $I = \int_0^2 |x-1|dx$ este:

a) 0 b) -1 c) 1 d) $\frac{1}{2}$ e) 2

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 2

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = ax + (bx^2 + c) \cdot \operatorname{arctg} x$ este primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$

a) $a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2}$ b) $a = b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\frac{1}{2}$

d) $a = b = c = \frac{1}{2}$ e) $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $1p$

Problema 3

Fie F primitiva functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin x$ cu proprietatea $F(0) = 0$. Atunci $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ are valoarea:

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) 1 e) -1

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 4

Fie F primitiva funcției $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 0) \\ \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in [0, 1) \end{cases}$, cu proprietatea $F\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$. Atunci $F\left(\frac{1}{2}\right)$ este egal cu:

a) $\frac{\pi+2}{3}$ b) $\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}-\pi}{2}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 5

Primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{-2x}+1}}$, sunt:

a) $\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e$ b) $\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)+e$ c) $\sqrt{e^{-2x}+1}+e$

d) $(1+e^x)^2+e$ e) $\operatorname{arctg}(e^x)+e$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 6

Să se determine $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}, x>0$

a) $\ln\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+C$ b) $\ln\sqrt{1+x^2}+C$ c) $-\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)+C$

d) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$ e) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}+C$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 7

Fie $I=\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}$, atunci:

a) $I=\dfrac{\pi}{6}$ b) $I=\dfrac{\pi}{12}$ c) $I=\dfrac{\pi}{18}$ d) $I=\dfrac{\pi}{8}$ e) $I=\dfrac{\pi}{24}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $1p$

Problema 8

Să se determine $m\in\mathbb{R}$ dacă $m\cdot\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}e^{mx^2+\ln x}dx=1$.

a) 4 b) $\ln 2$ c) 1 d) 2 e) $\ln\dfrac{1}{2}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problema 9

Să se calculeze $\displaystyle\int_1^9\frac{[\ln x]}{x}dx$

a) $2\ln 3$ b) $2\ln 9-1$ c) $4\ln 3-3$ d) $2\ln 3-2$ e) $4\ln 3-2$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 10

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+5x}{x^2+1}$. Să se calculeze $\int_0^3 f^{-1}(t)dt$, f^{-1} fiind inversa funcției f.

Supliment GM

a) $2\ln 2-1$ b) $3-\ln 2$ c) $\dfrac{5}{2}-\ln 4$ d) $\dfrac{3}{2}+\ln 2$ e) $-\dfrac{1}{2}+3\ln 2$

Răspuns corect: c) .... $1p$

Problema 11

Să se calculeze $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{1+e^x}dx$.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{1}{4}$

Răspuns corect: d) .... $1p$

Problema 12

Fie $I=\int_a^b \ln(x+1)dx$, $J=\int_a^b \dfrac{x}{x+1}dx$ cu $0<a<b$. Care afirmație este adevărată:

a) $I=J$ b) $I>J$ c) $J>I$ d) $I=2J$ e) $I=\dfrac{a}{a+b}J$

Răspuns corect: b) .... $1p$

Problema 13

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-i(x+y)-1+i$. Dacă $m=|e|$, unde e este elementul neutru al legii, atunci:

a) $m=1$ b) $m=\sqrt{2}$ c) $m=\sqrt{5}$ d) $m=2$ e) $m=\sqrt{3}$

Răspuns corect: b) .... $1p$

Problemele 14 și 15 au în comun următorul enunț:

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție: $x\circ y=xy-2x-2y+6$

Problema 14

Suma elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z}/x\circ x<7\}$ este:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 5 e) -4

Răspuns corect: c) .... $1p$

Problema 15

Suma pătratelor elementelor inversabile în raport cu legea "$\circ$" este:

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $1p$

Problema 16

Fie mulțimea $G = \left\{ A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset M_2(\mathbb{Q})$. Să se determine simetricul elementului $A(3)$ în raport cu înmulțirea matricelor.

a) $A(-3)$ b) $A(-2)$ c) $A\left(\frac{1}{3}\right)$ d) $A(-5)$ e) $A\left(-\frac{1}{3}\right)$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $1p$

Problema 17

Elementul simetric al unui element x relativ la legea $x \circ y = \sqrt[n]{y^{\log_n x}}$, $x, y > 0$, $x, y \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ fixat este:

a) $n^{n \log_x n}$ b) $n^{n^2} \log_x n$ c) $n^{2 \log_x n}$ d) $n^2 \cdot \log_x n$ e) $n^{\log_x n}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $1p$

Problemele 18, 19 și 20 au în comun următorul enunț:

Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea $x \circ y = ax + ay - xy$, $a \in \mathbb{R}$.

Problema 18

Valorile lui a pentru care legea este asociativă sunt:

a) $[0, \infty)$ b) $\{-1, 0, 1\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $[0, 1]$ e) $\{1\}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $1p$

Problema 19

Valorile lui a pentru care legea admite element neutru sunt:

a) $[-1, 1]$ b) $\{-1, 0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{0, 1\}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{e)}}$ .... $1p$

Problema 20

Valorile lui a pentru care mulțimea $H = [0,1]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea sunt:

a) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ b) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ c) $[0,1]$ d) $[1,\infty)$ e) $\mathbb{R}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $1p$