

**Olimpiada Națională**  
**GAZETA MATEMATICĂ**

clasa a VIII-a

Etapa I

26 februarie 2021

Timp de lucru: **120 de minute**

Fiecare problemă rezolvată corect se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns. **O singură variantă este corectă.**

**Problemele 1-3 se referă la următorul enunț:**

Se dă cubul  $ABCD A' B' C' D'$ , de latură  $a$  și fie  $M$  simetricul punctului  $A$  față de punctul  $B$ . Se notează cu  $O$  punctul de intersecție al diagonalelor bazei  $ABCD$ .

1. Cu cât este egală, în funcție de  $a$ , lungimea segmentului  $OM$ ?

**A.**  $\frac{a\sqrt{10}}{5}$

**B.**  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

**C.**  $\frac{a\sqrt{2}}{5}$

**D.**  $a\sqrt{10}$

2. Cu cât este egală, în funcție de  $a$ , distanța de la punctul  $C'$  la dreapta  $OM$ ?

**A.**  $\frac{a\sqrt{35}}{5}$

**B.**  $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

**C.**  $\frac{a}{5}$

**D.**  $a\sqrt{5}$

3. Sinusul unghiului dintre dreptele  $BD'$  și  $C'O$  este egal cu:

**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**C.**  $\frac{\sqrt{5}}{4}$

**D.**  $\frac{\sqrt{7}}{3}$

4. Între numerele  $x$  și  $y$  există relația:  $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 64 = 0$ .

Atunci este adevărată una dintre afirmațiile:

**A.**  $x \in [2,6], y \in [0,14]$

**B.**  $x \in [6,12], y \in [0,2]$

**C.**  $x \in [10,12], y \in [2,7]$

**D.**  $x \in [0,12], y \in [2,14]$

5. Pe planul triunghiului echilateral  $ABC$  cu latura de  $2a$  se ridică în punctul  $A$  o perpendiculară pe care se ia punctul  $S$  astfel încât  $SA = a$ . Măsura unghiului diedru format de planele  $(SBD)$  și  $(ABC)$ , unde  $D$  mijlocul lui  $[AC]$ , este de:

- A.**  $30^\circ$                       **B.**  $45^\circ$                       **C.**  $60^\circ$                       **D.**  $90^\circ$

6. Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  ecuația:

$$\sqrt{x^2 - 2000} + \sqrt{2074 - x^2} = |44x + 1992|:$$

- A.**  $x = 45$                       **B.**  $x = -45$   
**C.**  $x \in \{-45, 45\}$                       **D.**  $x \in \emptyset$

7. Dacă numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$  verifică relația  $|3a + 4| + b^2 - 12b + 36 + |2c + 5| = 0$ , atunci produsul lor este:

- A.** 0                      **B.** 10                      **C.** 20                      **D.** -20

8. În cubul  $ABCD A'B'C'D'$  notăm cu  $M$  și  $N$  mijloacele muchiilor  $AB$  și  $B'C'$ . Valoarea sinusului unghiului dintre dreapta  $MN$  și planul  $(ABC)$  este:

- A.**  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       **B.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       **C.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       **D.**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Pentru trei numere reale nenule  $a$ ,  $b$  și  $c$  avem relațiile:  $a + \frac{1}{b} = 2$ ,  $b + \frac{1}{c} = 3$  și  $c + \frac{1}{a} = 5$ . Valoarea expresiei  $abc + \frac{1}{abc}$  este:

- A.** 10                      **B.** 20                      **C.** 20                      **D.** 30

10. Considerăm  $[a]$  ca fiind partea întreagă a numărului  $a$ .

Ce se poate spune despre inegalitatea:

$$x^6 + y^6 + z^6 \geq 3 \cdot [x]^2 \cdot [y]^2 \cdot [z]^2:$$

- A.** Este adevărată doar pentru toate numerele raționale.  
**B.** Este adevărată pentru toate numerele reale.  
**C.** Este falsă pentru toate numerele reale.  
**D.** Este adevărată pentru toate numerele reale mai puțin cele întregi.

11. Avem un cadran în formă de pătrat cu latura de  $2\text{cm}$ . Dacă se aruncă 5 bile în interiorul său, atunci:

- A. Distanța dintre oricare două bile este mai mică de  $2\text{cm}$ .
- B. Distanța dintre cel puțin două bile este mai mică de  $2\sqrt{2}\text{cm}$ .
- C. Distanța dintre oricare două bile este mai mare de  $2\sqrt{2}\text{cm}$ .
- D. Nicio afirmație nu este adevărată.

**Problemele 12-14 se referă la următorul enunț:**

Pe planul triunghiului isoscel  $ABC$  se ridică perpendiculara  $AD$ . Dacă  $BC = 48$ ,  $AD = 18\sqrt{3}$ , iar  $AB = AC = 30\text{cm}$ , cu cât este egală:

12. Distanța  $d(D, BC)$ ?

- A. 12                                      B. 24                                      C. 36                                      D. 72

13. Măsura unghiului dintre dreapta  $AD$  și planul  $(DBC)$ ?

- A.  $30^\circ$                                       B.  $45^\circ$                                       C.  $60^\circ$                                       D.  $90^\circ$

14. Distanța  $d(D, BC)$ ?

- A.  $18\sqrt{3}$                                       B.  $3\sqrt{3}$                                       C.  $6\sqrt{3}$                                       D.  $9\sqrt{3}$

15. Fie numărul  $\sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{18 - \sqrt{5}}}}$ . Numărul este:

- A. Mai mare ca 0, dar mai mic decât 1
- B. Mai mic decât 3
- C. Mai mic decât 4
- D. Mai mare decât 5

**Problemele 16-17 au legătură între ele:**

16. Comparați numărul  $\frac{a^2+b^2}{ab}$  cu 2, unde  $a$  și  $b$  sunt numerele reale pozitive:

- A. Mai mic                                      B. Egal                                      C. Mai mare                                      D. Nu se pot compara

17. Comparați numărul  $\frac{a+n}{b} + \frac{b+n}{a}$  cu  $n(a+b) + 2$ , unde  $a, b \in (0,1]$  și  $n > 0$ :

- A.** Mai mare      **B.** Egal      **C.** Mai mic      **D.** Nu se pot compara

18. Într-un paralelipiped dreptunghic suma tuturor muchiilor este 76 cm, iar lungimea diagonalei este 13 cm. Dacă  $a, b$  și  $c$  sunt dimensiunile paralelipipedului, cu cât este egală expresia:

$$E = (a + b + c)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)?$$

- A.** 33      **B.** 361      **C.** 338      **D.** 23

19. Determinați  $a$  și  $b$  din egalitatea:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{a - 2014} + \sqrt{b + 2014} - 2 - \frac{a + b}{2} = 0$$

- A.**  $a = 2020, b = -2010$   
**B.**  $a = 2019, b = -2011$   
**C.**  $a = 2015, b = -2001$   
**D.**  $a = 2017, b = -2013$

20. Numărul numerelor întregi care satisfac relația:  $4a^2 - 12a \leq -9$  este:

- A.** 0      **B.** 1      **C.** 2      **D.** 3