Olimpiada de Matematică-ETAPA I

Clasa a IX-a

Timp de lucru 120 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Numărul $(3+\sqrt{5})\cdot\{-\sqrt{5}\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului a, este:

A. 1 **B.** 4 **C.** $\sqrt{5}$ **D.** 5 **E.** 0

2. Soluţia ecuaţiei $7[x]^2-8[x]+1=0$ este mulţimea:

A. $S=(1,2]$ **B.** $S=[0,2)$ **C.** $S=\{1\}$ **D.** $S=[1,2)$ **E** . $S=\varnothing$.

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $S_n=a_1+a_2+....+a_n=5n^2-3n$ suma primilor săi n termeni.

Care număr este termen al şirului?

A. 222 **B.** 223 **C.** 225 **D.**226 . **E.** 227.

4. Dacă $a, x\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $a=\dfrac{x}{x^2+x+1}$, atunci $x+\dfrac{1}{x}$ va fi egal cu:

A. $\dfrac{1}{a}$; **B.** $1+\dfrac{1}{a}$ **C.** $\dfrac{a-1}{a}$ **D.** $\dfrac{1-a}{a}$ **E** . $-\dfrac{1}{a}$.

5. Fie numărul $A=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\dfrac{1}{100^2}\right)$. Partea întreagă a lui A este:

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3 **E** . 4.

6. Suma soluţiilor ecuaţiei $\left[\dfrac{x+1}{3}\right]=\dfrac{x-3}{2}$ este egală cu:

A. 26 **B.** 11 **C.** 27 **D.** 18 **E** .7

7. Dacă numerele raţionale x şi y verifică $(2x+y+2)\sqrt{2}+(4x+y+5)\sqrt{3}=0$, atunci suma $x+y$ este egală cu:

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** -2 **D.** -4 **E** . -1 .

8. Mulţimea de adevăr a predicatului $p(x)$: “ $\left||-2x+1|-4\right|\leq 5,\ x\in\mathbb{R}$ ” este:

A. $[-4;5]$ **B.** $[4;5]$ **C.** $[-5;-1]\cup[1;5]$; **D.** $[1;5]$; **E.** $(-\infty,-4]\cup[5,\infty)$.

9. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Ştiind că $a_1 + a_5 + a_9 = 81$, atunci suma $S = a_3 + a_4 + a_5 + a_8$ este egală cu:

A. 324 **B**. 72 **C.** 108 **D.** 81 **E** . 104.

10. *Produsul* numerelor naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care suma $S_n = \frac{30}{1\cdot 3} + \frac{30}{3\cdot 5} + \frac{30}{5\cdot 7} + ... + \frac{30}{(2n-1)(2n+1)}$ este număr natural va fi egal cu:

A. 10 **B**. 7 **C.** 2 **D.** 14 **E** 15

11. Punând în ordine crescătoare numerele $a = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $b = \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$, $c = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, obţinem:

A. $c < b < a$; **B**. $c < a < b$; **C**. $b < a < c$; **D**. $b < c < a$; **E**. $a < b < c$

12. Dacă $a > b > 0$ şi $a^2 + b^2 = 4ab$, atunci valoarea raportului $\frac{a+b}{a-b}$ este:

A. 3; **B**. $1+\sqrt{3}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $2+\sqrt{3}$ **E** . $\sqrt{3}$

13. Dacă x si y sunt nenule şi $x^3 + y^3 = 2021 \cdot (x+y)$, atunci valoarea maximă a lui $x \cdot y$ este:

A. $\sqrt{2021}$ **B**. 2021 **C.** 2022 **D.** $2\sqrt{2021}$ **E** .4042.

14. Dacă a şi b sunt numere raţionale astfel încât $a\sqrt{5}+9$, $2b\sqrt{5}+3$ şi $a\sqrt{5}+3b$ sunt în progresie aritmetică, atunci raportul $\frac{a}{b}$ este egal cu:

A. $\frac{1}{2}$ **B**. 1 **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 3 **E** . 2.

15. Dacă $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ atunci:

A. $x < y$ **B**. $x \cdot y > 0$ **C.** $x + y > 10$ **D.** $x + y < -10$ **E** . $x > y$.

16. Dacă $a \geq \frac{2}{3}$, $b \geq \frac{3}{4}$ şi $3a + 4b = 7$, atunci valoarea maximă a lui $\sqrt{3a-2} + \sqrt{4b-3}$ este egală cu:

A. 2 **B**. $\frac{1}{2}$ **C**. $\sqrt{2}$ **D**. $\frac{7}{2}$ **E.** 4.

17. Dacă vectorii $\vec{u} = (a-2)\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{j}$ şi $\vec{v} = 4\cdot\vec{i} + (a+2)\cdot\vec{j}$ sunt coliniari, atunci numărul negativ a este:

A. $-\frac{1}{2}$; **B**. -4; **C**. -6; **D.** $-\frac{3}{2}$; **E.** -1.

18. Se consideră patrulaterul convex *ABCD*. Fie G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor *ACD* şi *CDB*. Atunci avem:

A. $\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{BG_2} = 2\overrightarrow{G_2G_1}$ **B**. $\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{BG_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2}$ **C.** $\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{BG_2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{G_1G_2}$

D. $\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{BG_2} = 3\overrightarrow{G_2G_1}$ **E.** $\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{BG_2} = 2\overrightarrow{G_1G_2}$.

19. Fie $ABCD$ patrulater convex, E şi F mijloacele diagonalelor, iar O mijlocul segmentului (EF). Dacă M este un punct oarecare în plan, atunci

A. $3\cdot\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ **B**. $2\cdot\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

C. $8\cdot\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ **D.** $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

E . $4\cdot\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

20. Se consideră ΔABC şi punctul D cu $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC}$. Fie $M \in (AD)$ cu $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{4}$ şi

$BM \cap AC = \{P\}$. Atunci:

A. $\overrightarrow{AC} = 2\cdot\overrightarrow{PC}$ **B**. $\overrightarrow{AC} = -2\cdot\overrightarrow{PC}$ **C.** $\overrightarrow{AC} = 6\cdot\overrightarrow{PC}$ **D.** $\overrightarrow{AP} = 2\cdot\overrightarrow{PC}$ **E.** $\overrightarrow{AP} = 3\cdot\overrightarrow{PC}$.