SSMR
CNSHB

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA I – 20 FEBRUARIE 2021
CLASA a XI-a

① Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci rezultatul calculului $Tr(AB)-Tr(BA)$ este:

A). 1 ; B). 0 ; C) 8 ; D) −5

② Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci matricea A^n este:

A). $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3^n & 1 \end{pmatrix}$; B). $\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; C). $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$; D). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$

③ Fie ecuația matriceală $3X^5+X^2=\begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Atunci matricea X este:

A). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C). $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ D). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & 1 \end{pmatrix}$

④ Dacă $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a.î. $Tr(A\cdot {}^tA)=0$ atunci A este:

A). O_2 B). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ C). I_2 D). $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

⑤ Numărul soluțiilor reale ale ecuației $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix}=0$ este:

A). 5 B). 4 C). 3 D). 2

⑥ Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$ atunci valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a+2 & b+2 & c+2 \\ a-2 & b-2 & c-2 \\ a^2-4 & b^2-4 & c^2-4 \end{vmatrix}$ este:

A) 0 ; B). $a+b+c$; C). $-4(a-b)(b-c)(c-a)$; D). abc

⑦ Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1-3m \\ 2m+3 & -1 \end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$. Valorile lui m pentru care matricea A este inversabilă sunt din mulțimea:

A) $\mathbb{R}$; B) $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3};\frac{1}{2}\right\}$; C). $\emptyset$; D). $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

⑧ Matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & -2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ are rangul minim pentru

A) $a=1$, $b=3$; B) $a=1$, $b=2$; C) $a=3$, $b=6$; D). $a=0$, $b=1$

⑨ Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{C_{n+1}^{n-1}}$ este:

A). 1 ; B). 3 ; C). 0 ; D). 2

⑩ Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\sqrt{n}}{n+1+3\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{\sqrt{n+1}}}$ este:

A) e ; B) 1 ; C) e^{-2} ; D). e^2

(11) Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\dots+\frac{1}{n(n+3)}\right)$ este:

A) $\frac{11}{18}$; B) $\frac{1}{3}$; C) 0 ; D) $\frac{2}{3}$

(12) Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{2}]+[2^2\sqrt{2}]+\dots+[n^2\sqrt{2}]}{n^3+n}$ este:

A) $\sqrt{2}$; B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; C) 1 ; D). $2\sqrt{2}$

(13) Dacă $p\in\mathbb{N}^*$ atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}+1}$ este:

A) $\frac{1}{p+1}$; B) 1 ; C) $\frac{p}{p+1}$; D). 0

(14) Dacă $a\in\mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)=0$ atunci a este:

A). 1 B). 0 C). -1 D). 2

(15) Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\,(2n)!}{(3n)!}}$ este:

A). 1 B). $\frac{2}{3}$ C). 0 D). $\frac{4}{27}$

(16) Fie șirul dat prin $x_{n+1}=x_n+\sqrt{x_n}$, $n\geq1$, $x_1=1$.
Atunci șirul este:

A) mărginit ; B) strict crescător ; C) convergent ; D) are limita 0

(17) Valoarea limitei $\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos 2x)(1-\cos 3x)\dots(1-\cos nx)}{x^{2n}}$ este:

A) 0 ; B) 1 ; C) $\frac{n}{2}$; D) $\frac{(n!)^2}{2^n}$

(18) Valoarea limitei $\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ este;

A) 0 ; B) 1 ; C) $\frac{1}{2}$; D) -1

(19) Valoarea numărului real a pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2^{\log_2 x}}{x-1}, & x<1\\ 2a\sin\frac{\pi x}{3}, & x\geq1\end{cases}$$ are limită în pct. 1 este:

A) 1 ; B) $\sqrt{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; D) 0

(20) Numărul asimptotelor la graficul funcției $f:D\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$ este;

A). 1 B). 2 C). 3 D). 0