Prima etapă a Olimpiadei “Gazeta Matematică” – Clasa a X-a

Colegiul Naţional “Sf. Sava”©*

27.02.2021

1. Partea întreagă a numărului $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ este:

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

2. Fie D mulţimea valorilor reale pentru care expresia $\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}}$ are sens. Atunci

   (a) $D=(0,\infty)$ (b) $D=(-\infty,0)$ (c) $D=\mathbb{R}$ (d) $\operatorname{card}(D)=3$ (e) $\operatorname{card}(D)=1$

3. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $12^a=3$, $12^b=2$ şi fie $x=49^{\frac{1-a-b}{1-a}}$. Atunci:

   (a) $x\in\mathbb{N}$ (b) $x>8$ (c) $x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ (d) $x\notin\mathbb{Q}$ (e) $[x]=10$

4. Fie $a,b\,0,a,b\neq 1$ şi $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 2$. Dacă $\log_{\sqrt[n]{a}}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\log_a b}$, atunci:

   (a) $a=\sqrt[n]{b}$ (b) $b=\sqrt[n]{a}$ (c) $ab=1$ (d) $a=b$ (e) $a,b>1$

5. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$ şi $g(x)=5x+4$. Atunci:

   (a) $f\circ g=g\circ f$ (b) $\exists x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$ (c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$ (d) $f\circ f=g\circ g$ (e) $g=f^{-1}$

*Timp de lucru: 120 de minute. Fiecare dintre cele 20 de probleme are un singur răspuns corect. Încărcaţi o fotocopie până la 12:15. Punctajul necesar calificării este de peste 70% din cel mai mare punctaj obţinut.

6. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + |x|$ şi $g(x) = x - |x|$. Atunci:

(a) f e surjectivă şi g e injectivă (b) g e surjectivă şi f e injectivă (c) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2)$ (d) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ (e) $f \circ g$ şi $g \circ f$ sunt funcţii constante

7. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n + 1$, $g(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, n \text{ impar} \\ 0, n \text{ par} \end{cases}$

Atunci:

(a) f şi g sunt injective (b) f şi g sunt surjective (c) $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$ (d) $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ şi $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$ (e) $g \circ f \neq 1_{\mathbb{N}}$ şi $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$

8. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x)) = x + 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Atunci:

(a) f este injectivă şi nesurjectivă (b) f este neinjectivă şi surjectivă (c) f este neinjectivă şi nesurjectivă (d) $f \circ f \circ f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ (e) f este bijectivă

9. Se consideră funcţia inversabilă $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$. Numărul $f^{-1}(0) - f^{-1}(1) + f^{-1}(3) - f^{-1}(4)$ este egal cu:

(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$ (e) $\frac{4}{3}$

10. Considerăm funcţiile $f, g : A \to A$ definite prin $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ şi $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}$, unde $A = (-1, 1)$. Atunci:

(a) f şi g sunt injective şi nesurjective (b) f şi g sunt neinjective şi surjective (c) $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbb{A}}$ (d) $g \circ f = 1_{\mathbb{A}}$ şi $f \circ g \neq 1_{\mathbb{A}}$ (e) $g \circ f \neq 1_{\mathbb{A}}$ şi $f \circ g = 1_{\mathbb{A}}$

11. Fie M mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \begin{cases} x, x \in \mathbb{Q} \\ ax, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este bijectivă. Atunci:

(a) $M = \{1\}$ (b) $M = \{-1, 0, 1\}$ (c) $M = [-1, 1]$ (d) $M = \mathbb{Q}^*$ (e) $M = \mathbb{R}^*$

12. Fie $B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, f = f^{-1}\}$. Atunci

(a) $B = \emptyset$ (b) $B = \{1_{\mathbb{R}}\}$ (c) B are două elemente (d) B este infinită (e) B este finită cu cel puţin 3 elemente

13. Fie S mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}=4$ şi fie n numărul de elemente ale lui S. Atunci:

(a) $n=2$ (b) $S=\mathbb{R}$ (c) $S=[-1,3]$ (d) $S=\emptyset$ (e) $n=1$

14. Fie ecuaţia $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}-\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=4$ şi S mulţimea soluţiilor ecuaţiei. Atunci:

(a) $S=\emptyset$ (b) $S=[2,\infty)$ (c) $S=[6,\infty)$ (d) $S=\mathbb{R}$ (e) $S=[4,\infty)$

15. Fie S şi T mulţimile soluţiilor ecuaţiilor $\dfrac{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}}=2x-1$ şi $\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}}=2x-1$. Fie n, respectiv p numărul elementelor mulţimilor S, respectiv T. Atunci:

(a) $n=p=2$ (b) $n=p=1$ (c) $S\cap T\neq\emptyset$ (d) $\mathrm{card}(S\cup T)=1$ (e) $n=p=0$

16. Fie n numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $12\cdot16^x-25\cdot12^x+12\cdot9^x=0$ şi fie S suma acestor soluţii. Numărul $S+n$ este egal cu:

(a) 2 (b) 4 (c) $2+\log_2 3$ (d) $3+\log_3 4$ (e) 3

17. Fie S mulţimea soluţiilor ecuaţiei $3^{|x+1|}-2\cdot|3^x-1|=3^x+2$. Atunci:

(a) $\mathrm{card}(S)=1$ (b) $\mathrm{card}(S)=2$ (c) $\mathrm{card}(S)=3$ (d) $S=\mathbb{R}$ (e) $S=[0,\infty)$

18. Fie n numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$ şi fie S suma acestor soluţii. Numărul $S+n$ este egal cu:

(a) $2+\log_2 3$ (b) $2+\log_3 2$ (c) 0 (d) 2 (e) 3

19. Fie S mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^{\log_3(x+1)}+2(x+1)^{\log_3 x}=3x^2$. Atunci:

(a) $S=\emptyset$ (b) $\mathrm{card}(S)=2$ (c) $S\setminus\mathbb{Q}\neq\emptyset$ (d) $S\cap(0,1)\neq\emptyset$ (e) $\mathrm{card}(S)=1$

20. Fie S mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\log_x\sqrt[3]{4}+3\log_x(x\sqrt[3]{2})+(\log_x\sqrt[3]{4})^2=12$. Atunci:

(a) $S=\emptyset$ (b) $\mathrm{card}(S)=1$ (c) $S\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (d) $S\cap(0,1)=\emptyset$ (e) $S\subset\mathbb{Q}$