



Olimpiada Națională Gazeta Matematică
(ONGM) 2020-2021
Organizator local Upper.School

Etapa I
Clasa a-IX-a

- Soluții -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

§1 Soluții

Problema 1

Fie $A = (\sqrt{2}, 100 - \sqrt{2})$ și $B = (\sqrt{5}, 100 + \sqrt{5})$. Câte numere naturale conține mulțimea $A \cap B$?

- a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 107

Răspuns corect: 1p

Problema 2

Să se determine suma soluțiilor ecuației: $|x| + |x + 2| = 3$

- a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2

Răspuns corect: 1p

Problema 3

Suma soluțiilor întregi ale inecuației $|9 - |2x - 1|| \leq 4$ este egală cu:

- a) -4 b) 8 c) 0 d) 5 e) 11

Supliment GM

Răspuns corect: 1p

Problema 4

Să se determine numărul de elemente al mulțimii: $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \middle/ \frac{x+4}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Răspuns corect: 1p

Problema 5

Fie $A = \left\{ \sum_{k=1}^{n^2+4n+3} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \middle/ n \in \mathbb{N} \right\}$. Atunci:

- a) $A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ b) $A \subset \{2n + 1/n \in \mathbb{N}^*\}$ c) $A \subset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
d) $A = \mathbb{N}^*$ e) $A \subset \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

Răspuns corect: 1p

Problema 6

Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se determine ordinea crescătoare a numerelor $a = \sqrt{n} + \sqrt{n+5}$, $b = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}$, $c = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}$

- a) a, b, c b) c, b, a c) a, c, b d) b, a, c e) c, a, b

Răspuns corect: a) 1p

Problema 7

Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuația $\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0$ să aibă cel puțin o soluție reală.

- a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ d) $2 \pm \sqrt{2}$ e) $-2.1 \pm \sqrt{2}$

Răspuns corect: b) 1p

Problema 8

Soluțiile inecuației $\left(a \cdot \frac{x}{y} + b\right)^2 + \left(a \cdot \frac{y}{x} + b\right)^2 \geq 2(a+b)^2$, unde $x, y > 0$ și $a, b > 0$ sunt:

- a) $x = y = 1$ b) $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ c) $x = y > 0$ d) $x \geq 1, y \geq 1$ e) $x, y \in \mathbb{N}$

Răspuns corect: b) 1p

Problema 9

Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației: $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) O infinitate

Răspuns corect: b) 1p

Problema 10

Se consideră ecuația: $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = 2x$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a lui x . Atunci ecuația:

- a) Nu are soluții b) Are două soluții
c) Are soluții întregi d) Are soluții iraționale
e) Are o infinitate de soluții

Supliment GM

Răspuns corect: ☐ e) 1p

Problema 11

Fie numerele reale a, b, c cu $a^2 + b^2 + c^2 = 21$. Să se determine valoarea maximă a expresiei $a - 2b + 3c$

- a) $2\sqrt{21}$ b) $3\sqrt{21}$ c) $6\sqrt{21}$ d) $6\sqrt{7}$ e) $7\sqrt{6}$

Răspuns corect: ☐ e) 1p

Problemele 12, 13 și 14 au în comun următorul enunț:

Fie mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 10\}$. Câte submulțimi ale lui A satisfac cerințele:

Problema 12

Nu conțin numere pare

- a) 64 b) 32 c) 60 d) 16 e) 20

Răspuns corect: ☐ b) 1p

Problema 13

Conțin cel puțin un număr impar

- a) 31 b) 63 c) 992 d) 512 e) 256

Răspuns corect: ☐ c) 1p

Problema 14

Conțin atât numere pare cât și numere impare

- a) 512 b) 960 c) 961 d) 962 e) 1024

Răspuns corect: ☐ c) 1p

Problema 15

Pentru orice trei puncte A, B, C din plan este verificată una din egalitățile:

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
d) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ e) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Răspuns corect: ☐ c) 1p

Problema 16

Fie A, B, C un triunghi și punctele M, N definite prin $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ atunci:

- a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC})$ b) $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 d) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{MN} = \frac{2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{3}$

Răspuns corect: ☐ e) 1p

Problema 17

În planul XOY se consideră vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = m\vec{i} + \vec{j}$ unde $m \in \mathbb{R}$. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă:

- a) $m = 1$ b) $m = -\frac{1}{2}$ c) $m = -1$ d) $m = 2$ e) $m = -\frac{1}{5}$

Răspuns corect: ☐ e) 1p

Problema 18

Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC . Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ fie respectiv punctele D și E astfel că $AB = 3AD$ și $AC = 2AE$ iar $DE \cap AM = \{F\}$. Să se determine $k \in \mathbb{R}$, dacă $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AF}$.

- a) 1 b) 2 c) 5 d) -1 e) 4

Răspuns corect: ☐ c) 1p

Problema 19

Fie G centrul de greutate al triunghiului neechilateral ABC , iar H ortocentrul său. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = m \cdot \overrightarrow{OG}$, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

- a) 3 b) -3 c) -6 d) 0 e) $-\frac{1}{3}$

Răspuns corect: ☐ c) 1p

Problema 20

Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$. Dacă $\overrightarrow{AD} = m \cdot \overrightarrow{BF} + n \cdot \overrightarrow{BD}$, $m, n \in \mathbb{R}$ atunci $m + n$ are valoarea:

- a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{2}{3}$ d) 2 e) $-\frac{1}{3}$

Răspuns corect: ☐ c) 1p