Timp de lucru 120 de minute. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

(1) Dacă $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \ln \cos x dx$, atunci:
 (a) $I = \ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}$
 (b) $I = \ln 2 - \frac{1}{2}$
 (c) $I = \ln \sqrt{2} - \frac{1}{4}$
 (d) $I = \ln \sqrt{2} + \frac{1}{2}$
 (e) $I = \ln \sqrt{2} + \frac{1}{4}$

(2) Pentru $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ şi $k \geq 3$ număr natural impar, pe mulţimea $G = (0, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \star y = a^{\sqrt[k]{\log_a^k x + \log_a^k y - \log_a^k b}}, \forall x, y \in G$. Dacă e este elementul neutru al acestei legi, x' este simetricul elementului 1 în raport cu legea $\star$, iar $S = e + x'$ atunci:
 (a) $S = b + b^{2^{\frac{1}{k}}}$
 (b) $S = b + b^{2k}$
 (c) $S = k + b$
 (d) $S = b + a^{\sqrt{b}}$
 (e) $S = k + b \cdot a^k$

(3) Pentru $m, n \in \mathbb{R}^*$ se defineşte legea $x \star y = xy + 2mx + ny, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Se consideră (m_0, n_0) numerele reale pentru care legea $\star$ este asociativă, comutativă şi are element neutru. Dacă B este mulţimea elementelor reale care nu sunt simetrizabile în raport cu legea $\star$ determinată de perechea (m_0, n_0) şi $S = \sum_{x \in B} |x|$, atunci:
 (a) $S = 0$
 (b) $S = 4$
 (c) $S = 1$
 (d) $S = 7$
 (e) $S = 3$

(4) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia $f(a - x) + f(a + x) = 2b, \forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $I = \int_0^{2a} f(x)dx$, atunci:
 (a) $I = ab$
 (b) $I = \frac{a+b}{2}$
 (c) $I = \frac{ab}{2}$
 (d) $S = a + b$
 (e) $S = 2ab$

(5) Dacă a este partea întreagă a numărului $b = \int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx$, atunci:
 (a) $a = 0$
 (b) $a = 1$
 (c) $a = 2$
 (d) $a = 3$
 (e) $a = 4$

(6) Fie $(G, \circ)$ un grup şi $A = \{f : G \to G \mid f(x \circ y) = x \circ f(f(y)), \forall x, y \in G\}$. Dacă p este numărul elementelor mulţimii A, atunci:
 (a) $p = 0$
 (b) $p = 1$
 (c) $p = 2$
 (d) $p = 3$
 (e) $p \geq 2021$

(7) Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = t^2 - 4t + 3, g(x) = \min\limits_{x \leq t \leq x+1} f(t)$. Dacă $a = \dfrac{\int_0^3 g(x)dx}{g'(\frac{1}{2}) + g'(\frac{3}{2})}$, atunci:
 (a) $a = \frac{7}{3}$
 (b) $a = -\frac{7}{3}$
 (c) $a = \frac{11}{3}$
 (d) $a = -\frac{1}{3}$
 (e) $a = \frac{1}{3}$

(8) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = 8x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Dacă $I = \int_1^2 f(x)dx$, atunci:
(a) $I = \frac{2}{3}$
(b) $I = -\frac{1}{4}$
(c) $I = -\frac{3}{2}$
(d) $I = \frac{1}{6}$
(e) $I = \frac{4}{9}$

(9) Fie şirul $a_n = \int_2^{n+2} x[\log_{[x]} x]dx, n \geq 1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Dacă $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, atunci :
(a) $L = \frac{1}{2}$
(b) $L = 1$
(c) $L = 0$
(d) $L = \frac{1}{e}$
(e) $L = e$

(10) Fie mulţimea $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + ax^2 + bx + c = 0\}$. Fie p numărul tripletelor (a, b, c) din $\mathbb{R}^3$ pentru care mulţimea G împreună cu operaţia de înmulţire formează o structură de grup, atunci:
(a) $p = 4$
(b) $p = 1$
(c) $p = 2$
(d) $p = 3$
(e) $p = 0$

(11) Fie mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Dacă n este numărul elementelor inversabile a monoidului M în raport cu înmulţirea matricelor, atunci:
(a) $n = 4$
(b) $n = 16$
(c) $n = 2$
(d) $n = 1$
(e) $n = 8$

(12) Fie $(G, \cdot)$ un grup necomutativ şi $a, b \in G$ astfel încât $a^3 = e$ şi $b^{-1} \cdot a \cdot b \cdot a^{-1} = b^2$. Dacă $x = b^{28}$, atunci:
(a) $x = e$
(b) $x = b$
(c) $x = b^2$
(d) $x = a \cdot b \cdot a$
(e) $x^{-1} = a^{-1} \cdot b \cdot a$

(13) Pe mulţimea $M = (0, \infty)$ definim legea "$\star$" cu proprietăţile: $(x + 1) \star x = 1, \forall x \in M$, $(x \cdot y) \star z = x \cdot (y \star z), \forall x, y, z \in M$, unde „$\cdot$" reprezintă operaţia de înmulţire a numerelor reale.
(a) Legea $\star$ nu este comutativă, dar admite element neutru
(b) Legea $\star$ este comutativă, dar nu este asociativă
(c) Legea este asociativă şi admite element neutru
(d) Legea nu este asociativă, nu este comutativă şi nu admite element neutru $\star$
(e) $(M, \star)$ grup

(14) Mulţimea părţilor stabile finite ale lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operaţia de înmulţire a numerelor întregi are:
(a) un element
(b) două elemente
(c) patru elemente
(d) 5 elemente
(e) cel puţin şase elemente

(15) Se consideră $(G, \cdot)$ grup abelian finit, $H = \{x \in G \mid x^2 = 1\}$. Dacă $g = \prod_{x\in G} x$ şi $h = \prod_{x\in H} x$, atunci:
(a) $g = h$
(b) $g^2 = h$
(c) $g = h^2$
(d) $gh = h$

(e) $g \cdot h = 0$

(16) Dacă n reprezintă numărul izomorfismelor grupurilor $(\mathbb{Z}_4, +)$ şi $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$, atunci:
(a) $n = 4$
(b) $n = 2$
(c) $n = 3$
(d) $n = 1$
(e) $n = 0$

(17) Ordinul elementului $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ în grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este:
(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 6
(e) 12

(18) Fie $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx, n \in \mathbb{N}$ şi $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci:
(a) $l = 0$
(b) $l = \frac{\pi}{2}$
(c) $l = \frac{\pi}{4}$
(d) $l = \frac{\pi}{3}$
(e) $l = \pi$

(19) Fie $f : [1, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{|x-a|+1}, a \in \mathbb{R}$. Fie $A = \{a \in \mathbb{R} \mid \int_1^3 f(x)dx = \ln 4\}$ şi $S = \sum_{a\in A} a$. Atunci:
(a) $S = 6$
(b) $S = \frac{10}{3}$
(c) $S = 4$
(d) $S = \frac{4}{3}$
(e) $S = 2$

(20) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{e^x+1}$. Dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ este:
(a) ∞
(b) $-\infty$
(c) 0
(d) limita nu există
(e) 1