Prima etapă a Olimpiadei “Gazeta Matematică” – Clasa a XI-a

Colegiul Naţional “Sf. Sava”©*

27.02.2021

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul $\sigma^{2021}(3)$ este egal cu:

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Numărul real a pentru care $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ este egal cu:

   (a) 1 (b) 2 (c) -1 (d) -2

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Matricea $A^4 - A^3 - A^2$ este egală cu:

   (a) $A + I_2$ (b) $A - I_2$ (c) I_2 (d) O_2

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Numărul elementelor mulţimii $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), X^n = A\}$ este egal cu:

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 2021

*Timp de lucru: 120 de minute. Fiecare dintre cele 20 de probleme are un singur răspuns corect. Încărcaţi o fotocopie până la 12:15. Punctajul necesar calificării este de peste 70% din cel mai mare punctaj obţinut.

5. Numărul soluţiilor ecuaţiei $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ este egal cu:

(a) 1 (b) 3 (c) 9 (d) 27

6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $f(n) = A^n$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

(a) f e surjectivă (b) f e injectivă (c) $I_2 \in \mathrm{Im}(f)$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(f)$

7. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $a > 0$. Dacă $A^5 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ atunci $\dfrac{z}{y}$ este egal cu:

(a) 1 (b) 2 (c) $a+2$ (d) $a+3$

8. Fie $A(x) = \begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $P = \{x \in \mathbb{R} \mid \det(A(x)) = 0\}$. Suma elementelor mulţimii P este egală cu:

(a) 0 (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt[3]{4}$ (d) $-(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$

9. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = 6$ şi cu toţi complemenţii algebrici ai elementelor primei linii egali cu 2. Suma elementelor matricei A este egală cu:

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 6

10. Se consideră mulţimea M a numerelor naturale $n \geq 2$ pentru care există $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ cu $\det(X^*) = 64$. Numărul elementelor mulţimii M este egal cu:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

11. Limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n = \dfrac{8^n + 7^{n+1}}{8^{n+1} - 3^{2n}}$, $n \geq 0$ este egală cu:

(a) 0 (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{7}{8}$ (d) ∞

12. Fie numerele reale a, b, c astfel încât $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}+bn+c) = 3$. Numărul $a+b+2c$ este egală cu:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

13. Limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = \sqrt[2n+1]{\cos\dfrac{4\pi}{7}}$, $n \geq 1$ este egală cu:

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$. Limita $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ este egală cu:

(a) -2 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

15. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+1)^{[(2x+1)/(3x)]}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a. Limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$ este egală cu:

(a) -2 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

16. Numărul real pozitiv x pentru care $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(x+\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})\cdots(x+\frac{n}{n+1})} = 2x^2$ este egal cu:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2

17. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = n^{n+1} - (n+1)^n$, $n \geq 1$. Atunci $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{nx_n}$ este egală cu:

(a) 0 (b) 1 (c) e (d) ∞

18. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ definit prin $x_2 = \frac{1}{2}$ şi $x_n x_{n+1} = n(n+1)(x_n - x_{n+1})$, $n \geq 2$. Limita şirului $((x_n)^n)_{n\geq 2}$ este egală cu:

(a) 0 (b) $\frac{1}{e}$ (c) 1 (d) ∞

19. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $A^7 = I_n$. Atunci $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\det(xA+I_n)}{x^n}$ este egală cu:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞

20. Limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} + \cdots + \frac{1}{C_n^n}$ este egală cu:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞