Prima etapă a Olimpiadei "Gazeta Matematică" – Clasa a XII-a

Colegiul Naţional "Sf. Sava"©*

27.02.2021

1. Numărul elementelor simetrizabile ale monoidului $(\mathbb{Z}, *)$ unde $x * y = xy + 5x + 5y + 20$, este egal cu:

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

2. Pe $[1, \infty)$ definim legea de compoziţie asociativă $x * y = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2$. Numărul $1^2 * 2^2 * \ldots * 10^2$ este egal cu:

   (a) 1024 (b) 2116 (c) 2048 (d) 4096

3. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = xy + ax + 3y + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă legea "$*$" are element neutru, atunci $a + b$ este:

   (a) 9 (b) 12 (c) -9 (d) -12

4. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = xy - 3x - 3y + \lambda$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor lui λ pentru care intervalul $(3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$" este:

   (a) $(12, \infty)$ (b) $[12, \infty)$ (c) $(-\infty, 12]$ (d) $[0, \infty)$

5. Pe mulţimea $\{0, 1, 2\}$ se defineşte a legea de compoziţie "$*$" cu tabla

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	0
2	2	0	2

*Timp de lucru: 120 de minute. Fiecare dintre cele 20 de probleme are un singur răspuns corect. Încărcaţi o fotocopie până la 12:15. Punctajul necesar calificării este de peste 70% din cel mai mare punctaj obţinut.

Care dintre următoarele afirmaţii este falsă?

(a) "$*$" are element neutru (b) $\{0,1\}$ este parte stabilă (c) $\{1,2\}$ nu este parte stabilă (d) "$*$" este asociativă

6. Câte subgrupuri finite are grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) O infinitate

7. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu elementul neutru e şi $a, b \in G \setminus \{e\}$ cu $a^3 = b^4$ şi $a^{10} = b^9$. Ordinul lui b este:

(a) 3 (b) 7 (c) 11 (d) 13

8. Care este probabilitatea ca alegând un element din $\mathbb{Z}_{30}$, acesta să nu aparţină niciunui subgrup propriu al grupului $(\mathbb{Z}_{30}, +)$?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{4}{15}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

9. Se consideră morfismul $f : \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_{10}$ de la grupul $(\mathbb{Z}_{50}, +)$ la grupul $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, diferit de morfismul nul. Dacă $f(\hat{3}) = f(\hat{7})$, atunci $f(\widehat{13})$ este:

(a) $\hat{0}$ (b) $\hat{3}$ (c) $\hat{5}$ (d) $\hat{8}$

10. Fie p şi q două numere prime distincte şi $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu pq elemente. Numărul automorfismelor lui G este:

(a) $p + q$ (b) $(p-1)(q-1)$ (c) $pq - p - q$ (d) $pq - 1$

11. Funcţia F este primitiva funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$ cu proprietatea că $F(1) = 0$. Atunci $F(e)$ este:

(a) $\frac{e^2}{2}$ (b) $\frac{e^2-1}{2}$ (c) $\frac{e^2+1}{2}$ (d) $\frac{e^2+e}{2}$

12. Funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = e^x(a \sin x + b \cos x)$ este primitiva funcţiei $f : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cos x$. Atunci $a + b$ este:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

13. Se consideră funcţia $f : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^{2021} + 1}{x^2 + 1}$. Atunci $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ este:

(a) $\pi + 2$ (b) $\pi + 2^{2021}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

14. Numărul real a pentru care $\int_0^{\frac{1}{2}} e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \mathrm{d}x = \frac{a\pi}{6}$ este:

(a) e (b) $\sqrt{e}$ (c) $\frac{1}{e}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

15. Limita $\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt[3]{x^3+2}\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

(a) 1 (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) 2 (d) ∞

16. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}$. Atunci $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) ∞

17. Funcţia F este primitiva funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ cu proprietatea că $F(1) = 0$. Atunci $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$ este egală cu:

(a) $\frac{e}{2}$ (b) $\frac{e-1}{2}$ (c) $\frac{1-e}{2}$ (d) $-\frac{e}{2}$

18. Funcţia continuă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ are proprietatea că $f(x)+f(1-x) = 2$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Atunci $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este egală cu:

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

19. Integrala $\int_0^1 (2^{x^2} + \sqrt{\log_2(x+1)})\mathrm{d}x$ este egală cu:

(a) 1 (b) 2 (c) e (d) 4

20. Limita $\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

(a) 1 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) ∞